INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

© por Artur Lopes
Instituto de Matemática - UFRGS

Conteúdo

.
[theo]Proposition

Prefácio

O objetivo destas notas é apresentar alguns dos resultados básicos da teoria das equações diferenciais ordinárias e também alguns exemplos em que aparecem aplicações desta teoria. O pre-requisito para ler estas notas é apenas um conhecimento básico de Cálculo Diferencial e Integral e algumas idéias gerais de Algebra Linear (e que são também apresentadas no texto).

Este texto possui um caráter elementar e se dedica a apresentar vários métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias na reta real. Apresentamos também a demonstração dos vários resultados básicos da teoria (menos o teorema de existência e unicidade).

Enfatizamos no texto, através de vários exemplos, o entendimento conceitual do assunto, ao mesmo tempo em que descrevemos, em alguns casos simples, como modelar - através de equações diferenciais - problemas concretos oriundos de várias áreas aplicadas.

Ao leitor interessado em textos mais avançados sobre equações diferenciais ordinárias recomendamos [DL][FN][BF][HS][S].

Este livro é dirigido a estudantes dos cursos de engenharia, matemática, física, economia, biologia, etc... Referimos o leitor a [Ch], [KG], [Ba] e [Bu] para algumas aplicações nestas áreas.

Gostaríamos de agradecer a Eduardo Brietzke e Carlos Felipe Rodrigues por terem oferecido várias sugestões e correções que serviram para aprimorar o presente texto.

I.1 Introdução

Vamos inicialmente fazer algumas considerações gerais e tentar descrever da maneira mais simples possível o que é uma equação diferencial. Nos próximos parágrafos vamos apresentar as definições e resultados básicos que analisaremos posteriormente - com mais detalhes- na teoria geral das equações diferenciais ordinárias.

Uma equação diferencial é um expressão que envolve a derivada de uma função e o nosso objetivo é tentar descobrir quem é tal função, ou, que propriedades possui tal função. Por exemplo, considere a expressão

$$x^{'}(t) = 5x(t).$$

Perguntamos: quem é a função $x(t)$ (onde $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$) que satisfaz a equação acima? A resposta é bem simples: seja $x(t) = e^{5t}$, então para "todo"valor real t,

$$x^{'}(t) = 5e^{5t} = 5x(t).$$

Portanto, a resposta que buscávamos é $x(t) = e^{5t}$.

Note que desejamos que a equação seja verdadeira para todos os valores de t e não apenas para um valor particular de t.

A primeira pergunta que nos fazemos é: como foi que descobrimos que a resposta é $x(t) = e^{5t}$. Será que existem outras funções (além de e^{5t}) que também satisfazem tal equação? Na verdade, ke^{5t}, onde k é uma constante, também é solução, pois, tomando $x(t) = ke^{5t}$, temos que

$$x^{'}(t) = k5e^{5t} = 5x(t).$$

É possivel mostrar, como veremos em breve, que qualquer solução de $x^{'}(t) = 5x(t)$, é da forma $x(t) = ke^{5t}$, onde k é uma constante real.

Diremos então que ke^{5t} é a solução geral de $x^{'}(t) = 5x(t)$.

A função $x(t) = \text{sen }(t)$ satisfaz a equação $(x'(t))^2 + x(t)^2 = 1$. De fato, $x'(t) = \cos(t)$ e temos que

$$1 = (\cos(t)^2 + \text{sen}^2(t)) = ((x'(t))^2 + x(t)^2).$$

Exercício: Mostre que $x(t) = t^3$ satisfaz a equação diferencial $3x(t) - t\,x'(t) = 0$.

Outro exemplo: para a fixo, $x(t) = ce^t - a$, onde c denota uma constante, é a solução geral da equação $x'(t) = x(t) + a$. Isto porque para tal $x(t)$

$$x'(t) = ce^t = (ce^t - a) + a = x(t) + a.$$

Vamos fazer agora um paralelo com um outro problema que é muito bem conhecido pelo leitor: as equações algébricas. A expressão $x^2 - 3x + 2 = 0$ é um polinômio algébrico, e a pergunta natural que nos fazemos é: quem são os números reais x que satisfazem tal equação. Neste caso a resposta é $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$. Na equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ não existem derivadas (afinal x representa nesta equação um número e não uma função que depende de t), sendo assim não é uma equação diferencial. Para se obter as soluções (ou também chamadas raízes do polinômio) x_1 e x_2 de um polinômio do segundo grau $ax^2+bx+c = 0$, temos a nossa disposição a bem conhecida fórmula de Báscara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para polinômios de grau maior que 4 não existe uma fórmula geral para calcular as raízes. O valor x é usualmente chamado de incógnita da equação polinomial.

O problema que estamos interessados na teoria das equações diferenciais é mais complexo do que resolver equações algébricas, pois a incógnita no nosso caso, será uma função $x(t)$ em vez de um número real $x \in \mathbf{R}$.

Note que na equação polinomial, para encontrar a solução x, teremos que calcular uma raiz quadrada (que é na verdade a operação inversa de tomar x^2) na fórmula de Báscara, isto aparece quando temos que calcular $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Na teoria das equações diferenciais teremos que fazer algo similar, mais precisamente teremos, em geral, que integrar alguma função. Note que integrar é a operação inversa de derivar como se sabe do Teorema Fundamental do Cálculo. Nem sempre será possivel exibir explicitamente a solução $x(t)$, fato que não é surpreendente, visto que no problema menos complexo (polinômios), nem sempre se consegue obter a expressão explícita da solução $x \in \mathbf{R}$.

A expressão $y^{'}(t) = 5y(t)$ denotará a mesma equação diferencial que $x^{'}(t) = 5x(t)$, estamos apenas trocando o nome da "incógnita" $x(t)$ para $y(t)$.

Como é usual em equações diferenciais, usaremos a expressão simplificada $x^{'} = 5x$ em vez de $x^{'}(t) = 5x(t)$. O objetivo de suprimir o t é para se ter uma notação menos pesada.

Algumas vezes somos levados a considerar equações do tipo $x'(t) = t^2 x(t)$, neste caso, a expressão simplificada fica $x' = t^2 x$. Isto é, convencionamos suprimir apenas o t que aparece como o valor do qual x depende. Outro exemplo, $x'(t) = x(t)\,(\log t)\,\cos x(t)$, na expressão simplificada fica $x' = x\,(\log t)\,\cos x$.

Vamos mostrar agora como obtemos a solução de $x^{'} = 5x$, usando o teorema fundamental do Cálculo.

Primeiro, vamos escrever $x^{'} = 5x$ de uma maneira mais adequada

$$\frac{x^{'}}{x} = 5.$$

Lembrando que a derivada de $\log x(t)$ é $\frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{x^{'}(t)}{x(t)}$, e supondo que $x(t)$ é positivo (este fato será devidamente esclarecido na próxima seção) obtemos de $\frac{x^{'}}{x} = 5$, e assim equivalentemente

$$\frac{d \log x(t)}{dt} = 5.$$

Logo a função à esquerda da última expressão tem que ser igual a função à direita da mesma expressão (que neste caso é constante). Logo integrando dos dois lados da expressão acima obteremos de cada lado a mesma função a menos de uma constante b. Isto é, calculando a integral indefinida

$$\int \frac{d \log x(t)}{dt} dt = \int 5dt + b.$$

Agora, do teorema fundamental do Cálculo segue que:

$$\log x(t) = \int \frac{d \log x(t)}{dt} dt = 5t + b.$$

Aplicando agora a função exponencial dos dois lados da expressão, e usando o fato que o exponencial é a função inversa da função logaritmo, obteremos

$$x(t) = e^{5t+b} = e^{5t} e^{b}.$$

Finalmente note que podemos denominar k o valor e^{b}, concluindo assim que a solução $x(t)$ tem a forma $x(t) = ke^{5t}$, onde k é constante. Note que o teorema fundamental do Cálculo entrou de maneira fundamental nas considerações que fizemos acima para se conseguir encontrar a solução que buscávamos. O fato que integrar é a operação inversa de derivar irá aparecer várias vezes no texto, quando analisarmos outros tipos de equações diferenciais. Nem sempre conseguiremos obter soluções explícitas como foi possível no caso que tratamos acima.

Observação 1: Observe que no desenvolvimento que fizemos acima consideramos $\log x(t)$, antes mesmo de saber se $x(t)$ era positivo. No final obtivemos que $x(t)$ era da forma ke^{5t} com k positivo, o que permite considerar de fato $\log x(t)$ (lembre que log só está definido para números positivos). Se considerarmos k negativo, será também verdade que ke^{5t} é solução de $x^{'}(t) = 5x(t)$ como veremos em breve.

Na verdade muitas vezes vamos fazer algumas hipóteses "otimistas" à respeito da solução, e tentar descobrir quem ela é. Após descobrir quem deveria ser a solução, devemos testar se a função $x(t)$ que descobrimos é de fato solução da equação diferencial. Este é o teste definitivo para saber se a $x(t)$ encontrada é realmente a solução procurada.

Posteriormente vamos analisar com todo cuidado as questões acima descritas e explicar com todos os detalhes porque $ke^{5t}, k \in \mathbf{R}$ é a solução geral de $x^{'} = 5x$. Nesta introdução estamos apenas dando uma idéia geral sobre o procedimento a ser utilizado para encontrar a solução de uma equação diferencial.

Outras expressões envolvendo uma função e suas derivadas como

$$x''(t) = -x(t),$$

ou de maneira equivalente

$$x'' + x = 0,$$

também são equações diferenciais. Neste caso uma solução é $x(t) = \cos(t)$, pois

$$x''(t) + x(t) = \frac{d^2(\cos(t))}{dt^2} + \cos(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0.$$

Neste caso, diferentemente do caso anterior, aparece a derivada segunda. Chamaremos este último caso de equação diferencial de segunda ordem para distinguir do primeiro caso (envolvendo apenas primeira derivada) que chamaremos de equação diferencial de primeira ordem. Equações envolvendo derivadas de terceira ou de ordem maior são também importantes e devem ser analisadas, mas estaremos neste texto, basicamente, considerando apenas equações diferenciais de primeira e segunda ordem.

Expressões do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ou mais geralmente espressões envolvendo as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ onde $u(t,x), t, x \in \mathbf{R}$ é tal que u toma valores reais, são denominadas de equações diferenciais parciais. Neste texto não vamos considerar tais tipos de equações. Sobre o assunto equações diferenciais parciais, referimos o leitor a [I] para um texto de nível de graduação e a [II] para um texto de nível mais avançado.

As equações diferenciais denominadas de ordinárias, são aquelas em que só aparece a derivada em relação a uma variável.

Exemplo 1: Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = g(t)$$

Neste caso, para encontrar a solução $x(t)$ basta integrar dos dois lados da igualdade acima e usar o Teorema Fundamental do Cálculo, obtendo assim

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int g(t)\, dt \Rightarrow x(t) = \int g(t)\, dt + c.$$

O tipo de equação diferencial do exemplo 1, no qual $x^{'}$ é igual a uma função que só depende de t, é o exemplo mais simples de equação diferencial entre todos os possíveis. Muitas vezes iremos tentar reduzir equações diferencias mais complexas à equações deste tipo.

Como dissemos antes, e mais uma vez confirmamos acima, o método utilizado para encontrar a solução de uma equação diferencial em geral envolve integração e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 2: $\frac{dx}{dt} = -\text{sen t}$, neste caso a solução é obtida conforme exemplo 1 integrando de cada lado da equação e usando o teorema fundamental do cálculo, obtemos assim $x(t) = \cos t + c$.

Para determinar c, podemos supor uma condição inicial $x(t_0) = x_0$ e então obtemos $x_0 = x(t_0) = \cos t_0 + c$, sendo assim $c = x_0 - \cos t_0$.

Finalmente concluímos que a solução de $\frac{dx}{dt} = -\text{sen t}$ com a condição inicial $x(t_0) = x_0$ é a função $x(t) = \cos t - \cos t_0 + x_0$.

Como veremos na próxima seção, para determinar de maneira única a solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem deveremos assumir (como acima $x(t_0) = x_0$) uma condição inicial.

Para confirmar que $x(t) = \cos(t) + k$ é realmente solução de $x^{'} = -$ sen t basta derivar.

A notação $x^{'} = \text{sen t}$ utilizada acima será usada muitas vezes no nosso texto: como dissemos antes suprimimos na equação diferencial o t da incógnita $x(t)$ mas não suprimimos o t das outras funções que participam da equação mas não envolvem a função x.

Agora que já demos ao leitor uma breve idéia do que é uma equação diferencial, vamos analisar de maneira sistemática a teoria geral das equações diferenciais ordinárias considerando primeiro os casos mais fáceis e simples. Os casos mais complexos serão analisados ao final do texto.

Equações diferenciais ordinárias aparecem em uma grande quantidade de aplicações em áreas diversas como engenharia, física, biologia, economia, agronomia, etc...

Várias aplicações de equações diferenciais ordinárias, como por exemplo o da decomposição atômica do tório (ver exemplo 7) e também modelos populacionais (ver exemplo 13), serão apresentados no texto. Estes exemplos foram tomados de [B].

Vamos considerar no capítulo I apenas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Definição 1: Chamaremos de equação diferencial ordinária de primeira ordem uma equação do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

onde $f : A \to \mathbf{R}$ é uma função diferenciável (na maioria das vezes vamos assumir também que $f^{'}$ é continua) de $(t,x) \in A$, e onde A é um subconjunto aberto de $\mathbf{R}^2$.

As equações diferenciais $x^{'} = 5\,x$ e $x^{'} = -\text{sen t} + x^2$ são exemplos de equações diferenciais de primeira ordem. Neste caso $f(t,x)$ é igual, respectivamente, a $f(t,x) = 5x$ e $f(t,x) = -\text{sen t} + x^2$.

A equação diferencial $x'' + x' = 0$ não é uma equação de primeira ordem, pois aparece a derivada segunda de $x(t)$ na equação diferencial.

Desejamos encontrar, quando possível, uma $x(t)$ que satisfaça a equação $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, com uma condição inicial dada $x(t_0) = x_0$. O Teorema abaixo afirma que se $f(t,x)$ for de classe C^1 (isto é, se $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são continuas) a solução existe e é única.

Teorema 0. Teorema de existência e unicidade Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

com a condição inicial $x(t_0) = x_0$, onde $f : A \to \mathbf{R}$ é de classe C^1 para $(t,x) \in A$, e onde A é um subconjunto aberto de $\mathbf{R}^2$. Então existe $\epsilon > 0$ e uma solução $x(t)$ (da equação diferencial e que também satisfaz a condição inicial) definida no intervalo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. A solução $x(t)$ satisfazendo a equação diferencial e a condição inicial é única, isto é, se uma outra $x_1(t)$ satisfaz $\frac{dx_1}{dt} = f(t, x_1(t))$, para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, e ainda a condição inicial $x_1(t_0) = x_0$, então $x_1(t) = x(t)$, para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Em alguns casos ϵ é infinito, mas existem exemplos em que ϵ não pode ser tomado arbitrariamente grande (ver observação 3 na seção I.3 após o exemplo 9).

Se f for de classe C^∞, isto é, se f pode ser diferenciada infinitas vezes, então $x(t)$ tambeḿ é de classe C^∞.

A demonstração deste resultado não será apresentada neste texto. O leitor interessado na prova do resultado acima poderá encontrá-la em [S].

Se f for apenas contínua (e não de classe C^1) então a solução $x(t)$ de $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ existe, mas nem sempre é única (ver [S]).

Vamos desenvolver nas próximas seções alguns métodos que permitirão resolver **certos** tipos de equações diferenciais. Embora a solução sempre exista sob condições gerais (basta f de classe C^1) não existem métodos gerais (que sirvam para **todas** as f) de explicitar quem é $x(t)$.

No presente texto, quando nada for explicitado ao contrário, assumiremos que f é de classe C^∞.

Definição 2: Uma equação diferencial de primeira ordem em que não aparece a variável t na expressão $f(x,t)$ é denominada autônoma.

No caso contrário, isto é, quando f depende de t diremos que a equação diferencial é não-autônoma.

Vamos analisar na próxima seção um caso especial de equação diferencial que é muito importante: as equações lineares de primeira ordem. Casos mais complexos serão analisados subsequentemente.

Existem uma série de distintos pacotes computacionais que permitem obter de maneira **muito fácil** funções $\hat{x}(t)$ que aproximam bem as $x(t)$ (que denota, naturalmente, uma solução de uma particular equação diferencial ordinária). Recomendamos ao leitor, por exemplo, os "software"MAPLE (ver referência [MA]), MATHEMATICA (ver referência [MAT]) e MATHLAB (ver referência [MATL]). Estes pacotes permitem também o uso de manipulações simbólicas (de equações diferenciais) e transformadas de Laplace.

No presente texto não vamos tratar de aplicações envolvendo tais pacotes mas apenas destacar em que casos os utilizamos.

Os métodos utilizados para encontrar a solução aproximada $\hat{x}(t)$, mencionada acima, são descritos nos cursos de Cálculo Numérico. Não trataremos deste tópico no nosso texto e referimos o leitor interessado numa boa exposição preliminar do assunto à [Co] (seção 6)

Exercícios:

1) Mostre que $x(t) = te^t$ é solução de $x'' - 2x' + x = 0$.

2) Mostre que $x(t) = \tan t$ é solução de $x' = 1 + x^2$ e que satisfaz a condição inicial $x(0) = 0$.

I.2 Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem

Definição 3: No caso em que a função $f(x,t)$ que aparece na equação de primeira ordem $x^{'} = f(x,t)$ depende lineramente em x (ou seja, quando é linear em $x(t)$), isto é, quando f é da forma $f(x,t) = d(t)x + c(t) = d(t)x(t) + c(t)$, denominaremos a equação $x^{'}(t) = d(t)x(t) + c(t)$ (ou, na notação simplificada, $x^{'} = d(t)x + c(t)$) de equação diferencial linear de primeira ordem.

Exemplo 3: $x' + ax = 0$.

Podemos escrever esta equação como $\frac{dx}{dt} = -ax = f(t,x)$, colocando-a na forma geral descrita na definição acima.

Neste caso $d(t) = -a$ e $c(t) = 0$.

Seja $x(t) = ke^{-at}$, k constante, então
$\frac{dx}{dt} = -a\,k\,e^{-at} = -ax(t)$.

Sendo assim $\frac{dx}{dt} + ax(t) = -akx(t) + akx(t) = 0$, e portanto a função $x(t) = ke^{-at}$ satisfaz então a equação $x' = -ax$.

A solução $x(t)$ pode ser obtida a partir do desenvolvimento que será feito a seguir num caso mais geral.

Como poderemos descobrir a solução da equação linear $x^{'} = d(t)x+c(t)$ com a condição inicial $x(t_0) = x_0$, ou escrevendo a equação de uma maneira mais adequada:

$$x^{'} + a(t)x = b(t),$$

com a condição inicial
$$x(t_0) = x_0?$$

Acima estamos tomando $a(t) = -d(t)$ e $b(t) = c(t)$.

Exemplo 4: Considere a equação linear $0 = x'(t)+tx(t) = x'+tx$.

Definição 4: A equação $x^{'} + a(t)x = 0$ (isto é, o caso em que $b(t) = 0$), chama-se de equação diferencial linear homogênea.

Se $a(t)$ é constante igual a a e $c(t) = 0$ então recaimos no exemplo 3 acima.

Primeiro vamos analisar o caso homogêneo.

Vamos mostrar a seguir como obter $x(t)$ satisfazendo

$$x' + a(t)x = 0.$$

Suponha que $x(t) \neq 0, \forall t \in \mathbf{R}$, logo

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -a(t)$$

e portanto integrando dos dois lados

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \int_{t_0}^{t} -a(s)ds.$$

Note que
$$\frac{d\log x(t)}{dt} = \frac{\frac{dx(t)}{dt}}{x(t)}.$$

Suponha primeiro que $x(s)$ seja sempre positivo ($x(s)$ nunca se anula). Logo, $x_0 = x(t_0) > 0$.

Portanto, pelo Teorema fundamental do Cálculo

$$\log(x(t)) - \log(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\log(x(s))}{ds} ds = -\int_{t_0}^{t} a(s)ds.$$

Aplicando exponencial em ambos os lados da última expressão obtemos

$$e^{\log x(t)-\log x(t_0)} = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds},$$

e assim obtemos

$$\frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Logo, concluímos que

$$x(t) = x(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = x_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

deve ser a solução da equação diferencial $x^{'}+a(t)x = 0$ com a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Note que estamos acima supondo "otimisticamente"que a solução $x(t)$ está definida de t_0 a t. Na verdade a solução existe pelo teorema de existência e unicidade enunciado anteriormente e pode se provar ainda neste caso que está definida para todo t real.

Se $x(t)$ é sempre negativo (logo $x(t_0) = x_0 < 0$), considerando $\log|x(t)| - \log|x(t_0)|$, obtemos de maneira similar que

$$x(t) = x(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = x_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

deve ser a solução da equação diferencial $x^{'}+a(t)x = 0$ com a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Acima fizemos uma hipótese otimista de que $x(t)$ nunca se anula. Tal fato em princípio poderia ser falso. De qualquer maneira, obtivemos um candidato a ser a solução.

Vamos agora checar se realmente $x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ é solução da equação diferencial $x^{'}(t) + a(t)x(t) = 0$ e satisfaz a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Ora $x^{'}(t) + a(t)x(t) = x_0(-a(t))e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + a(t)x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = 0$, logo comprovamos que de fato $x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ é a solução geral da equação diferencial $x^{'}(t) + a(t)x(t) = 0$.

Vamos agora checar se $x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ satisfaz a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Se $x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ então aplicando a expressão ao valor t_0, obtemos $x(t_0) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} = x_0 e^0 = x_0$.

Fica assim provado que $x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ define de fato a solução da equação diferencial $x^{'}(t) + a(t)x(t) = 0$ com a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Exemplo 5: Encontre a solução $x(t)$ de $x^{'} + ax = 0$, onde a constante, com a condição inicial $x(1) = 3$ (isto é $t_0 = 1$ e $x_0 = 3$).

Sabemos, como foi visto acima que a $x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a ds} = 3e^{a(t-1)}$ é a solução desejada.

Sendo assim, $x(t) = 3e^{-a(t-1)}$ é a solução de $x^{'} + ax = 0$, com a condição inicial $x(1) = 3$.

Ficou assim resolvido o caso de equação diferencial de primeira ordem linear homogênea $x^{'} + ax = 0, x(t_0) = x_0$, através da expressão

$$x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)}.$$

Exemplo 6: Calcule a solução de $x^{'} + t^2 x = 0$ com a condição inicial $t_0 = 2, x_0 = 4$.

Como vimos acima a solução é $x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} s^2 ds} = x_0 e^{-(t^3 - t_0^3)/3} = 4e^{-t^3/3} e^{(2^3)/3}$.

Exemplo 7: Decomposição radioativa.

Observa-se que a massa de urânio decresce ao longo dos anos. Desejamos fazer previsões futuras a respeito de uma certa massa $m(t)$ (medida em gramas) ao longo dos anos. O valor $m(t)$ vai descrever a massa no ano t. A massa inicial no tempo $t = 0$ é denotada por k.

Observa-se que a variação de massa ao longo de um ano $m(t+1) - m(t)$ é proporcional à massa $m(t)$ no ano anterior. Mais exatamente, independente de t, vale aproximadamente que

$$\frac{m(t+1) - m(t)}{m(t)} \approx \lambda$$

onde $\lambda = -9,85 \times 10^{-10}$.

A partir da lei que rege o fenômeno que foi descrito acima, é natural supor que $m(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = \lambda.$$

Isto porque

$$m'(t) \approx \frac{m(t+\Delta) - m(t)}{\Delta} \approx \frac{m(t+1) - m(t)}{(t+1) - t} \approx \lambda m(t),$$

onde consideramos $\Delta = 1$.

Como sabemos, a solução de $m' = \lambda m$ é $m(t) = ke^{\lambda t}$ (no caso em consideração λ é negativo pois a massa decresce).

Se no instante $t = 0$ (ano 1996, por exemplo) a massa for m_0, então $m(t) = m_0 e^{\lambda t}$ e assim podemos fazer uma previsão de $m(t)$ para anos posteriores, por exemplo, no ano 2026 a massa será $m_0 e^{\lambda 30}$.

No caso do urânio os valores que descrevem a variação de massa no modelo são dados por $x(t) = ke^{-\lambda t}$, onde $\lambda = 9.85 \times 10^{-10}$ anos^{-1}

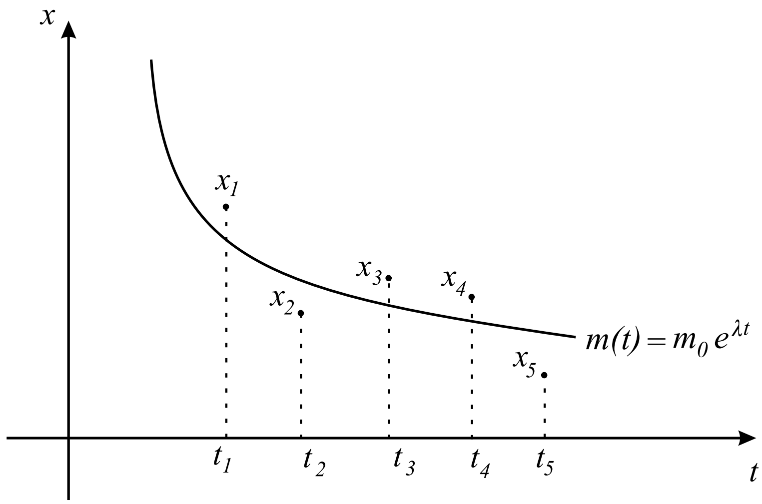

Figura 1.1:

Algumas palavras sobre como é possível identificar o valor $\lambda = 9.85 \times 10^{-10}$. O valor λ pode ser obtido através do método dos minímos quadrados a partir de dados experimentais.

Considere fixada a massa inicial m_0 de urânio no tempo t_0. Por exemplo, se nos tempos respectivamente $t_1, t_2, .., t_n$ são observados os valores $m(t_1) = x_1, m(t_2) = x_2, ..., m(t_n) = x_n$, pode-se estimar aproximadamente o valor de λ encontrando o mínimo da função $G(\lambda)$ dada por

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_0 e^{\lambda t_i})^2,$$

Ou seja, tentaremos encontrar $\hat{\lambda}$ entre os possíveis λ que menos desvia de uma exponencial $e^{\lambda t}$ a partir da informação dos dados existentes. .

Fazendo a conta, encontra-se o valor $\hat{\lambda}$ tal que $G^{'}(\hat{\lambda}) = 0$ e $G''(\hat{\lambda}) > 0$. Este valor será o melhor valor aproximado do λ real (a partir dos dados colhidos) e, como vimos, pode ser obtido de maneira fácil a partir dos dados t_i, x_i apresentados acima.

Pode-se então fazer previsões aproximadas de valores futuros $m(t)$ (solução de $m' = \hat{\lambda} m$, $m(t_0) = m_0$), para a massa de urânio usando a aproximação $m_0 e^{\hat{\lambda} t}$.

Na figura 1 mostramos o caso em que $n = 5$ e que m_0 é conhecido. Os valores x_i forma obtidos através de medições nos tempos $t_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Suponha que nos tempos $t_i = i$ foram obtidos, respectivamente, os valores $7.4, 7.0, 6.7, 6.5, 6.0$, e a massa inicial no tempo $t = 0$ era $m_0 = 7.9$. Devemos portanto encontrar λ mínimo para $G(\lambda)$, onde

$$G(\lambda) = (7.4 - 7.9e^{\lambda 1})^2 + (7.0 - 7.9e^{\lambda 2})^2 + (6.7 - 7.9e^{\lambda 3})^2 +$$
$$(6.5 - 7.9e^{\lambda 4})^2 + (6.0 - 7.9e^{\lambda 5})^2.$$

Neste caso, dado tal $G(\lambda)$, temos que encontrar $\hat{\lambda}$ tal que satisfaz

$$G'(\lambda) = -(\,2(7.4 - 7.9e^{\lambda 1})7.9\,e^{\lambda 1} + 2(7.0 - 7.9e^{\lambda 2})7.9\;2\,e^{\lambda 2} +$$
$$2(6.7 - 7.9e^{\lambda 3})7.9\;3\,e^{\lambda 3} +$$
$$2(6.5 - 7.9e^{\lambda 4})7.9\;4\,e^{\lambda 4} + 2(6.0 - 7.9e^{\lambda 5})7.9\,5\;e^{\lambda 5}\,) = 0,$$

e ainda $G''(\lambda) > 0$.

Considere agora $y = e^{\lambda}$ e substitua y na equação acima encontrando assim uma equação polinomial $q(y) = 0$ onde $q(y)$ tem grau 10:

$$q(y) = -(\,2(7.4 - 7.9y)7.9\,y + 2(7.0 - 7.9y^2)7.9\;2\,y^2 +$$
$$2(6.7 - 7.9y^3)7.9\;3\,y^3 +$$
$$2(6.5 - 7.9y^4)7.9\;4\,y^4 + 2(6.0 - 7.9y^5)7.9\,5\;y^5\,) = 0.$$

Neste momento devemos aplicar algum pacote computacional para determinar raizes de um polinômio ([MA][MAT][MATL]). Devemos selecionar então uma raiz (exclua as raízes que são números complexos) que nos determine um mínimo para G. No caso em que for complicado calcular $G''(\lambda) > 0$ (nas soluções λ obtidas a partir do polinômio de grau 10 mencionado acima) podemos, alternativamente, testar o valor $G(\lambda)$ nos 10 possíveis valores de λ e encontrar assim o λ mínimo para G. Encontramos assim uma solução aproximada $\hat{y}$ e, finalmente, conseguimos descobrir $\hat{\lambda} = \log(\hat{y})$.

Este vai ser o valor estimado para λ e $m(t) = m_0 e^{\hat{\lambda}\,t}$ vai nos permitir obter uma previsão futura da massa de urânio a partir das 5 medições apresentadas.

Não há necessidade de utilizar tais pacotes no momento, estamos apenas dando uma indicação ao leitor sobre como proceder para resolver tais tipos de problemas.

Este é a êssencia do método dos mínimos quadrados também chamado do método da máxima verossimilhança. Se os dados forem em quantidade suficientemente grande os resultados são bastante precisos. Esta é uma maneira de calcular o valor de $\hat{\lambda} \approx 9.85 \times 10^{-10}$ mencionado acima (no problema da massa de urânio, para se obter uma boa aproximação, um número muito maior do que 5 medições é necessário). No método dos mínimos quadrados, quanto maior for o número de dados colhidos, mais preciso será estimativa de $\hat{\lambda}$.

Agora que já obtivemos a resposta para o caso da equação diferencial homogênea, vamos resolver o caso não homogêneo, ou seja o caso

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$

(que corresponde ao caso da equação linear de primeira ordem não homogênea) com a condição inicial

$$x(t_0) = x_0.$$

Para resolver este caso teremos que multiplicar os dois lados da primeira equação acima por uma função $u(t)$ não nula, que deverá ser escolhida posteriormente de maneira conveniente. É claro que multiplicando dos dois lados por $u(t)$ continuamos com uma igualdade:

$$u(t)x'(t) + u(t)a(t)x(t) = b(t)u(t).$$

A função $u(t)$ será denominada de fator integrante.

O objetivo é usar novamente o teorema Fundamental do Cálculo, tentando colocar a última expressão como a derivada de uma função.

Como sabemos, a derivada de um produto de funções f e g satisfaz: $(fg)' = f'g + fg'$

Suponha que $u^{'}(t) = a(t)u(t)$, então

$$u(t)x^{'}(t) + u(t)a(t)x(t) = u(t)x'(t) + u'(t)x(t) = b(t)u(t). \qquad (1)$$

Sendo assim teremos que

$$(u(t)x(t))' = b(t)u(t).$$

A solução do caso não homogêneo será então finalmente obtida da seguinte maneira: integrando em relação à t dos dois lados da última expressão obtemos

$$u(t)x(t) = \int b(t)u(t)\,dt \Rightarrow x(t) = \frac{1}{u(t)} \int b(t)u(t)\,dt.$$

Fica assim determinada a solução $x(t)$.

Para que aconteça o que estabelecemos acima, é apenas necessário que $u(t)$ seja tal que $ua(t) = u'$.

O leitor reconhecerá acima que estamos considerando uma equação linear homgênea $u^{'} - a(t)u = 0$.

Como vimos acima no caso homogêneo, $u(t)$ deve ser da forma

$$u(t) = e^{\int a(t)\,dt}.$$

O fator integrante é portanto

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}. \qquad (2)$$

Sendo assim de (1) e (2) obtemos

$$u(t)x^{'}(t)+u(t)a(t)x(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}x(t)\right) = b(t)u(t) = b(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

Integrando dos dois lados e usando o Teorema Fundamental do Cálculo encontramos:

$$e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}x(t) = \int u(t)b(t)dt = \int e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt + k,$$

obtendo assim a solução da equação linear de primeira ordem não homogênea,

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\,(\int e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}b(t)dt + k\,).$$

O k acima aparece em função da integral indefinida. Ele pode ser determinado em função da condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Podemos também alternativamente encontrar a solução da equação linear de primeira ordem não homogênea utilizando a integral definida em vez de integral indefinida como acima:

$$\int_{t_0}^{t} (u(t)x(t))'dt = \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds,$$

logo,

$$u(t)x(t) - u(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds,$$

ou seja

$$x(t) = \frac{1}{u(t)}\left(\int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds + x_0\,u(t_0)\right) \qquad (3)$$

onde $u(s) = u(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{s} a(r)dr}$.

Observe que a integral que define $u(t)$ pode ser tomada com qualquer extremo inferior d em vez de t_0, visto que a alteração na expressão é apenas de uma constante, e isso não atrapalha em nada o raciocínio subsquentemente utilizado nas considerações feitas acima.

Observação 2: Note no desenvolvimento acima que podemos tentar calcular a solução de um problema envolvendo uma equação diferencial ordinária por dois métodos distintos. Um deles usa a integral indefinida e determina uma constante k que vai ser determinda a posteriori através da condição inicial $x(t_0) = x_0$. O outro método utiliza a integral definida junto com a condiç ao inicial $x(t_0) = x_0$, obtendo assim, diretamente, a solução $x(t)$. Qualquer dos dois métodos é adequado aos nossos propósitos e, naturalmente, no dará o mesmo resultado.

Exemplo 8: Considere $x' + 2t\,x = t$, com a condição inicial $x(1) = 2$. Neste caso, a equação é linear de primeira ordem não homogênea com $a(t) = 2t$ e $b(t) = t$.

A solução pode ser obtida pela aplicação direta da fórmula (3). Vamos no entanto proceder de maneira semelhante ao cálculo feito acima para esclarecer ao leitor todos os detalhes da prova em um caso concreto.

Ora $\int a(t)\,dt = t^2$, logo o fator integrante é

$$u(t) = e^{\int a(t)\,dt} = e^{t^2}$$

e portanto multiplicando a equação $x' + 2t\,x = t$ dos dois lados pelo fator integrante

$$e^{t^2}\,x' + 2t\,e^{t^2}\,x = t\,e^{t^2},$$

logo,

$$\frac{d}{dt}e^{t^2}x(t) = te^{t^2},$$

portanto integrando dos dois lados e usando o teorema fundamental do Cálculo

$$e^{t^2}\,x(t) = \int t\,e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + c$$

e finalmente

$$x(t) = \frac{1}{2} + c\,e^{-t^2}.$$

A constante c pode ser determinada resolvendo em c a equação $x(t_0) = x_0$. Isto é, como $x(1) = 2$, então $2 = x(1) = \frac{1}{2} + ce^{-1}$, e assim, $c = \frac{3}{2}e$. Finalmente,

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}ee^{-t^2}.$$

Alternativamente, em vez de usar integral indefinida, podemos obter a solução diretamente usando a integral definida, como descrito abaixo:

$$\int_1^t \frac{d}{ds}(e^{s^2}x(s))'ds = \int_1^t se^{s^2}\;ds \Leftrightarrow$$

$$e^{t^2}\,x(t) - ex(1) = \frac{e^{t^2}}{2} - \frac{e}{2}.$$

Finalmente, como $x(1) = 2$

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{1-t^2}}{2} + 2e^{1-t^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^1e^{-t^2}$$

Sempre que encontramos uma solução $x(t)$, é recomendado checar se a função $x(t)$ encontrada é realmente solução da equação diferencial e se satisfaz a condição inicial.

Vamos portanto testar se a $x(t)$ encontrada é realmente solução. Realmente, para tal $x(t)$

$$x'(t) = \frac{3}{2}(-2t)e^{1-t^2} = -3t\, e^{1-t^2}$$

logo,

$$x' + 2tx = -3t\, e^{1-t^2} + 2t\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{1-t^2}\right) = t.$$

Logo, $x(t)$ satisfaz a equação diferencial. Vamos agora testar a validade da condição inicial.

Ora, $x(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{1-1^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, logo $x(t)$ acima descrito satisfaz $x^{'}(t) + 2tx(t) = t, x(1) = 2$, e é portanto a solução que buscávamos.

Exercícios:

1) Encontre a solução geral $x(t)$ de

a) $x' + x\ \cos t = 0$

b) $x' + \frac{2t}{1+t^2}\, x = \frac{1}{1+t^2}$

c) $x' + t^2\, x = t^2$

2) Determine a solução $x(t)$ da equação diferencial e que também satisfaça a condição inicial dada:

a) $x' + \sqrt{1+t^2}\, x = 0, x(0) = 3$

b) $x' + \sqrt{1+t^2}\, tx = 0, x(0) = 2$

c) $x' + t^2\, x = t^2, x(1) = 5$

d) $x' - 2t\, x = t, x(2) = 1$

d) $x' - 2t\, x = t, x(1) = 2$

3) Mostre que toda solução $x(t)$ da equação $x' + ax = be^{-ct}$ onde $a, c > 0$, $b \in \mathbf{R}$ são constantes, é tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

4) Considere a equação diferencial $x' + a(t)x = b(t)$ onde $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas em $t \in \mathbf{R}$. Generalize o resultado acima mostrando que se existe $c > 0$ tal que $a(t) \geq c$ e $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$, então $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

5) Considere a equação $x' + x = f(t)$ onde $f(t)$ é limitada. Mostre que existe uma única solução $x(t)$ limitada.

I.3 Equações diferenciais separáveis

Definição 5: Uma equação diferencial que pode ser colocada na forma

$$x' = \frac{g(t)}{f(x(t))} = \frac{g(t)}{f(x)}, \qquad (4)$$

onde g e f são funções reais (e f não se anula) é denominada equação diferencial separável.

Esta equação diferencial pode ser expressa também na forma mais conveniente $f(x)x^{'} = g(t)$ (ou seja $f(x(t))x^{'}(t) = g(t)$).

Vamos descrever a seguir como calcular a solução geral de (4).

Seja $F(x)$ a primitiva de $f(x)$ em relação à variável x, isto é, F satisfaz $F(x) = \int f(x)\, dx$ (ou seja, $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$).

Suponha que $x(t)$ é a solução que desejamos encontrar da equação (4).

Pela regra da cadeia, teremos então

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{dF}{dx}(x(t))x^{'}(t) = f(x(t))x^{'}(t) = g(t).$$

A última igualdade vem do fato que assumimos que $x(t)$ é solução de (4).

Logo, $\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}F(x(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$.

Se assumimos $x(t_0) = x_0$, então

$$F(x(t)) - F(x_0) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds.$$

Devemos agora aplicar a função F^{-1} (a inversa de F) à expressão acima para determinar $x(t)$ (nem sempre é fácil encontrar F^{-1}).

Note que $x(t)$ aparece implicitamente e algumas vezes pode ser difícil de obter a expressão explícita de $x(t)$. No entanto, em muitos casos - como veremos a seguir - é possível obter $x(t)$ explícitamente encontrando assim a expressão analítica da solução da equação diferencial (4).

Por exemplo, para o caso

$$x' = \frac{\cos(t)}{x^2}$$

temos que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ e portanto, a equação diferencial nos diz que

$$\frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{x(t)^3}{3} = \frac{dF}{dx}(x(t))x^{'}(t) = x(t)^2 x'(t) = \cos(t).$$

Integrando dos dois lados obtemos

$$F(x(t)) = \frac{x(t)^3}{3} = \text{ sen } (t) + c. \qquad (*)$$

Para calcular a inversa $F^{-1}(y)$ considere $\frac{x^3}{3} = F(x) = y$ e determine x em função de y, ou seja $(3\, y)^{1/3} = x(y) = F^{-1}(y)$.

Aplicando a inversa $F^{-1}(y) = (3\, y)^{1/3}$, a expressão (*) acima obtemos

$$x(t) = (3\, (\text{ sen } (t) + c))^{1/3}.$$

Concluindo, podemos afirmar que quando a equação é separável, a solução $x(t)$ aparece implicitamente na equação (funcional) $F(x(t)) - F(x_0) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$.

Alguns pacotes computacionais, como por exemplo [Ma][MAT][MATL], permitem obter em vários casos a integral indefinida $F(x)$ de uma função dada $f(x)$.

Exemplo 9: Considere a equação diferencial $y' = 1 + y^2$ com a condição inicial $y(0) = 0$.

Esta equação pode ser escrita na forma separável:

$$y' = \frac{1}{\frac{1}{1+y^2}},$$

ou seja, utilizando a notação anterior,

$$f(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad , \quad g(t) = 1$$

Sendo assim, a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{1+y^2} y' = f(y)\, y' = 1,$$

Logo, a primitiva de $f(y)$ é

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(z)\, dz = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{1+z^2} dz = arctg\ y - arctg\ y_0.$$

Logo, para tal F

$$\frac{dF}{dy} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Ora, para tal F

$$\text{arctg } y(t) - \text{arctg } y_0 = F(y(t)) - F(y_0) =$$

$$\int_0^t \frac{d}{ds} F(y(s)) = \int_0^s \frac{dF}{dy}(y(s)) \frac{dy}{ds} ds = \int_0^t f(y(s)) y^{'}(s) ds = \int_0^t g(s) ds.$$

Como no presente caso $g(s) = 1$ e $y_0 = 0$ temos que

$$\int_0^t g(s)\, ds = \int_0^t 1\, ds = t,$$

obtendo assim, portanto, que arctg $y(t) = t$. Concluímos, finalmente, que $y(t) = \text{tang } t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Observação 3: Note o seguinte fato importante: a solução $y(t)$, neste caso não está definida para todo t real. O domínio natural de $y(t)$ no presente caso particular é o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Este fato comprova o que afirmamos antes (após o Teorema 0 na seção I.1):

uma equação diferencial $x^{'} = f(x)$ em que f está bem definido (e é de classe C^{∞}) para todo $x \in \mathbf{R}$, pode existir uma solução que não está definida para todo $t \in \mathbf{R}$.

Exemplo 10: Qualquer equação autônoma $y^{'} = f(y), y \in \mathbf{R}$ é separável, pois pode ser escrita como $y^{'} = \frac{1}{\frac{1}{f(y)}}$, ou seja na forma $\frac{1}{f(y)} y^{'} = 1$. Se $F(y)$ for a primitiva de $\frac{1}{f(y)}$, então a solução $y(t)$ poderá ser obtida implicitamente de $F(y(t)) - F(y_0) = t - t_0$ pois

$$F(y(t)) - F(y(0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} F(y(s)) ds =$$

$$\int_{t_0}^{t} f(y(s)) \frac{d}{ds} y(s) ds = \int_{t_0}^{t} 1 ds = t - t_0.$$

Logo a expressão analítica de $y(t)$ pode ser obtida explicitamente (quando for possível calcular a primitiva F e quando for possível resolver a equação implícita) a partir de $F(y(t)) - F(y_0) = t - t_0$.

Exemplo 11: Calcule a solução $y(t)$ de $\frac{dy}{dt} + y \cos t = 0$.

A equação é separável e pode ser escrita na forma $\frac{y'}{y} = -\cos t$.

Integrando,

$$\int \frac{y'}{y} = -\int \cos t dt$$

Supondo que $y(t)$ é positivo, obtemos, $\log y(t) = -\text{sen}\, t + c$, e portanto, $y(t) = e^{-\text{sen} t} . k, \ k = e^c$.

A conclusão é que, $y(t) = ke^{-\text{sen}\, t}$ é o candidato a solução que buscávamos.

É fácil testar e confirmar que tal $y(t)$ é realmente solução da equação diferencial.

Exemplo 12: Calcular a solução $y(t)$ de $\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2} y = 0, \ \ y(0) = \sqrt{5}$.

A equação acima pode ser escrita como $\int \frac{y'}{y} = -\int \sqrt{1+t^2} dt \Rightarrow \ln |y| = -\int \sqrt{1+t^2} dt$

Vamos a seguir calcular a integral de $\int \sqrt{1+t^2} dt$

Considere a mudança de variável $t = \text{tg}\, u$, logo $dt = \sec^2 u \, du$. Como $\sqrt{1 + \tan^2} = \sec$, então $\int \sqrt{1+t^2} dt = \int \sec(u) \, \sec^2(u) du$.

Faça $g(u) = \sec u$ e $f(u) = \tan u$.

Vamos usar a seguir que $f(u)g(u) = \int (f^{'}(u)g(u) + f(u)g^{'}(u)) du$.

Ora,

$$\int \sec^3(u) \, du = \int \sec(u) \, \sec^2(u) \, du =$$

$$= \sec u \, \text{tg}\, u - \int \sec u \text{tg}^2 \, u \, du =$$

$$= t\sqrt{1+t^2} - \int \sec u (\sec^2 u - 1) \, du =$$

$$= t\sqrt{1+t^2} - \int \sec^3 u\, du + \int \sec u\, du$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\left(t(1+t^2)^{1/2} + \int \sec u\, du\right).$$

Ainda,

$$\int \sec\ u\, du = \int \frac{\sec^2 u + \sec u \mathrm{tg}\, u}{\sec u + \mathrm{tg} u} du = \ln|\sec u + \mathrm{tg} u|$$

e assim,

$$\int \sec^3\, udu = \frac{1}{2}\left(t(1+t^2)^{1/2} + \ln(\sqrt{1+t^2}+t)\right)$$

Logo,

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\left(t(1+t^2)^{1/2} + \ln(\sqrt{1+t^2}+t)\right) + c,$$

e assim,

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}(t(1+t^2)^{1/2} + \ln[(1+t^2)^{1/2}+t]\right).k =$$

$$\frac{k}{\sqrt{(1+t^2)^{1/2}+t}} \exp\left(-\frac{t}{2}(1+t^2)^{1/2}\right)$$

Finalmente, considerando a condição inicial

$$y(0) = \sqrt{5} \quad \text{,e como} \quad y(0) = k \Rightarrow k = \sqrt{5}$$

concluimos finalmente que,

$$y(t) = \frac{\sqrt{5}}{((1+t^2)^{1/2}+t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t}{2}(1+t^2)^{1/2}\right)$$

Vamos apresentar agora um exemplo clássico e interessante de aplicação das equações diferenciais separáveis.

Exemplo 13: Considere uma população inicial de vinte coelhos e vinte coelhas, que vão acasalar em pares e procriar.

Vamos denotar por $p_0 = 40$ a população inicial no tempo inicial t_0, e vamos tentar fazer uma projeção e tentar descrever o número $p(t)$ de coelhos no tempo futuro t, lembrando que os filhos dos coelhos da primeira geração vão tambem se acasalar par a par, gerando novos coelhinhos que também vão se acasalar e assim por diante... Vamos assumir também que cada casal produzirá machos e fêmeas em quantidades iguais.

Podemos supor que o tempo t_0 em que vamos começar a contagem do tempo seja igual a 0.

Vamos denotar Δt a variação do tempo e Δp a correspondente variação do número de coelhos neste período.

Numa variação de tempo Δt os coelhos se reproduzem numa taxa que vamos denotar por a. O valor positivo a descreve a fertilidade da população em exame. Logo, dada uma população p, vão ser produzidos $\Delta p = ap$ novos coelhinhos, isto é após decorridos um tempo $\Delta t = 1$ (1 ano por exemplo), resultará num aumento da população total de $a\,p$ coelhos. Por exemplo, se $a = 3$, então apos o fim do primeiro ano haveria um aumento de $ap_0 = 3.p_0 = 3.40 = 120$ coelhos, e teríamos assim $p(1) = 160$ coelhos. Por sua vez $p(2) = p(1) + ap(1) = 640$ coelhos e assim por diante...

Como vamos considerar uma variação de tempo unitária (um ano), teremos que $\Delta t = (t+1) - t = 1$ e $\Delta p = p(t+1) - p(t)$.

Logo, como $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ é avariação de coelhos no tempo Δt, obtemos a equação de diferenças

$$\frac{p(t+1) - p(t)}{(t+1) - t} = \frac{p(t+1) - p(t)}{1} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = a\,p,$$

onde a é o coeficiente de reprodução dos coelhos, com a condição inicial $p(t_0) = p_0$. Sendo assim a equação acima, nos permite supor (supondo que a variação de um ano é muito pequena frente ao tempo total que vamos considerar) que a evolução do crescimento populacional deve satisfazer aproximadamente a equação

$$p' = ap,$$

com a condição inicial $p(t_0) = p_0$.

O procedimento acima (usualmente utilizado na modelagem de problemas da Natureza) foi em essencia aquele de passar de uma equação de diferenças (tempo discreto) para a correspondente equação diferencial (tempo contínuo). A solução $p(t)$, $t \in \mathbf{R}$, que obteremos desta maneira, será muito próxima da solução real do problema (com tempo discreto).

A solução da equação linear acima como sabemos é

$$p(t) = e^{at}\frac{p_0}{e^{at_0}}.$$

Portanto, se desejarmos saber aproximadamente quantos coelhos existirão daqui a 10 anos considerando $t_0 = 0$ obteremos $p(10) = e^{a10}40$.

Se $a = 3$ então $p(t) = e^{30}40$.

Neste caso, é fácil ver também que quando $t \to \infty$ a população total $p(t) \to \infty$.

O raciocínio acima desenvolvido pode ser aplicado - em termos aproximados - para o crescimento da população de seres humanos sobre a face da terra. Por isto é que se diz que o crescimento da população humana é muito rápido pois ele é do tipo exponencial no tempo $p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}$.

Considere um outro problema real em que tenhamos dados da população de um país ou um estado em um certo período de tempo, e desejamos fazer uma previsão da população em um tempo futuro. Primeiro devemos estimar o valor a. Este valor a pode ser obtido em valor aproximado pelo método dos mínimos quadrados.

O modelo desenvolvido acima não é válido nas condições naturais de vida de uma população sujeita à competição entre espécies, ou quando os recursos disponíveis não permitem atender uma população arbitrariamente grande. Para se obter um modêlo mais realista, necessitamos introduzir no modêlo um novo parâmetro correspondente a competição.

Por razões que não cabem analisar aqui, é natural supor que existe um fator inibidor (em geral devido a competição) da taxa de crescimento da população da forma $-b\,p^2 < 0$. O valor positivo b determina a intensidade da competição. Sendo assim, a equação que rege uma população sujeita a competição é

$$p' = ap - bp^2$$

e esta equação pode ser escrita na forma separável

$$p^{'} = \frac{1}{\frac{1}{ap-bp^2}}, \qquad p(t_0) = p_0,$$

isto é

$$\frac{1}{ap - bp^2} p^{'} = 1. \qquad (5)$$

Vamos tentar calcular a solução $p(t)$ para poder fazer uma previsão do crescimento populacional com competição que no tempo t_0 é igual a p_0. Note que a equação (5) é separável.

Desejamos escrever (por razões que vão ficar esclarecidas a seguir), $\frac{1}{ap-bp^2}$ na forma

$$\frac{1}{ap - bp^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{a - bp},$$

onde A e B são constantes reais.

Ora, se para todo p vale que

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{a - bp} = \frac{Aa + (B - bA)p}{p(a - bp)} = \frac{1}{p(a - bp)} = \frac{1}{ap - bp^2} \Leftrightarrow$$

$$Aa = 1,\ (B - bA) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{a},\ B = \frac{b}{a}$$

Sendo assim,

$$\frac{1}{ap - bp^2} = \frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a - bp)}.$$

Logo, de (5) obtemos a equação

$$\frac{p^{'}}{ap-bp^2} = \frac{p^{'}}{ap} + \frac{b}{a(a-bp)}p' = 1$$

e portanto,

$$\frac{1}{a}\int_{t_0}^{t}\frac{p^{'}}{p}ds - \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t}\frac{-b\,p'}{a-bp}ds = \int_{t_0}^{t} ds, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{1}{a}(\log|p(t)| - \log|p_0|) - \frac{1}{a}(\log|a-bp(t)| - \log|a-bp_0|) = t - t_0.$$

Agora deve ter ficado claro ao leitor porque escrever $\frac{1}{ap-bp^2}$ da forma acima (podemos usar a derivada do logaritmo desta maneira).

Logo,

$$\frac{1}{a}\left(\log\frac{|p(t)|}{|a-bp|} - \log\frac{|p_0|}{|a-bp_0)|}\right) = t - t_0$$

e assim,

$$\log\frac{|p(t)|}{|a-bp(t)|} = (t-t_0)a + \log\frac{|p_0|}{|a-bp_0|}$$

ou seja

$$\frac{p(t)}{a-bp(t)} = e^{(t-t_0)a}.\frac{p_0}{a-bp_0}$$

$$p(t) = a\,e^{(t-t_0)a}\frac{p_0}{a-bp_0} - \frac{b\,p_0}{a-bp_0}p(t)e^{(t-t_0)a}.$$

Finalmente obtemos a solução

$$p(t) = ae^{(t-t_0)a}\frac{p_0}{a-bp_0}\cdot\frac{a-bp_0\,e^{-(t-t_0)a}}{(a-bp_0)e^{-(t-t_0)a}(a-bp_0)e^{(t-t_0)a}+bp_0} \Rightarrow$$

$$p(t) = \frac{ap_0}{(a-bp_0)e^{-(t-t_0)a}+bp_0} \qquad (6)$$

e portanto como a é positivo

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \frac{ax_0}{bx_0} = \frac{a}{b},$$

independente do número inicial de coelhos p_0 e do tempo t_0 em que se iniciou a contagem dos coelhos. Este valor $\frac{a}{b}$ determina o número de coelhos que o ambiente em consideração comporta.

Note que o valor limite a/b independe da solução $p(t)$ (ou seja da condição inicial dada) considerada.

Dado um exemplo de crescimento populacional oriundo de uma observação da Natureza (a população de um país, uma população de peixes numa certa região, etc..), e no qual sabemos existir um fator de competição, é possível estimar a e b através do método dos mínimos quadrados (de maneira similar ao considerado anteriormente), e assim fazer previsões da população $p(t)$ para um tempo futuro t utilizando a expressão (6). Vamos ter agora que maximizar uma função $G(a, b)$ de duas variáveis (a, b) em função de dados coletados t_i, x_i obtidos no passado.

No caso específico do crescimento populacional da terra, estes valores $a = 0.029$ e $b = 2.941 \times 10^{-12}$ foram estimados com bastante precisão e os dados reais se adaptam com incrível precisão aos dados previstos pelo modelo. Sendo assim, se pode fazer previsões bastante realistas da população da terra nos próximos anos.

O valor limite de uma solução qualquer $p(t)$ do problema populacional com competição no caso da terra, é dado por $a/b = 9.86$ bilhões de pessoas.

ANO	p população observada	p calculada via formula
1790	3.9	3.9
1800	5.3	5.2
1810	7.2	7.2
1820	9.6	9.8
1830	12.9	13.1
1840	17.1	17.5
1850	23.2	23.2
1860	31.4	30.4
1870	38.6	39.4
1880	50.2	50.2
1890	62.9	62.8
1900	76	76.9
1910	92	92
1920	106.5	109.4
1930	123.2	123.9

Tabela 1.
População dos EUA em milhões de habitantes de 1790-1930

Mostramos na tabela 1 dados da evolução ao longo dos anos da população dos EUA. A partir dos dados colhidos (ver coluna da esquerda) pode estimar-se a e b na fórmula (6) pelo método dos mínimos quadrados. Obtem-se assim uma função $p(t)$ cujos valores (como se pode observar na coluna da direita da tabela) estão bem próximos dos valores observados ao longo dos anos (colocados na coluna da esquerda). Isto permite fazer uma boa previsão da população americana nos próximos anos utilizando tal $p(t)$ obtida a partir dos dados anteriores.

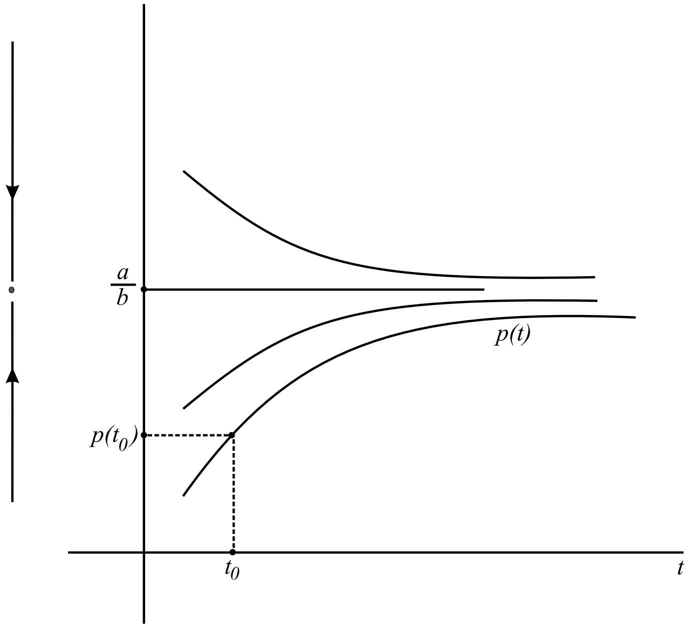

Figura 1.2:

Definição 6: Dizemos que $x_0 \in \mathbf{R}$ é um ponto atrator para a equação diferencial autônoma $x' = f(x)$ se para qualquer t_0 e x_1 próximo de x_0, a solução $x(t)$ que satisfaz $x(t_0) = x_1$ está definida para todo o valor t real positivo e $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$.

Existem definições mais gerais de atrator (ver [DL]), mas esta nos basta no momento.

Como podemos comprovar pelo que foi descrito acima, o valor $x_0 = \frac{a}{b}$ é um atrator para a equação diferencial $x' = ax - bx^2$ considerada neste exemplo. Destacamos aqui que se observarmos uma solução $p(t)$ qualquer (independente do tempo e da condição inicial) do sistema populacional acima analisado, após um período muito grande de tempo, o valor da população $p(t)$ terá um valor de aproximadamente igual a $x_0 = \frac{a}{b}$ (ver figura 2)

Note que o modelo populacional em que assuminos competição permite uma melhor aproximação da "realidade"do que o modelo anterior (sem competição). Já foi dito por alguém no passado que: "um modêlo é sempre uma mentira, mas é uma mentira generosa que nos permite entender aproximadamente a realidade". Quanto mais sofisticado for o modêlo, levando em conta mais e mais fatores, mais próximo da realidade nos encontraremos.

Vamos considerar ao fim desta seção de maneira mais geral os pontos atratores de uma equação diferencial.

Antes disto vamos considerar mais alguns exemplos de equações separáveis.

Exemplo 14: Calcule a solução $y(t)$ de $(1+t^2)\frac{dy}{dt} = 1+y^2$.

Ora, $\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$, logo

$\int \frac{1}{1+y^2} y'(t)dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt$, e assim, $\operatorname{arctg} y(t) = \operatorname{arctg} t + c$, finalmente, $y(t) = \frac{t+\operatorname{tg} c)}{1-t\operatorname{tg} c} = \frac{t+k}{1-kt}$

Acima usamos o fato que $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

Exemplo 15: Encontre a solução $y(t)$ da equação $t^2(1+y^2) + 2y\frac{dy}{dt} = 0$, $y(0) = 1$ e determine o domínio natural de definição da solução.

Ora, $2y\,y'(t) = -t^2(1+y^2)$,

$\frac{2y}{1+y^2} y'(t) = -t^2$,

$\ln|1+y^2| = -\frac{t^3}{3} + k$,

$1 + y^2 = e^{-\frac{t^3}{3}}\, e^k$,

logo,

$y(t) = \left(c\, e^{-\frac{t^3}{3}} - 1\right)^{1/2}$,

Levando em conta a condição inicial obtemos

$$1 = y(0) = \left(c\, e^{-\frac{0^3}{3}} - 1\right)^{1/2},$$

então $1 = c - 1$, logo $c = 2$ e assim

$$y(t) = \left(2\, e^{-\frac{t^3}{3}} - 1\right)^{1/2},$$

logo a solução $y(t)$ existe $\forall\, t \in (-\infty, \log 8)$.

Finalmente gostaríamos de descrever brevemente um tópico muito importante: estados de equilíbrio.

Definição 6': Dada a equação diferencial de primeira ordem $x' = f(x)$, onde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio para f se $f(x_0) = 0$.

A solução de $x' = f(x), x(t_0) = x_0$ é $x(t) = x_0$ para todo t, porque para tal $x(t)$ temos $x'(t) = 0 = f(x(t))$.

No exemplo do modelo populacional acima consideramos $f(x) = ax - bx^2$ e assim $x_0 = a/b$ é ponto de equilíbrio para tal f.

Referimos o leitor a [KG] para uma série de exemplos interessantes de aplicações sobre pontos de equilíbrio em areas distintas como: biologia, física, engenharia, economia, etc...

Uma pergunta natural é se no caso geral x_0 vai ser ou não um atrator no sentido que foi descrito acima. Se x_0 for um atrator, a figura que descreve o comportamento de outras soluções $y(t)$ de $x' = f(x), x(t_0) = x_1$, onde x_1 está próximo de x_0 é similar ao que descreve a figura 1.2. Neste sentido o equilíbrio é estável, pois o valor de $y(t)$, quando t vai a infinito, converge a x_0.

É possível que x_0 seja de equilíbrio, mas x_0 não seja um atrator.

Se estamos procurando num modelo do mundo real (regido por uma equação diferencial $x' = f(x)$) posições estáticas, ou seja pontos de equilíbrio x_0 para f, muitas vezes, estamos interessados apenas naqueles equilíbrios que são estáveis, ou seja os x_0 que são atratores.

Por exemplo, se estamos procurando soluções estáticas para o modelo populacional $x' = ax - bx^2$, não precisaríamos resolver nenhuma equação diferencial, bastaria resolver $f(x) = 0$. Neste caso encontraríamos os valores a/b e 0. Estes dois valores são de equilí´brio. Intuitivamente pela figura 1.2 vemos que 0 não é de equilí´brio estável. Como checar isto de maneira prática? Vamos elaborar sobre isto a seguir.

Outro exemplo, num pêndulo com atrito, a solução com o pêndulo parado na posição para baixo é estável. O pêndulo com a posição vertical para cima também é de equilíbrio, mas claramente não é estável (não é atrator de soluções com condições iniciais próximas). Ninguém jamais entrou num laboratório e encontrou um pêndulo com a posição vertical para cima. Isto porque qualquer pequena perturbação vai tirá-lo da posição de equlíbrio.

Para determinar se um ponto de equilíbrio x_0 para f é atrator, podemos usar o seguinte critério: se $f'(x_0) < 0$ então x_0 e atrator.

A razão de ser desta afirmação é bastante simples e pode ser ilustrada pelas figura 1.3. Se $f'(x_0) < 0$ então os valores de f a esquerda de x_0 são positivos (os vetores unidimensionais $f(x)$ apontam para a direita) e os valores de f a direita de x_0 são negativos (os vetores unidimensionais $f(x)$ apontam para a esquerda). Isto faz com que neste caso, as soluções $y(t)$ próximas (ou seja associada a condição inicial x_1 próximas de x_0) tenham que convergir a x_0.

Note que se $f'(x_0) < 0$ então o ponto x_0 não será atrator (ver figura 1.4).

Sendo assim, se estamos procurando soluções estáticas estáveis para o modelo populacional $x' = ax - bx^2$, não precisaríamos resolver nenhuma equação diferencial, bastaria resolver encontrar os x_0 tal que $f(x_0) = 0$ e a seguir testar quais dos x_0 satisfaz $f'(x_0) < 0$. No caso em que $f'(x_0) > 0$ o equilíbrio não é estável. Se $f'(x_0) = 0$, a priori, nada se pode dizer.

Por exemplo, no caso $f(x) = ax - bx^2$, o valor $f'(0) = a > 0$, logo 0 é de equilíbrio mas não é atrator.

O exemplo populacional acima ilustra o que acontece na situação geral de uma equação diferencial $x' = f(x)$ e seus pontos de equilíbrios x_0.

Outro exemplo: em problemas de química envolvendo autocatálise (em que tripsogênio é transformado em tripsina), aparece de maneira natural a equação diferencial

$$x' = r(y_0 + x)(B - x) = f(x),$$

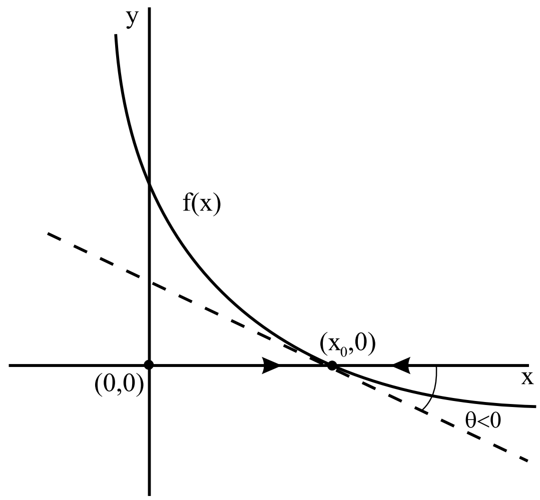

Figura 1.3:

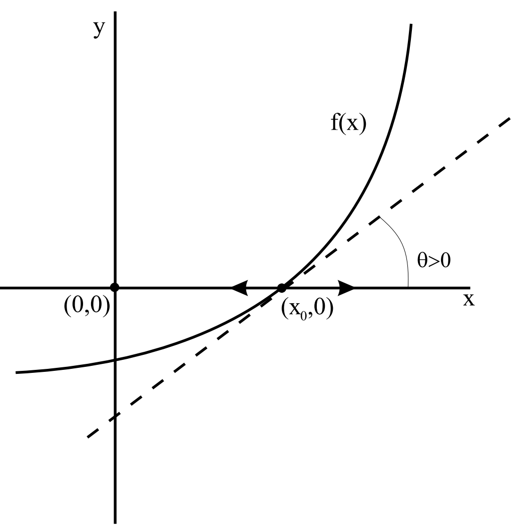

Figura 1.4:

onde $x(t)$ descreve a concentração de tripsina na reação e onde r, B, y_0 são constantes positivas (ver [Ba] seção 11.5).

Os pontos de equilíbrio são B e $-y_0$. O ponto B é atrator pois neste caso $f'(B) < 0$ e $-y_0$ não, pois $f'(-y_0) > 0$. Logo, neste caso, a concentração de tripsina na reação, dada por $x(t)$, independente da condição inicial próxima, converge a B. Na verdade é possível mostrar que tal acontece para qualquer solução com qualquer condição inicial positiva.

Não houve neste caso necessidade de calcular a solução da equação diferencial para saber o comportamento limite de uma solução qualquer.

Exercícios:

1) Encontre a solução geral $x(t)$ de
a) $x' = (1+x)(1+t)$
b) $\cos x \,\mathrm{sen}\, t\, x' = \cos t \,\mathrm{sen} x$
c) $x' = e^{t+x+5}$
d) $(1+t^2)x' = 1+x^2$ (sugestão: use que $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$)
2) Encontre a solução $x(t)$ da equação diferencial e que também satisfaça a condição inicial:
a) $x' = (1+x)(1+t)$, $x(1) = 1$
b) $t^2(1+x^2) + 2xx' = 0$, $x(0) = 1$
c) $x' = \frac{5t}{x+t^2x}, x(1) = 3$
d) $x' = (3-x)(2-x), x(0) = 0$
e) $7tx' = x\cos t, x(1) = 0$

I.4 Equações diferenciais exatas

Vamos agora analisar o caso geral de uma equação diferencial de primeira ordem $y' = f(t,y)$, que pode ser também escrita alternativamente como $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ (tome por exemplo $M(t,y) = -f(t,y)$ e $N(t,y) = 1$). Usaremos esta notação com M e N que como veremos a seguir é mais conveniente.

Vamos dar um exemplo. Considere a equação

$$y(t)^2 - ty(t) - t^2 = 0,$$

a qual não é uma equação diferencial e que já sabemos resolver pela fórmula de Báscara:

$$y(t) = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4t^2}}{2}.$$

Derivando a expressão $y(t)^2 - ty(t) - t^2 = 0$ obtemos a equação

$$2yy' - ty' - y - 2t = 0,$$

que pode ser escrita na forma $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ onde $M(t,y) = -y - 2t$ e $N(t,y) = 2y - t$.

A equação diferencial acima na verdade não deveria ser classificada com tal em função de que se trata de um problema envolvendo apenas equações algébricas como vimos.

Uma série de exemplos de equação diferencial seguem o figurino acima e o estudo das equações diferenciais exatas é a tentativa de identificá-los.

Pergunta: dada a equação diferencial $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ será que podemos encontrar implicitamente a solução $y(t)$ na forma $\phi(t, y(t)) = c$, onde c é uma constante? Se isto fosse possível, poderíamos então afirmar que a equação $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ possui soluções que podem ser obtidas implicitamente à partir de ϕ, o que generalizaria o que foi descrito anteriormente quando analisamos as equações separáveis. Vamos mostrar a seguir que muitas vezes não poderemos encontrar soluções implicitamente de equações do tipo $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$. Isto não significa que não existirá solução apenas que não se consegue obter a solução $y(t)$ de maneira implícita $\phi(t, y(t)) = c$. O Teorema 0. (de Existência e Unicidade) de soluções de equações diferenciais ordinárias assegura que existe sempre solução $y(t)$ se M, N forem de classe C^1.

Suponha que $y(t)$ possa ser obtida implicitamente através de

$$\phi(t, y(t)) = c.$$

Derivando a expressão acima obtemos a equação diferencial: $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$.

Logo, $M + Ny' = 0$ pode ser escrita na forma $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, se e somente se, existe ϕ tal que $\frac{\partial\phi}{\partial t} = M, \frac{\partial\phi}{\partial y} = N$ (isto é, (M, N) é o gradiente de uma função ϕ)

Se por acaso vale que $\frac{\partial\phi}{\partial t} = M(t,y)$ e $\frac{\partial\phi}{\partial y} = N(t,y)$, então conseguiremos de fato, como veremos a seguir, obter $y(t)$ implicitamente. Na maioria dos casos, no entanto, tal fato $\frac{\partial\phi}{\partial t} = M(t,y)$ e $\frac{\partial\phi}{\partial y} = N(t,y)$ não vai ocorrer.

A seguir vamos tentar descobrir quando que existe ϕ tal que $M + Ny' = 0$ é equivalente à $\frac{d}{dt}\phi(t, y(t)) = 0$.

Teorema 1: Seja $v\colon (a,b) \times (c,d) \to \mathbf{R^2}$, de classe C^1. Então $v(t,x) = (M(t,x), N(t,x))$ é gradiente, isto é, $\exists\, f(x,t)$ tq $\nabla f = v$, $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, se e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Demonstração:

Suponha, que v seja do tipo gradiente $v = \nabla f$, então como as derivadas parciais mistas de f comutam, isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x},$$

então
$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Fica assim demonstrado um dos lados da equivalência afirmada pelo Teorema.

Suponha agora que
$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t},$$

ou seja que
$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

O teorema de Green (ver [SW]) afirma que se A é um aberto contido em $[a,b]\times[c,d]$ cujo bordo é uma curva diferenciável fechada sem autointerseção $\beta = \partial A$ (a fronteira de A), então

$$\int_{\partial A} (Mdt + Ndx) = \int_A (\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}) dt dx.$$

A curva $\beta(t)$, $t \in (a,b)$, tal que $\beta(a) = \beta(b)$ é parametrizada no sentido anti-horário.

Segue deste resultado que sob a hipótese $(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}) = 0$, então para todo $z_0 \in (a,b)\times(c,d)$ fixo e z variável em $(a,b)\times(c,d)$, a integral de linha $\int_\gamma (Mdt + Ndx)$ através de uma curva qualquer γ contida em $(a,b)\times(c,d)$ ligando z_0 a z, independe do caminho γ. Estamos usando acima o fato que $(a,b)\times(c,d)$ é simplesmente conexo, ou seja que não tem buracos (ver [SW] ou [Li2]).

Fixando um certo ponto $z_0 \in (a,b)\times(c,d)$, podemos definir assim uma função $f(z)$ através da integral de linha

$$f(z) = \int_\gamma Mdt + Ndx$$

onde $\gamma(t), t \in (t_1, t_2)$ é uma curva qualquer contida em $(a,b)\times(c,d)$ e ligando os pontos $z_0 = \gamma(t_1)$ e $z = \gamma(t_2)$.

Vamos mostrar que tal f satisfaz $\nabla f = (M,N) = v$. O Teorema segue então da próxima proposição.

Proposição 2 : Seja F campo vetorial no plano, $F = (F_1, F_2)$, $F_i : B \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$, definindo em aberto B conexo. Se a integral $\int_\gamma F$ independe do caminho, então

$$V(z) = V(x_1, x_2) = \int_{z_0}^{z} F_1 dx_1 + F_2 dx_2$$

satisfaz
$$\nabla V(z) = F(z).$$

Demonstração: Como a integral curvilínea, por hipótese, não depende do caminho, fica bem definido

$$V(z+tu) - V(z) = \int_{z_0}^{z+tu} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 - \int_{z_0}^{z} F_1 dx_1 + F_2 dx_2$$

onde escrevemos apenas o ponto inicial e final dos caminhos (e não à curva particular que tomamos unindo os dois pontos). Denote $z = (x_1, x_2)$ e $u = (u_1, u_2)$.

Escolha agora o seguinte caminho que será adequado para os nossos propósitos: de z_0 a z ligue por uma curva γ, agora para ligar x_0 a $x + tu$, use primeiro o mesmo caminho γ de antes, e depois conecte z a $z + tu$ através de um caminho linear

$$z + su = (x_1 + su_1, x_2 + su_2),\ 0 < s < t.$$

Logo

$$V(z+tu) - V(z) = \int_{z}^{z+tu} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 =$$

$$= \int_0^t F_1(x_1 + su_1, x_2 + su_2)u_1 + F_2(x_1 + su_1, x_2 + su_2)u_2 ds$$

Agora, fazendo $u = (1, 0) = e_1$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \lim_{t \to 0} \frac{V(x + te_1) - V(x)}{t} = \frac{\int_0^t F_1(x_1 + s, x_2) 1 ds}{t}$$

Sabemos agora do Cálculo à uma variável que dado t existe $\varepsilon \in (0, t)$ tal que

$$\int_0^t F_1(x_1 + s, x_2) ds = t F_1(x_1 + \varepsilon, x_2).$$

Dividindo a última expressão por t, e tomando o limite quando t tende a zero, obtemos

$$\frac{F_1(x_1 + \varepsilon, x_2)t}{t} \to F_1(x_1, x_2).$$

Sendo assim

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = F_1(x_1, x_2).$$

Para a demonstração de que

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = F_2(x_1, x_2),$$

basta proceder de maneira similar tomando acima $u = (0, 1)$.

Com este último lema, fica demonstrado o que afirmamos no teorema.

Exemplo 16: Dada a equação $t^2y + (\text{sen t})\, y^3y' = 0$ será que existe ϕ tal que para toda solução $y(t)$ vale que

$$\phi(t, y(t)) = c$$

Neste caso devemos perguntar se é válido

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = t^2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = y^3\text{sen} \quad \text{t}\,?$$

Ora, como neste caso $M(t, y) = t^2$ e $N(t, y) = y^3$sen t, então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = t^2 \neq \frac{\partial N}{\partial t} = y^3 \cos t$$

então, segue do teorema anterior que não existe tal ϕ e assim as soluções $y(t)$ não podem ser obtidas implicitamente através de $\phi(t, y(t)) = c$.

Vamos apresentar um critério prático para obter a função $\phi(t, x)$.

Lema 3: Suponha agora que $M(t, y), N(t, y)$, $t \in (a, b), y \in (c, d)$, são tais que $\nabla\phi = (M, N)$, então pode-se explicitar ϕ como

$$\phi(t, y) = \int M(t, y)dt + \int \left[N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dt\right] dy.$$

Demonstração: Ora, a expressão $M(t, y) = \frac{\partial \phi}{\partial t}$, determina por integração na variável t a função $\phi(t, y)$ a menos de uma função de y apenas, isto é,

$$\phi(t, y) = \int M(t, y)dt + h(y). \qquad (7)$$

Como determinar $h(y)$?

Derivando dos dois lados da última expressão em relação à y obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(t, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(t, y)dt + h^{'}(y)$$

ou seja,

$$N = \frac{\partial}{\partial y}\int M(t, y)dt + h^{'}(y) = \int \frac{\partial}{\partial y} M(t, y)dt + h^{'}(y).$$

Integrando em relação a y , obtemos

$$h(y) = \int N dy - \int\int \frac{\partial M}{\partial y} dt dy.$$

Finalmente, de (7) obtemos

$$\phi(t,y) = \int M(t,y)dt + \int \left[N(t,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dt \right] dy. \qquad (8)$$

fica assim demonstrado o lema.

Vamos mostrar um exemplo de como obter $\phi(t,y)$ quando possível. Seja $(M,N) = (3t^2 + y, t + y^3)$. Note que $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial t}$.

$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M = 3t^2 + y$, então existe $h(y)$ tal que $\phi(t,y) = t^3 + yt + h(y)$.

Devemos a seguir determinar quem é $h(y)$

Como $N = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

$$t + y^3 = N(t,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = t + h'(y) \Rightarrow h'(y) = y^3 \Rightarrow h(y) = \frac{1}{4} y^4 + c$$

Logo, $\phi(t,y) = t^3 + yt + \frac{1}{4} y^4 + c$.

O leitor pode testar agora que realmente tal ϕ satisfaz o que desejamos.

Exemplo 17: Considere a equação diferencial $M + Ny' = (3y + e^t) + (3t + \cos y)\frac{dy}{dt} = 0$.

Note que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Pelo último Teorema, podemos afirmar que existe ϕ tal que $\nabla \phi = (M,N)$ e que portanto determina as soluções $y(t)$ implicitamente através de $\phi(t, y(t)) = c$.

Isto porque derivando $\phi(t, y(t)) = c$ obtemos

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = M + Ny'.$$

Vamos determinar ϕ a seguir. Podemos usar a expressão (8) diretamente, mas é mais prático como veremos a seguir fazer o desenvolvimento seguido no último lema.

Se $\frac{\partial \phi}{\partial t} = M = 3y + e^t$, então existe $h(y)$ tal que $\phi(t,y) = 3yt + e^t + h(y)$.

Como obter $h(y)$?

Agora vamos derivar $\phi(t,y)$ em relação à y.

Como $N = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

$$3t + \cos y = N(t,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3t + h'(y) \Rightarrow h'(y) = \cos y \Rightarrow h(y) = \text{sen} y$$

Logo,

$$\phi(t,y) = 3yt + e^t + \text{sen} y.$$

Fica assim determinado a $\phi(t,y) = 3yt + e^t + \text{sen}y$, tal que toda $y(t)$ solução de $(3y + e^t) + (3t + \cos y)\frac{dy}{dt} = 0$ pode ser, em princípio, obtido implicitamente como $\phi(t, y(t)) = c$.

Dada a condição inicial $y(1) = 2$, temos então que $\phi(t, y(t)) = 3y(t)\,t + e^t + \text{sen}(y(t)) = c$, deve determinar $y(t)$ implicitamente. Quem é c neste caso? Ora, $c = 3y(1)\,1 + e^1 + \text{sen}(y(1)) = 3\ 2\ 1 + e^1 + \text{sen}2$, e assim determinamos c.

Logo a solução $y(t)$, com a condição inicial $y(1) = 2$, é determinada implicitamente por

$$3\ y(t)\ t + e^t + \text{sen}(y(t)) = 6 + e^1 + \text{sen}2.$$

No presente caso não é fácil encontrar $y(t)$ implicitamente. Suponha que desejamos encontrar o valor $y(5)$.

Devemos então resolver a equação

$$3\ y(5)\ 5 + e^5 + \text{sen}(y(5)) = 6 + e^1 + \text{sen}2,$$

ou seja encontrar $y \in \mathbf{R}$ tal que

$$15\ y + e^5 + \text{sen}y = 6 + e^1 + \text{sen}2.$$

Para encontrar a solução y devemos utilizar algum pacote computacional, como por exemplo [MA][MAT][MATL], obtendo assim uma solução aproximada y da equação acima. Desta maneira podemos obter o valor $y(5)$ do problema acima colocado. Não há necessidade de utilizar tais pacotes no momento, estamos apenas dando uma indicação ao leitor sobre como proceder para resolver tais tipos de problemas.

Um caso em que a solução $y(t)$ pode ser obtida explicitamente é o seguinte: $y + (2y + t)y' = 0$.

É fácil ver que neste caso $\phi(t, y) = y^2 + ty$, logo, $y(t)$ pode ser obtido implicitamente, em princípio, por $\phi(t, y(t)) = y(t)^2 + ty(t) = c$.

Supondo a condição inicial $y(1) = 2$, obtemos, similarmente como acima, que $c = 6$.

Para encontrar $y(t)$ a partir de $\phi(t, y(t)) = y(t)^2 + ty(t) = 6$, ou seja $y(t)^2 + ty(t) - 6 = 0$, podemos usar a fórmula de Báscara, determinando

$$y(t) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 24}}{2}$$

ou

$$y(t) = \frac{-t - \sqrt{t^2 + 24}}{2}.$$

A escolha de uma das duas acima vai se fazer em função da condição inicial. Quando $t = 1$ temos $y(1) = 2$, e então

$$y(t) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 24}}{2}$$

é a solução que buscávamos.

Definição 7: Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que pode ser posta na forma $M(t,y)+N(t,y)y^{'}=0$, em que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t},$$

é denominada de equação diferencial exata.

O resultado que demonstramos acima afirma que as equações diferenciais exatas são exatamente aquelas em que as todas as soluções $y(t)$ podem ser obtidas implicitamente.

Nem todas as equações diferenciais ordinárias são exatas (ver exemplo 16). Pode-se mostrar que a maioria das equações diferenciais não podem ser obtidas através de equações implícitas. Em outras palavras, a maioria (não vamos aqui explicitar exatamente o que entendemos por "maioria"mas é possível dar um sentido matemático exato a tal conceito) das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não são exatas. Este resultado que não será demonstrado aqui, pois está acima do escopo deste texto que pretende apresentar apenas resultados elementares de equações diferenciais (ver [DL] para referências).

O resultado acima não significa que para a maioria das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem $x^{'}=f(t,y)$ não existem soluções $y(t)$, apenas afirma que não podemos muitas vezes explicitar analiticamente tais soluções. Este fato vai justificar a teoria desenvolvida em [DL][HS] onde se obtem vários resultados interessantes para equações diferenciais ordinárias mesmo que não se possa em alguns casos resolvê-las.

Vamos apresentar agora alguns exemplos em que as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que obteremos não recaem em nenhum dos casos anteriores. Para cada caso deveremos desenvolver um método especial para resolver a equação diferencial.

Uma maneira de tentar resolver equações diferenciais de primeira ordem é o assim chamado método de mudança de variáveis (ver [Sw][Li1]). Algumas vezes para resolver $x'(t)=f(x(t))$ podemos nos valer do fato que sabemos resolver uma outra equação $y'(t)=g(y(t))$.

Vamos explicar com mais detalhes: seja $h(x)=y$ uma aplicação diferenciável bijetiva e tal que sua inversa também seja diferenciável (tal função é denominada difeomorfismo). Esta h vai fazer o papel de uma mudança de coordenadas da variável x para a variável y. Pela regra da cadeia temos

$$y'(t)=\frac{dh}{dx}(x(t))x'(t)$$

e de $x(t)=h^{-1}(y(t))$ obtemos

$$x'(t)=\frac{dh^{-1}}{dy}(y(t))y'(t).$$

Desejamos encontrar $x(t)$ solução de $x' = f(x)$.

Dada a equação $x'(t) = f(x)$, considere uma hipotética solução $x(t)$. Se fizermos a mudança de coordenadas $y(t) = h(x(t))$ é possível que a nova equação equivalente, dada por $y' = g(y)$ nas coordenadas y, seja tal que já são conhecidas as soluções $y(t)$. Assim, através de $x(t) = h^{-1}(y(t))$ obtemos a solução $x(t)$ desejada de $x' = f(x)$.

A idéia é transformar toda informação da equação em x e x' para uma equação apenas em y em y', e ai resolver a equação (estamos supondo que sabemos resolver o problema em y).

Em algumas situações podemos resolver equações diferenciais deste modo como veremos a seguir. É necessário um exemplo para ilustrar o que estamos dizendo.

Como exemplo, suponha que desejamos resolver

$$x' = \frac{x^3 + a}{3x^2}.$$

Considere a mudança de coordenadas $h(x) = x^3 = y$.

Portanto, temos que $y(t)$ e $x(t)$ estão relacionados por $y' = 3x^2 x'$. Ou seja, $x' = \frac{y'}{3x^2}$.

Ora como $x^3 = y$, se $x(t)$ for solução de $x' = \frac{x^3+a}{3x^2}$ temos que $y(t) = h(x(t))$ (ou seja $y(t) = x(t)^3$) satisfaz

$$\frac{y'}{3x^2} = x' = \frac{x^3 + a}{3x^2} = \frac{y + a}{3x^2}.$$

Isto é, $y(t)$ satisfaz

$$\frac{y'}{3x^2} = \frac{y + a}{3x^2}.$$

Ou seja, se $x(t)$ não se anula, $y(t)$ satisfaz $y' = y + a$.

Então $y(t)$ deve ser da forma $y(t) = ce^t - a$ conforme descobrimos anteriormente quando analisamos a equação $y' = y + a$.

Agora, a partir disto, utilizando $x(t) = h^{-1}(y(t))$, podemos voltar as coordenadas x através de $x = y^{1/3} = h^{-1}(y)$, obtendo assim que a solução $x(t)$ de $x' = \frac{x^3+a}{3x^2}$ é dada por

$$x(t) = (ce^t - a)^{1/3} = h^{-1}(y(t)).$$

Em geral, quando consideramos outras equações diferenciais da forma $x' = f(x)$, o problema que surge na aplicação do método descrito acima advém do fato que não temos uma boa maneira de descobrir qual h vai colocar a equação diferencial em x numa outra na qual já sabemos resolver numa nova coordenada y. Para sistemas lineares em $\mathbf{R^n}$ existe no entanto um método que funciona bem e que é analisado em [HS] e [S].

Vamos analisar agora outros exemplos distintos.

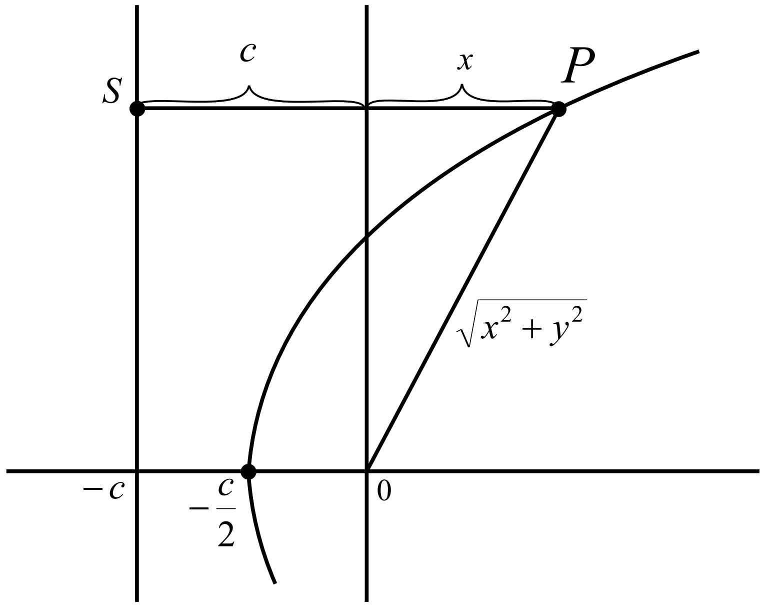

Figura 1.5:

Exemplo 18: Espelho parabólico.

Consideremos o problema de determinar a forma que deve ter um espelho para que os raios emitidos por uma fonte luminosa pontual, ao serem refletidos pelo espelho, saiam todos paralelos. Esta propriedade é muito importante para que um sinal emitido possa ser captado a grande distância. Saindo paralelos, os raios não se dispersam e tendem a manter a intensidade do sinal.

Um raio de luz ao refletir, faz um ângulo com a normal à superfície que é igual ao ângulo de incidência.

O raio incidente e o refletido determinam um plano. Considerando o plano que passa por estes raios e sua interseção com a superfície do espelho podemos considerar que o problema está num plano. Vamos mostrar que a curva determinada por esta interseção deve ser uma parábola (ver figura 1.5). Finalmente, podemos concluir que a forma do espelho será a superfície determinada pela revolução de uma parábola.

Vamos estudar a seção do espelho por este plano passando pela fonte. Colocamos neste plano um sistema de coordenadas com a origem na fonte e o eixo dos X paralelo aos raios refletidos (ver figura 1.6)

Desejamos encontrar $y = y(x)$ cujo gráfico vai determinar a forma (da curva secção) do espelho mencionado acima (ver figura 6).

Da figura 1.6, observamos que

1)$\theta_1 = \theta_2$ (lei da reflexão)

2)$\theta_1 = \theta_3$ (ângulos que têm lados paralelos)

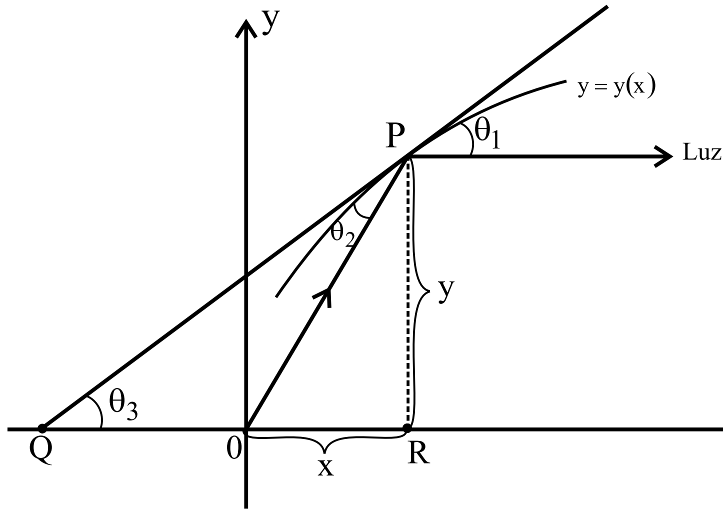

Figura 1.6:

Denote $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.
$\theta_2 = \theta_3$. Logo, o triângulo OPQ é isósceles e $\overline{OP} = \overline{OQ}$.
Mas $\overline{OQ} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Ainda,

$$\tan\theta = \tan\theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

Olhando para o triângulo retângulo PQR temos

$$\tan\theta = \tan\theta_3 = \frac{y}{\overline{OQ} + x} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Daí segue que a curva $y = y(x)$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Vamos agora obter a solução da equação diferencial.
A função

$$f(x, y) = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

é homogênea de grau 0, isto é, satisfaz $f(tx, ty) = f(x, y)$ para qualquer $t > 0$. Como tal, a função de duas variáveis f na realidade depende de uma só quantidade, y/x.

$$f(x, y) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

(para $t = x$).

Para este tipo de equação diferencial é, portanto, natural fazer a substituição $z = y/x$, ou seja $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

$$f(x,y)=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$y=xz,\quad \frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}.$$

Substituindo na equação vem

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}-z=\frac{-z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}.$$

Esta nova equação é separável:

$$\int\left(\frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}+\frac{1}{z}\right)dz=-\int\frac{dx}{x}.$$

Existe apenas uma integral não trivial na expressão acima e que pode ser calculada por substituição trigonométrica: $z=\tan r$, $dz=\sec^2 r\,dr$, $1+z^2=1+\tan^2 r=\sec^2 r$.

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{\sec^2 r\,dr}{\tan r\sec r}=\int\frac{\sec r}{\tan r}dr=$$

$$=\int\frac{dr}{\mathrm{sen} r}=\int\csc r\,dr=-\ln|\csc r-\cot r|$$

$$\cos^2 r=\frac{1}{\sec^2 r}=\frac{1}{1+z^2},\ \mathrm{sen}^2 r=1-\cos^2 r=\frac{z^2}{1+z^2},$$

$$\cos r=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\mathrm{sen} r=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\csc r=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z},\ \cot r=\frac{\cos r}{\mathrm{sen} r}=\frac{1}{z}$$

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}=\ln\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}-\frac{1}{z}\right)=\ln(\sqrt{1+z^2}-1)-\ln z$$

$$\ln(\sqrt{1+z^2}-1)=-\ln x+k=\ln\frac{c}{x}.$$

Logo,

$$\sqrt{1+z^2}-1=\frac{c}{x}.$$

Multiplicando por x, e usando o fato que $z=y/x$ obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+c$$

Logo, a curva $y = y(x)$ que dá a forma ao espelho é uma parábola e a fonte luminosa ocupa o foco. Basta lembrar que a parábola é caracterizada pelo fato de que a distância de um ponto da parábola ao foco 0 é igual à distância de P à reta $x = -c$.

Conclusão: O único espelho capaz de refletir os raios paralelos é o parabólico. Além disto, a única posição em que a fonte pode ser colocada é no foco do espelho.

Outro método de solução da equação diferencial será descrito a seguir.

Tomando
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$
e multiplicando o numerador e denominador por $\sqrt{x^2+y^2}-x$, obtém-se
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\sqrt{x^2+y^2} - x)}{x^2 + y^2 - x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{y}.$$
Podemos reescrever como
$$\frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1, \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+y^2}) = 1,$$
$\sqrt{x^2+y^2} = x + c$, logo $x^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$, portanto $y^2 = 2cx + c^2$

Observação 4: Esta segunda solução é bem mais simples, mas a 1^a segue um método mais geral: a substituição $z = y/x$ transforma qualquer equação $dy/dx = f(x,y)$, onde f é homogênea de grau 0, em uma equação separável.

Exemplo 19: A Corda Suspensa - Catenária

Queremos determinar a forma que toma uma corda flexível suspensa pelas extremidades, como na figura 1.7. Suponha um referencial no plano da corda em que o eixo γ é vertical e a origem é colocada no ponto mais baixo da corda.

Desejamos expressar o perfil da curva através do gráfico de uma função $y(x)$ (ver figura 1.7).

Vamos considerar as forças que atuam em um arco que tem uma extremidade na origem. $P + T_0 + T = 0$ (equilíbrio) onde P é o peso do arco, T a tensão no ponto superior e T_0 a tensão no ponto mais baixo.

Seja s o comprimento deste arco. Seja λ a densidade da corda. Então, $|P| = g\lambda s$

$|T_0| = |T| \cos\theta$

$g\lambda s = |P| = |T| \text{sen}\theta$

Dividindo, obtemos
$$g\frac{\lambda}{|T_0|}s = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

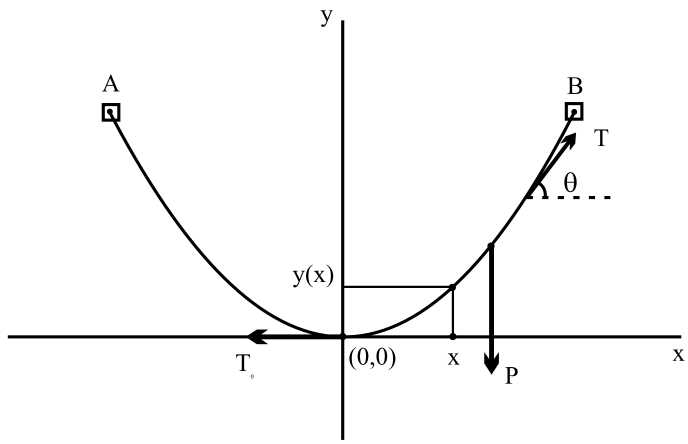

Figura 1.7:

$\lambda/|T_0|$ é uma constante (não depende da extremidade superior do arco).

Indiquemos por $a = \lambda/|T_0|$.

$$\Delta s \simeq \sec\theta\Delta x$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \simeq \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Fazendo $\Delta x \to 0$, segue

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Acima tínhamos $as = dy/dx$. Derivando outra vez,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{ds}{dx} = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ou seja, a função $y = y(x)$ que dá a forma da corda satisfaz uma equação diferencial de 2^a ordem. Esta equação facilmente se reduz à 1^a ordem, fazendo $p = dy/dx$.

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2}.$$

Esta é separável,

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a dx.$$

Esta integral se calcula por substituição trigonométrica: $p = \tan r$, $dp = \sec^2 r dr$

$\sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\tan^2 r} = \sec r$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\sec^2 r dr}{\sec r} =$$

$$\int \sec r dr = \ln(\sec r + \tan r) = \ln(p + \sqrt{1+p^2})$$

Segue daí, $\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = ax + c$.

A constante c pode ser determinada fazendo $x = 0$ e levando em conta que da maneira que foi colocado o referencial temos

$$p(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0.$$

Logo, $\ln(p(0) + \sqrt{1+[p(0)]^2}) = 0 + c$, logo, $0 = \ln 1 = c$, $c = 0$.

Logo, $\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = ax$ e, tomando exponencial nos 2 lados, $p + \sqrt{1+p^2} = e^{ax}$, $\sqrt{1+p^2} = e^{ax} - p$. Elevando ao quadrado, $1 + p^2 = e^{2ax} - 2pe^{ax} + p^2$

$$p = \frac{e^{2ax} - 1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = \operatorname{senh} ax.$$

Lembrando que $p = dy/dx$, $dy/dx = \operatorname{senh} ax$.

Logo, $y = 1/a \cosh\ ax - k$. Determinamos a constante k, levando em conta que $y(0) = 0$, $k = 1/a$

$$y(x) = \frac{1}{a}(\cosh\ ax - 1)\ \text{ esta curva é denominada catenária}$$

O parâmetro a vale $a = \lambda/|T_0|$ e depende da densidade da corda e da tensão no ponto mais baixo.

Reescrevendo $ay = \cosh(ax) - 1$ vemos que fazendo a mudança de variáveis

$$\bar{x} = ax$$

$$\bar{y} = ay$$

qualquer catenária é dada pela mesma equação $\bar{y} = \cosh \bar{x} - 1$.

Conclusão: Considerando uma corda suspensa qualquer seu perfil é dado por um pedaço do gráfico de uma curva de equação $\bar{y}(x) = \cosh \bar{x} - 1$, exceto por uma mudança de escala, dada por

$$\bar{x} = ax$$

$$\bar{y} = ay$$

Exemplo 20: Suponha que o eixo dos y e a reta $x = c$ são as margens de um rio, cuja corrente tem velocidade uniforme a na direção negativa dos y (ver figura 1.8).

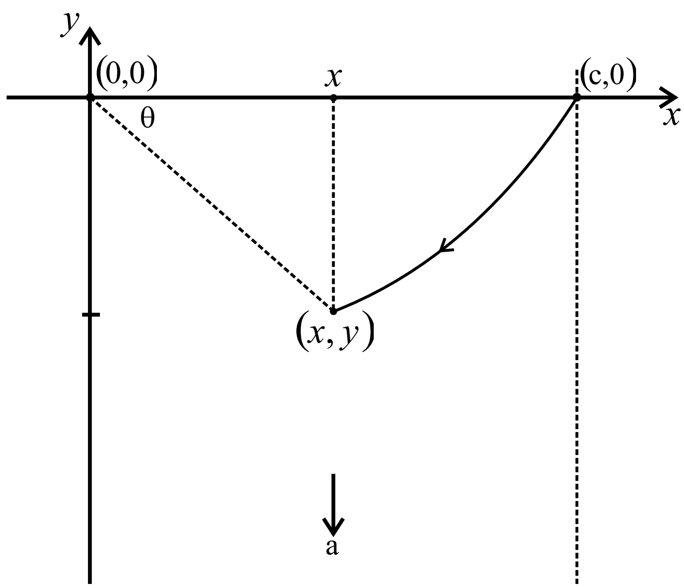

Figura 1.8:

Um bote entra no rio no ponto $(c, 0)$ e navega sempre em direção à origem, com velocidade b relativa à água.

Como determinar a trajetória do bote? Qual a relação entre a e b para que o bote atinja a origem? Estas perguntas serão respondidas a seguir usando a teoria das equações diferenciais.

A velocidade do bote em relação a um observador na margem, tem componentes

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

dadas por

$$\frac{dx}{dt} = -b\cos\theta, \quad \frac{dy}{dt} = -a + b\text{sen}\theta.$$

Isto segue do fato que a velocidade v é o vetor que dá a intensidade da corrente $(0, -a)$ com o vetor que dá intensidade da remada do remador $(-b\cos\theta, b\text{sen}(\theta))$.

Como pela regra da cadeia, $\frac{d(y(x(t))}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$, então

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-a + b\text{sen}\theta}{-b\cos\theta},$$

e portanto, usando relações trigonométricas a trajetória do bote satisfaz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx}.$$

Note que nesta última equação perdemos a informação de t mas não a informação do caminho seguido pelo bote $(x, y(x))$. O que ganhamos com isto é que a equação se simplificou desta forma.

Podemos resolver esta equação pelo mesmo método utilizado no exemplo do espelho parabólico. Mostre que se $a < b$ então o bote atinge a outra margem.

Vamos concluir esta seção relembrando o enunciado de teorema sobre existência e unicidade de soluções na reta real.

Teorema 4: Dado a função $f(t, y)$, $f : A \to \mathbf{R}$ onde A é aberto em $\mathbf{R^2}$ e f é de classe C^1 e $(t_0, y_0) \in A$, então existe $\epsilon > 0$ e uma única solução $y(t)$ (para t em um certo intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$) da equação

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y\right)$$

com a condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Este afirma que localmente, em torno do ponto t_0 existe solução $y(t)$. Muitas vezes a solução vai existir para todo tempo $t \in \mathbf{R}$, mas as vezes a solução existe apenas para um intervalo em torno de t_0 conforme pode ser comprovado no exemplo 9

Exercícios:

1) Encontre a solução geral $x(t)$ da equação diferencial (explícita quando possível):

a) $3t^2x + 7tx^2 + (t^3 + 7t^2x + 12x^2)x' = 0$

b) $1 + (1 + tx)e^{tx} + (1 + t^2e^{tx})x' = 0$

c) $2t\text{sen}x + x^3e^t + (t^2 \cos x + 3x^2e^t)x' = 0$

d) $\frac{x^2}{2} + 2xe^t + (tx + 2e^t)x' = 0$

2) Encontre a solução $x(t)$ da equação diferencial (explícita quando possível) e que também satisfaça a condição inicial:

a) $2t\text{sen}x + x^3e^t + (t^2 \cos x + 3x^2e^t)x' = 0, x(0) = 1$

b) $3tx + x^2 + (\frac{3}{2}t^2 + 2tx)x' = 0, x(2) = 1$

c) $2tx^3 + 3t^2x^2x' = 0, x(1) = 1$

d) $1 + (1 + tx)e^{tx} + (1 + t^2e^{tx})x' = 0, x(1) = 1$

3) Na equação diferencial $t + xe^{2tx} + ate^{2tx}x' = 0$, encontre a constante a que torna a equação diferencial exata e a seguir determine a solução geral.

4) Determine $a(t)$ para que a equação diferencial em $x(t)$ dada por $a(t)x' + t^2 + x = 0$, tenha $u(t) = t$ como fator integrante.

5) Considere a equação diferencial $x' = x + x^2$ e a mudança de variável $y = h(x) = x^3$. Escreva a equação diferencial na variável y.

6) Encontrar a solução geral de

$$\frac{dy}{dt} = 2\left(\frac{y}{t}\right) + \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

7) A equação diferencial de primeira ordem

$$\otimes \frac{dy}{dt} + a_2(t)y^2 + a_1(t)y + a_0(t) = 0$$

é chamada Equação de Riccati, quando $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ são contínuas no intervalo $I = (\alpha, \beta)$ e $a_2(t) \neq 0$, $\forall\ t \in I$.

a) Seja $y_1(t)$ uma solução particular de $\otimes$. Faça a mudança de variável $y = y_1 + 1/z$ para reduzir $\otimes$ a uma equação diferencial linear de 1^a ordem em z. Conclua então que se sabemos uma solução particular de $\otimes$, então podemos calcular todas as soluções de $\otimes$.

b) Mostre que a equação de Riccati com coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dt} + ay^2 + by + c = 0$$

tem solução constante igual a m se, e somente se, m é raiz real de $am^2 + bm + c = 0$.

c) Encontre, através do método descrito acima, a solução geral de

$$\frac{dy}{dt} + y^2 - 4 = 0.$$

I.5 Soluções em séries de potências

Definição 8: Dizemos que uma função $f(x)$ é analítica na variável x se existem números reais $b_n, n \in \mathbf{N}$, tal que f pode ser expressa como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

para todo x.

Similarmente,

Definição 9: Dizemos que uma função $x(t)$ é analítica na variável t numa vizinhança de t_0, se ela pode ser expressa como

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$

para t nesta vizinhança de t_0.

Teorema 5: Seja $f(x)$ analítica na variável x, então $x(t)$ solução de $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, também é analítica em certo intervalo $(t_0 - \zeta, t_0 + \zeta), \zeta > 0$.

A demonstração do resultado acima foge ao escopo deste texto (ver [S] para a demonstração).

Para encontrar a solução $x(t)$ de uma equação diferencial em que f é analítica, basta manipular algebricamente os coeficientes para tentar descobrir a expressão analítica da solução $x(t)$. Vamos dar a seguir um exemplo de como proceder:

Exemplo 21: Resolva a equação $x' = 2tx$ por séries de potências.

Substituímos

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

na equação $x' = 2tx$ e obtemos

$$a_1+2a_2t+3a_3t^2+... = 2t(a_0+a_1t+a_2t^2+...) = 2a_0t+2a_1t^2+2a_2t^3+....$$

Igualando os coeficientes dos termos de t^n (para todod n) dos dois lados da igualdade obtemos que $a_1 = 0$ e ainda a seguinte relação entre os coeficientes: $2a_2 = 2a_0$, $3a_3 = 2a_1$, $4a_4 = 2a_2$, $5a_5 = 2a_3$, ... e assim por diante.

Concluímos assim que $a_n = 0$ para n ímpar e ainda que

$$a_2 = a_0, a_4 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2!}, \quad a_6 = \frac{a_4}{3} = \frac{a_0}{3!}, \quad ...$$

e assim por indução obtemos que

$$a_n = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

para n par.

A solução $x(t)$ será dada então por

$$x(t) = a_0\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + ...\right) = a_0 e^{t^2}.$$

Se supusermos uma condição inicial $x(t_0) = b_0$, iremos determinar o valor a_0 acima e assim identificar $x(t)$, solução de $x'(t) = tx$, $x(t_0) = x_0$ como

$$x(t) = b_0 e^{-t_0^2} e^{t^2} = b_0 e^{t^2 - t_0^2}.$$

Nosso objetivo no que concerne a soluções em série neste texto é bem modesto. Referimos o leitor a [S] para resultados mais detalhados sobre o assunto.

Exercícios:

1) Encontre a solução geral $y(t)$ de $y' + t^2 y = 0$.
2) Encontre a solução $x(t)$ de $x' = tx + t, x(0) = 2$

II. Equações diferenciais de segunda ordem

II.1 Introdução

Neste capítulo vamos analisar equações diferenciais de segunda ordem.

Definição 1: A equação geral de segunda ordem é dada por

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right).$$

Exemplo 1: $\frac{d^2y}{dt^2} = 5\frac{dy}{dt} + (y\cos t)^2 + t^2$

Exemplo 2: $\frac{d^2y}{dt^2} = -y$. Observe que $y(t) = \mathrm{sen} t$ e $z(t) = \cos t$ são soluções da equação diferencial de segunda ordem $\frac{d^2y}{dt^2} = -y$.

Note que a soma $w(t) = z(t) + y(t)$ também é solução desta equação diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} = -y$, pois se

$$w(t) = y(t) + z(t) = \mathrm{sen} t + \cos t,$$

então

$$\frac{d(y+z)}{dt} = \cos t - \mathrm{sen} t$$

e

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(y+z) = -\mathrm{sen} t - \cos t = -(\mathrm{sen} t + \cos t) = -w(t),$$

e assim, w é também solução.

Concluímos então que a condição inicial $y(t_0) = y_0$, não determina a solução $y(t)$ de maneira única.

Note que $z(t)$ e $w(t)$ acima são soluções e satisfazem ambas a condição $z(0) = w(0) = 1$. No caso de equações diferenciais de segunda ordem, diferentemente das equações de primeira ordem, precisaremos de duas condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0^1$ para determinar de maneira única a solução da equação diferencial.

A seguir apresentamos o resultado geral sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais de segunda ordem.

Teorema 0 - Teorema de Existẽncia e Unicidade: Dado a função $f(t, y, z)$ onde $f : A \to \mathbf{R}$, A é aberto em $\mathbf{R^3}$ e f é de classe C^1 e $(t_0, y_0, y_0^1) \in A$, então existe $\epsilon > 0$ e solução única $y(t)$ (para t em um certo intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$) da equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

satisfazendo as condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y^{'}(t_0) = y_0^1$.

Em alguns casos ϵ é infinito.

Este resultado segue do teorema de Existência e Unicidade para equações ordinárias de primeira ordem em $\mathbf{R^2}$ e não sera demonstrado aqui (ver [DL]).

Uma classe grande de exemplos de equações de segunda ordem proveem da Lei de Newton: "Força é igual a massa vezes aceleração".

Mais precisamente, a lei de Newton afirma que dado um campo de forças $F(x)$, $x \in \mathbf{R}$, a solução $x(t)$ do sistema mecânico (sujeito a tal campo de forças) com posição inicial $x(t_0) = x_0$ e velocidade $x^{'}(t_0) = x_0^1$, satisfaz $F(x(t)) = mx^{''}(t)$.

Esta equação pode ser escrita na forma $x^{''} = \frac{F(x)}{m} = f(x)$ e assim determina uma equação diferencial de segunda ordem.

Exemplo 3: Um corpo de massa m é largado de uma altura h_0 num tempo t_0 com velocidade v_0. Descreva a posição $x(t)$ do corpo sob a ação da força constante da gravidade.

Vamos supor que $x(t)$ vai descrever a altura em que se encontra o corpo no tempo t. Vamos desprezar neste exemplo o efeito do atrito com o ar quando o corpo cai.

Neste caso as condições iniciais são:

$$x(t_0) = h_0 \quad \text{(altura)}$$

$$x'(t_0) = v_0 \text{(velocidade inicial quando se larga o corpo)}$$

Pela Lei de Newton (força é igual a massa vezes aceleração), e supondo que a força que age sobre o corpo é constante e igual a $-mg$ (g é a constante de gravidade), a equação que descreve o movimento do corpo $x(t)$ é

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = -mg,$$

logo,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -m, \qquad \text{ou seja} \qquad \int_{t_0}^{t} \frac{d^2x}{ds^2} ds = \int_{t_0}^{t} -g ds$$

integrando uma vez em relação à t obtemos

$$x'(t) - v_0 = x'(t) - x'(t_0) = -\frac{g}{t} + \frac{g}{t_0}.$$

Integrando mais uma vez em relação à t, obtemos

$$x(t) - h_0 = x(t) - x(t_0) = -\frac{g}{2}t^2 + (\frac{g}{t_0} + v_0)t$$

Finalmente, concluímos que

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (gt_0 + v_0)t + h.$$

Acreditamos que tenha ficado claro ao leitor no exemplo acima que é necessário realmente numa equação diferencial de segunda ordem determinar a posição $x(t_0)$ e também $x^{'}(t_0)$. Note que se largarmos o corpo na mesma altura h_0 e no mesmo tempo t_0 mas com velocidade 0 ou com velocidade digamos positiva (ou seja o corpo está subindo quando é largado), a trajetória $x(t)$ descreverá distintos caminhos.

Mais tarde voltaremos a considerar novamente a lei de Newton e outros campos de força distintos do considerado acima (ver exemplo 20).

Outra classe de exemplos de equações diferenciais de segunda ordem provem da Geometria Diferencial. As geodésicas em superfícies resultam ser equações diferenciais de segunda ordem (ver [Ca]). Na maioria dos casos tais equações não são lineares.

Um caso importante de equação diferencial ordinária de segunda ordem será analisado a seguir.

Exercícios:

1) Mostre que $x(t) = t^2$ é solução de $x'' - 0.5tx' + x = 2$ com as condições iniciais $x(1) = 1$ e $x'(1) = 2$.

II.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

Definição 2: As equações diferenciais da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

são denominadas de Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem Homogêneas.

Vamos tentar determinar de maneira única as soluções $y(t)$ da equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

com as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y_0^1$$

Nosso objetivo a seguir será mostrar que fixada a equação $\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$, a solução geral $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, onde c_1, c_2 são constantes reais e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fixadas (e que necessitamos determinar). As duas constantes c_1 e

c_2, por sua vez, serão determinadas a partir das condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0^1$.

Teorema 1: Teorema de existência e unicidade: Se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas no intervalo (a, b), então existe uma única solução $y(t)$ de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \qquad (9)$$

com as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0 \text{ e } \quad y'(t_0) = y_0^1 \qquad (10)$$

para todo t no intervalo (a, b).

A classe de diferenciabilidade de $y(t)$ é a mesma de $p(t)$ e $q(t)$, ou seja, se $p(t)$ e $q(t)$ são de classe C^∞ então $y(t)$ também o é. Se $p(t)$ e $q(t)$ são de classe $C^k, k > 1$ então $y(t)$ também o é.

Observação 1: Note que $x \equiv 0$ é sempre solução da equação diferencial linear de segunda ordem (9). Isto segue do fato que a derivada de uma função constante é nula, logo

$$x^{''}(t) + p(t)x^{'}(t) + q(t)x(t) = 0 + p(t)0 + q(t)0 = 0.$$

Observação 2: A função $x(t) = 0$ é a única solução de (9) tal que $x(t_0) = 0, x^{'}(t_0) = 0$.

De fato, o teorema acima afirma que a solução $y(t)$ que satisfaça ao mesmo tempo (9) e (10) é única, logo se $z(t)$ é solução de (9) e ainda $z(t_0) = 0 \;\; z'(t_0) = 0$ então $z \equiv 0$ (isto é, $z(t) = 0, \forall t \in (a, b)$).

Observação 3: Note que a soma $z(t) = ax(t) + by(t)$, onde $a, b \in \mathbf{R}$ e $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções de (9) é também solução de (9) pois

$$z^{''} + p(t)z^{'} + q(t)z =$$

$$((ax^{''}(t) + by^{''}(t)) + p(t)(ax^{'}(t) + by^{'}(t)) + q(t)(ax(t) + by(t))) =$$

$$(x^{''} + p(t)x^{'} + q(t)x) + (y^{''} + p(t)y^{'} + q(t)y) = 0 + 0 = 0.$$

Este fato segue da linearidade da operação de derivar funções e do fato que o lado direito da equação (9) é linear em y , $y^{'}$ e $y^{''}$. Este fato vai nos conduzir a seguir a considerar espaços vetoriais de funções.

Referimos ao leitor a [KF] para definições mais precisas dentro da teoria da análise funcional e que coloca os resultados a serem descritos a seguir em base matemática rigorosa. Nosso objetivo aqui é apenas explicar a teoria das equações de uma maneira mais intuitiva (fazendo um paralelo com a Algebra Linear) sem entrar em todos os detalhes técnicos envolvidos.

Lembre que uma função é de classe C^∞ se ela pode ser derivada infinitas vezes.

Definição 3: Vamos considerar agora o espaço $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(a,b)}$ das funções $y : (a,b) \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, ou seja

$$\mathcal{F} = \{y\colon (a,b) \to \mathbf{R} \mid \text{y de classe } C^\infty\}.$$

Definição 4: Um conjunto V é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$ se é fechado para a soma de vetores em $v \in V$ e para produto com escalares $\lambda \in \mathbf{R}$. Em outras palavras, se vale para quaisquer λ_1, λ_2 reais e quaisquer v_1, v_2 em V que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ está em V.

Se $W \subset V$ é também um espaço vetorial dizemos que W é um subespaço vetorial de V.

Note que $V = \mathcal{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$. É possivel somar funções em $\mathcal{F}$ e também multiplicar funções em $\mathcal{F}$ por números reais (chamados de escalares). Este será o principal exemplo de espaço vetorial que vamos considerar.

Vamos pensar que uma função (por exemplo, $v_1 = \cos(t) \in \mathcal{F} = V$ ou $v_2 = t^3 \in \mathcal{F} = V$) é um vetor em $V = \mathcal{F}$.

Neste caso, por exemplo, se $v_1 = \cos(t) \in \mathcal{F} = V$ e $v_2 = t^3 \in \mathcal{F} = V$, então a combinação linear $2v_1 + 7v_2 = 2\cos(t) + 7t^3$ é também uma função em $\mathcal{F}$.

A função constante igual a zero é denotada por 0, e é o elemento neutro para a operação de soma no espaço vetorial $\mathcal{F}$, isto é, $0 + y = y = 0 + y$.

Definição 5: Seja W um espaço vetorial. Um subconjunto

$$\{v_1, v_2, .., v_n\} \in W$$

é dito lineramente independente se sempre que $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ são tais que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... a_n v_n = 0$, então $a_1 = 0, a_2 = 0, ... a_n = 0$. Um conjunto de vetores que não é linearmente independente é chamado linearmente dependente.

Dizemos que W é gerado pelo conjunto linearmente independente $\{v_1, v_2, .., v_n\} \in W$, se para qualquer $v \in W$ existe $a_1, a_2, ..., a_n$ tal que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... a_n v_n.$$

Dizemos que W tem dimensão finita se existe um conjunto finito $\{v_1, v_2, .., v_n\} \in W$ que gera W. Neste caso, dizemos que W tem dimensão n

Por exemplo, é fácil ver que e^t e t^3 são linearmente independentes em $\mathcal{F}$. Isto porque, se vale para todo t que $a_1 e^t + a_2 t^3 = 0$, então sustituindo para os valores $t = 1$ e $t = 2$, obtemos $a_1 e^1 + a_2 1 = 0$ e $a_1 e^2 + a_2 2^3 = 0$. Estas duas equações implicam que $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$.

Note que os espaço vetorial $W = \{y \in \mathcal{F} | y(t) = c_1 e^t + c_2 t^3, c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$. Os subespaços vetorias de $\mathcal{F}$ que vamos considerar a seguir serão sempre da forma $W = \{y \in$

$\mathcal{F} | y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$, onde y_1 e y_2 são linearmente independentes. Nestes dois exemplos, temos que a dimensão de W é 2.

Podemos dizer, neste caso, que y_1 e y_2 geram tal W, e que portanto W tem dimensão 2.

É importante destacar que $\mathcal{F}$ não é, no entanto, um espaço de dimensão finita.

Definição 6: Uma transformação linear (ou operador linear) T definida sobre o espaço vetorial $\mathcal{F}$,

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

é uma função tal que $T(ay+bz) = aT(y)+bT(z)$, para todo $a, b \in \mathbf{R}$ e $y, z \in \mathcal{F}$.

Exemplo 4: A operação de derivar é uma transformação linear a qual será denotada por D,

$$D : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$
$$y \mapsto \frac{dy}{dt}.$$

Isto é, $D(y) = \frac{dy}{dt}$.

Exemplo 5: A transformação derivar duas vezes uma função,

$$D \circ D(y) = \frac{d^2y}{d^2t}$$

também é linear pois é a composta de transformações lineares.

Exemplo 6: A transformação identidade $I : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $I(y) = y$ é claramente linear.

Exemplo 7: Se c é uma constante e T é transformação linear $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, então cT também é transformação linear.

Exemplo 8: Seja $h(t) \in \mathcal{F}$, fixada, se $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é operador linear, então seja $hT : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definido da seguinte maneira: se $T(y) = g$ então $hT(y) = z \in \mathcal{F}$, onde z é a função tal que para todo t vale que $h(t)g(t) = z(t)$. É claro que hT (ou $h(t)T$) é tambem um operador linear.

Observação 4: Note que se $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é transformação linear, então $T(0) = 0$, isto porque $T(0) = T(y-y) = T(y) - T(y) = 0$.

Definição 7: O Núcleo de um operador Linear $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é o conjunto

$$N(T) = \{y \in \mathcal{F} \,|\, T(y) = 0\}.$$

Observação 5: O Núcleo de um operador T é sempre um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$. Isto porque pela linearidade de T, se $y, z \in N(T), a, b \in \mathbf{R}$, então

$$T(ay+bz) = aT(y) + bT(z) = a\,0 + b\,0 \,=\, 0.$$

Logo, $ay + bz \in N(T)$.

Como desejamos analisar a equação diferencial $x^{''} + p(t)x^{'} + q(t)x = 0$, é natural analisar a transformação linear L dada por $L = D^2 + p(t)D + q(t)I$ e que naturalmente é um operador linear. Note que soma de operadores lineares é operador linear.

Se quisermos que as soluções $y(t)$ sejam de classe C^∞ basta assumir que $p(t)$ e $q(t)$ seja de classe C^∞.

Note também que o núcleo do operador L que é dado por

$$N(L) = \{y \in \mathcal{F} \,|\, L(y) = (D^2 + p(t)D + q(t)I)(y) = 0\} =$$

$$\{y \in \mathcal{F} \,|\, y^{''}(t) + p(t)y^{'}(t) + q(t)y(t) = 0\},$$

é nada mais nada menos que o conjunto das soluções de (9) que desejamos determinar.

O ponto fundamental no desenvolvimento que segue é o seguinte: vamos mostrar que o subespaço vetorial $W = N(L)$, que desejamos determinar, será da forma $W = \{y \in \mathcal{F} | y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$, onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de (9).

Por exemplo, no caso da equação diferencial linear de segunda ordem

$$y'' - \frac{2}{t^2} y = 0,$$

é fácil ver que $y_1(t) = t^2$ e $y(t) = 1/t$ são soluções linearmente independentes e portanto (seguirá do que vamos mostrar a seguir) que

$$W = N(L) = \{y \in \mathcal{F} | y(t) = c_1 t^2 + c_2 1/t,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Podemos tomar, neste caso, $\mathcal{F} = \{y(t) | t \in (0, \infty) = (a, b)\}$, pois o domínio natural de $q(t)$ é $t \in (a, b) = (0, \infty)$, pois $\frac{2}{t^2}$ não está definido para $t = 0$. Podemos tomar, também, altenativamente, $\mathcal{F} = \{y(t) | t \in (-\infty, 0) = (a, b)\}$

Fica assim, neste caso, determinada a solução geral de

$$y'' - \frac{2}{t^2} y = 0,$$

ou seja, o conjunto das soluções de $y'' - \frac{2}{t^2} y = 0$.

Observação 6: Note que a razão para considerar o espaço $\mathcal{F}$ das funções C^∞ e não apenas as funções de classe C^2 é a seguinte: uma função f de classe C^2 mas que não é de classe C^4, é tal que quando aplicamos L a f obtemos $L(f) = g$ e a função g já não esta mais no domínio de T.

Para definir o operador T de maneira que a imagem $T(\mathcal{F})$ esteja contida no contra-domínio $\mathcal{F}$, basta assumir que $p(t)$ e $q(t)$ são de classe C^∞ (produto de funções de classe C^∞ é de classe C^∞.). Resultará disto que as soluções $y(t)$ serão de classe C^∞. A teoria geral que vamos apresentar a seguir, na maioria dos casos, não necessita fazer esta hipótese tão restritiva de que $p(t), q(t)$ são de classe C^∞ (o leitor interessado poderá saber mais sobre isto lendo [DL][So], embora tal não seja necessário para o que segue).

Exemplo 9: Um exemplo de uma equação diferencial não linear é $y^{''} - 5y^{'2} - \cos t(\cos y)^3 = 0$.

Proposição 2: Sejam y_1, y_2 soluções de $y^{''}(t)+p(t)y^{'}+q(t)y(t) = 0$, no intervalo (a, b) e tal que existe $t_0 \in (a, b)$

$$y_1(t_0)\, y_2'(t_0) - y_1'(t_0)\, y_2(t_0) \neq 0 \qquad (11)$$

Então toda solução de $y^{''}(t) + p(t)y^{'} + q(t)y(t) = 0$ se escreve como

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \quad \forall\, t \in (a, b)$$

O espaço $\mathcal{F}$ das funções C^∞ tem dimensão infinita, isto é, não existe um conjunto finito de funções $y_i \in \mathcal{F}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que para toda $y \in \mathcal{F}$, existe $c_i \in \mathbf{R}, i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $f = \sum_{i=1}^n c_i y_i$.

Note que a afirmação do teorema acima é que N(L) tem dimensão 2, isto é, que se existem y_1 e y_2 tais que satisfazem no ponto t_0

$$y_1(t_0)\, y_2'(t_0) - y_1'(t_0)\, y_2(t_0) \neq 0$$

então para toda $y \in N(L)$ existe $c_1 \in \mathbf{R}$ e $c_2 \in \mathbf{R}$ tal que $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Neste caso dizemos que y_1 e y_2 geram o subsespço vetorial $N(L)$.

Demonstração: Sob as hipóteses da Proposição dado $y \in L$ será que existe $c_1, c_2,\ y(t) = c_1y_1 + c_2y_2$?

Vamos inicialmente tentar saber se apenas no ponto t_0, podemos resolver a equação

$$\begin{cases} y(t_0) = c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) \\ y'(t_0) = c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) \end{cases}$$

Ora, $\det\,(y_1(t_0)y_2(t_0)y_1'(t_0)y_2'(t_0)) = (y_1y_2' - y_2y_1')(t_0) \neq 0$ por hipótese, logo, $\exists\, c_1, c_2$ soluções do sistema linear acima no ponto t_0.

Seja $\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \forall t \in (a, b)$.

Será que $\phi(t) = y(t)$?

Ora, $\phi(t)$ é solução de (9), pois é combinação linear de soluções de (9) (ver observação 3).

Ainda, $\phi(t_0) = y(t_0)$ e $\phi^{'}(t_0) = y^{'}(t_0)$, logo concluímos pela unicidade da solução no Teorema 1 que $\phi(t) = y(t)$.

Fica assim demonstrada a proposição.

Uma pergunta natural é se existem funções y_1 e y_2 soluções de (9) tal que $y_1(t).y_2'(t) - y_1'(t).y_2(t) \neq 0, \ \forall\, t \in (a,b)$?

Sejam y_1 e y_2 soluções de (9) que satisfaçam respectivamente as condições

$$y_1(t_0) = 1,\ y_1'(t_0) = -1$$

e

$$y_2(t_0) = 0,\ y_2'(t_0) = 1$$

Tais soluções y_1 e y_2 existem pelo Teorema 1.

É claro que

$$y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0) = 1 + 0 \neq 0.$$

Logo, concluimos que de fato existem y_1 e y_2 que satisfazem em um ponto t_0 a hipótese da Proposição 2 e portanto geram $N(L)$.

Vamos mostrar a seguir que o fato que para algum t_0

$$y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0) \neq 0$$

implica que

$$y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \neq 0,\ \forall t \in (a,b).$$

Antes vamos necessitar de algumas definições.

Definição 8: $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é denominado *conjunto fundamental de soluções de (9)* se y_1, y_2 geram o espaço de soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, isto é, se para todo $y \in N(L)$ existem c_1, c_2 tal que $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Uma descrição pictórica do conjunto $N(L)$ e dos vetores y_1, y_2 e $y = c_1y_1 + c_2y_2$ aparece na Figura 1.9. É claro que $\mathcal{F}$ não pode ser representado como o espaço tri-dimensional (pois tem dimensão infinita) como sugere a Figura 7, mas esta imagem ajuda a fazer uma analogia com o que conhecemos da Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Gostaríamos de obter um critério efetivo para saber se duas soluções de y_1 e y_2 determinam um conjunto fundamental de soluções. Isto será, descrito a seguir.

Definição 9: Dados $y_1(t)$ e $y_2(t)$, então o *wronskiano*, denotado por $w(t) = w(y_1(t), y_2(t))$, é por definição

$$w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

A Proposição 2 acima mostra que se $w(t_0) \neq 0$ para certo $t_0 \Rightarrow$ y_1, y_2 é o conjunto fundamental de soluções.

Por exemplo, $w(t) = \frac{1}{t}\, 2\,t - \frac{1}{t^2}\, 2\,t$ é não nulo para $y_1(t) = 1/t$ e $y_2(t) = t^2$, que são duas soluções de $y'' - \frac{2y}{t^2} = 0$.

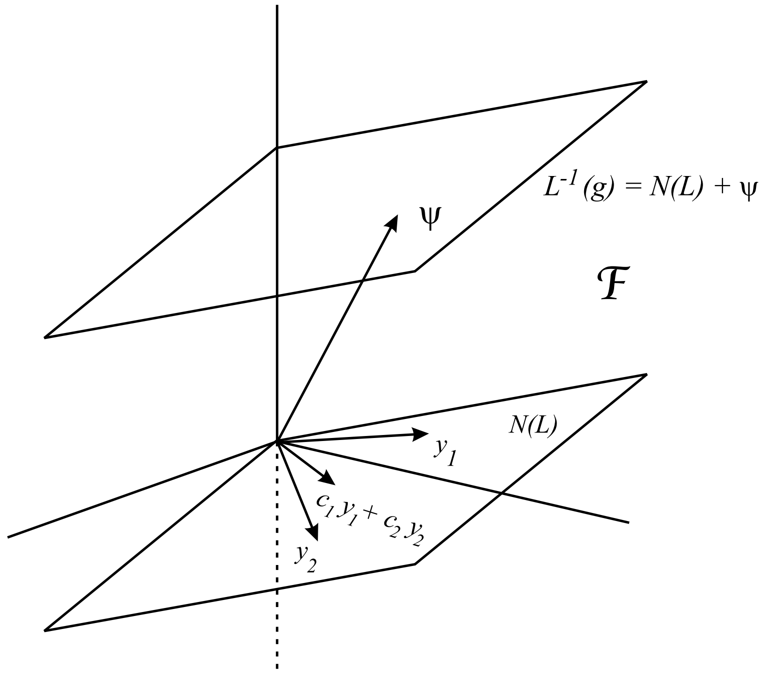

Figura 1.9:

Exemplo 10: Calcule $w(e^{at}, e^{bt})$:

$$\begin{matrix} y_1(t) = e^{at} & y_1'(t) = ae^{at} \\ y_2(t) = e^{bt} & y_2'(t) = be^{bt} \end{matrix} \Rightarrow \; y_1y_2' - y_2y_1' = be^{(a+b)t} - ae^{(a+b)t} =$$

$$(b-a)e^{(a+b)t} \neq 0, \text{ se } b \neq a$$

Exemplo 11: Calcule $w(e^{ct}, te^{ct})$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{ct} \\ y_2(t) &= te^{ct} \\ y_1y_2^{'} - y_1^{'}y_2 = cte^{2ct} + e^{2ct} - cte^{2t} &= e^{2ct} \neq 0 \end{aligned}$$

Exemplo 12: Calcule $w(cos(wt), \text{sen}(wt))$:

$$y_1(t) = \cos wt$$

$$y_2(t) = \text{sen} wt$$

$$y_1y_2^{'} - y_2y_1^{'} = w(\cos wt)^2 + w(\text{sen} wt)^2 = w \neq 0.$$

Teorema 3: Seja y_1 e y_2 tais que sejam soluções de $y^{''} + y'\,p(t) + q(t)y = 0$, t em (a, b), vamos mostrar que $w(y_1(t), y_2(t)) = w(t)$ é solução de $w' + p(t)w = 0$.

Demonstração: De fato, se y_1 e y_2 são soluções de $y^{''} + y'\,p(t) + q(t)y = 0$, então

$$w(t) = w(y_1(t), y_2(t)) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t),$$

logo,

$$w' = y_1'y_2' + y_1y_2^{''} - y_1'y_2' - y_1^{''}y_2 = y_1y_2^{''} - y_1^{''}y_2.$$

Como

$$y_2^{''} = -y_2'p(t) - y_2q(t)$$
$$y_1^{''} = -y_1'p(t) - y_1q(t)$$

então

$$w' = -y_2'y_1p(t) - y_2y_1q(t) + y_2y_1'p(t) + y_2y_1q(t) =$$
$$= p(t)(y_2y_1' - y_2'y_1) = -p(t)w.$$

Portanto $w(t)$ satisfaz $w' + p(t)w = 0$.

Observação 7: A partir do capítulo 1 sabemos que se $w(t)$ satisfaz $w' + p(t)w = 0$, então

$$w(t) = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}.$$

Sendo assim, se existe t_0, $w(t_0) \neq 0 \Rightarrow w(t) \neq 0, \quad \forall\, t \in (a,b)$, pois a função exponencial nunca se anula.

Ainda, se existe t_0, $w(t_0) = 0 \Rightarrow w(t) = 0$, $\forall t \in (a,b)$.

Proposição 4: Sejam y_1, y_2 soluções de (9) tal que em algum ponto t_0 vale $w(t_0) = 0$. Então $\{y_1,\, y_2\}$ é um conjunto linearmente dependente, isto é, existe uma constante real r tal que $y_1 = ry_2$ ou tal que $y_2 = ry_1$.

Demonstração:

Ora,

$$w(t_0) = 0 \Rightarrow \ \det\left(y_1(t_0) y_2(t_0) y_1'(t_0) y_2'(t_0)\right) = 0,$$

logo a matriz é não inversível, $\Rightarrow \exists\, c_1, c_2$, não todos nulos tais que

$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = 0$$

$$c_2y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = 0$$

Considere $\phi \in \mathcal{F}$ tal que para todo t, $\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \Rightarrow \phi(t_0) = 0$, $\phi^{'}(t_0) = 0$.

Sendo assim, $\phi(t) = 0, \forall t \in (a,b)$, pois ϕ é solução de (9) por ser combinação linear de soluções de (9).

Sem perda de generalidade podemos supor que $c_1 \neq 0$.

Logo, $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = 0, \forall t$, implica que

$y_1 = -\frac{c_2}{c_1}y_2 \Rightarrow y_1, y_2$ são linearmente dependentes.

Observação 8: Se y_1 e y_2 não são soluções da mesma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, pode ser que eles sejam linearmente independentes mas que $w(y_1, y_2) = 0$.

Vamos mostrar no caso geral como obter uma solução $y_2(t)$ de (9) à partir de outra solução $y_1(t)$ de (9).

Proposição 5: Seja $y_1(t)$ que nunca se anula e solução de

$$y^{''} + p(t)y^{'} + q(t)y = 0,$$

então outra solução $y_2(t)$ pode ser encontrada resolvendo a equação de primeira ordem linear não homogênea $y_2^{'} + p_1(t)y_2 = q_1(t)$, onde $p_1(t) = \frac{y_1'}{y_1}$ e $q_1(t) = \frac{ke^{-\int p(t)\,dt}}{y_1}$.

Demonstração: A demonstração segue de imediato do fato que dado $y_1(t)$, se buscamos $y_2(t)$ outra solução, então $w(y_1, y_2)(t) = w(t) = y_1 y_2^{'} - y_1^{'} y_2$, é tal que $w(t)$ (pelo Teorema 3) vai satisfazer $w' = p(t)w$ e, portanto ser da forma $w(t) = ke^{-\int p(t)dt}$.

Segue então a igualdade

$$y_1 y_2^{'} - y_1^{'} y_2 = ke^{-\int p(t)dt}.$$

Dividindo a expressão acima por $y_1(t)$ (já conhecido) obtemos a conclusão desejada.

Como já sabemos resolver equações de primeira ordem do tipo acima, obtivemos assim um método para obter uma segunda solução y_2 da edo linear de segunda ordem a partir de uma primeira solução y_1 da edo linear de segunda ordem. O problema, no caso geral, é sempre encontrar uma primeira solução y_1 da edo linear de segunda ordem para começar.

Um exemplo simples é o seguinte: sabendo que $y_1(t) = t^2$ é solução de $y'' - \frac{2y}{t^2} = 0$, temos que $p(t) = 0$ e $q(t) = -\frac{2}{t^2}$ na proposição 5 acima.

Devemos então encontrar y_2 que é solução da edo de primeira ordem $y_2' + p_1(t)y_2 = q_1(t)$, ou seja, que satisfaça $y_2' + \frac{2t}{t^2} y_2 = \frac{e^{-0}}{t^2}$. Usando o fator integrante $u(t) = t^2$ nesta última equação obtemos facilmente $y_2(t) = 1/t$.

Obtemos assim o par de soluções t^2 e $1/t$ para a equação $y'' - \frac{2y}{t^2} = 0$.

Um outro exemplo de uso da proposição 5 é o seguinte: considere $x'' + 3x' = 0$. É fácil ver que $x_1(t) = c$, onde c é constante, é solução. Temos assim uma solução. Desejamos agora encontrar outra solução $x_2(t)$. A partir do que foi visto acima obtemos a equação

$$w(t) = x_1' x_2 - x_2' x_1 = 0x_2 - x_2 x = e^{-3t}.$$

Deduzimos daí que $x_2(t) = e^{-3t}$.

Podemos escolher $c = 1$.

Portanto a solução geral é $a1 + be^{-3t}$, onde $a, b \in \mathbf{R}$.

Vamos considerar agora uma generalização da equação acima.

Considere a equação

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) = 0.$$

Note que

$$\frac{\log x'(t)}{dt} = \frac{x'}{x''} = -\frac{a(t)}{b(t)},$$

e assim,

$$\log(x'(t)) - \log(x'(t_0)) = -\int_{t_0}^{t} \frac{a(s)}{b(s)} ds.$$

Daí segue

$$x'(t) = x'(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a(s)}{b(s)} ds}$$

e, finalmente,

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{l} \frac{a(s)}{b(s)} ds} dl$$

Vamos considerar agora o caso particular de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

Definição 10: A equação diferencial

$$y^{''} + ay' + by = 0,$$

onde a, b são constantes é denominada de equação diferencial linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes. Neste caso vamos considerar $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(-\infty,\infty)}$.

Exemplo 13: A equação diferencial $2y^{''} + 5y' + 8y = 0$, ou equivalentemente $y^{''} + \frac{5}{2}y^{'} + 4y = 0$ é uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes.

Conforme vimos antes, $L = D^2 + aD + bI$ é o operador linear em $\mathcal{F}$, o qual desejamos neste caso (coeficientes constantes) descobrir quem é $N(L)$. Mais precisamente, desejamos saber explicitamente quem são as funções y_1 e y_2 que são os geradores de $N(L)$. Isto será feito a seguir.

Considere primeiro o poliômio $\lambda^2 + a\lambda + b$.

Denomine c e d as raizes de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Sendo assim, $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - c)(\lambda - d) = \lambda^2 - (c + d)\lambda + cd$

Neste caso, $a = -(c + d)$ e $b = cd$.

Definição 11: Dada a equação diferencial $y^{''} + ay^{'} + by$, denominamos o polinômio $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ de polinômio característico associado a equação diferencial $y^{''} + ay^{'} + by = 0$.

A seguir vamos ver que tal polinômio vai ser muito útil para determinar um conjunto de soluções y_1 e y_2 que geram o conjunto de soluções de $y^{''} + ay^{'} + by = 0$

Note que o polinômio característico é definido apenas para a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes.

Suponha para simplificar inicialmente que as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = 0$ sejam reais.

Ora, usando a notação de operadores lineares e considerando $y \in \mathcal{F}$

$$(D - cI) \circ (D - dI)(y) = (D - cI)(Dy) - (D - cI)(dy) =$$

$$= D^2(y) - cD(y) - dD(y) + cdy$$
$$= (D^2 - (c + d)D + cdI)(y) =$$
$$= (D^2 + aD + bI)(y).$$

(estamos usando acima o fato que $-(c + d) = a$, $cd = b$).

Note que para todo $y \in \mathcal{F}$, vale que $(D - cI) \circ (D - dI)(y) = L(y) = (D - dI) \circ (D - cI)(y)$ pois

$$(D - dI) \circ (D - cI)(y) = (D - dI)(Dy) - (D - dI)(cy) =$$

$$= D^2(y) - dD(y) - cD(y) + dcy =$$
$$= (D^2 - (c + d)D + cdI)(y) =$$
$$= (D^2 - aD + bI)(y).$$

(estamos usando acima o fato que $-(c + d) = a$, $cd = b$).

Considere y_1 solução de $(D - cI)(y_1) = 0$ e y_2 solução de $(D - dI)(y_2) = 0$. É fácil ver que tais y_1 e y_2 são soluções da equação

$$0 = L(y) = (D^2 - aD + bI)(y) =$$

$$(D - cI) \circ (D - dI)(y) = (D - dI) \circ (D - cI)(y).$$

De fato, se $(D - dI)(y_2) = 0$, então $L(y_2) = (D - cI) \circ (D - dI)(y_2) = (D - cI)(0) = 0$.

Ainda, se $(D-cI)(y_1) = 0$, então $L(y_1) = (D-dI)\circ(D-cI)(y_1) = (D - dI)(0) = 0$.

Segue da seção ? que já sabemos resolver tais equações, pois

$$(D - cI)(y) = 0 \ \text{ é equivalente à } \quad y' - cy = 0 \Rightarrow y_1(t) = e^{ct},$$

e

$$(D - dI)(y) = 0 \quad \text{é equivalente à} \quad y' - dy = 0 \Rightarrow y_2(t) = e^{dt}.$$

Logo, no caso em que o polinômio caracaterístico tenha duas raízes distintas reais c, d , então $e^{ct}, y_2 = e^{dt}$ é um conjunto fundamental de soluções da edo linear de segunda ordem com coeficientes constantes, pois como vimos no Exemplo 10 temos $w(e^{ct}, e^{dt}) \neq 0$ se $c \neq d$

Importante: Sendo assim, se $c \neq d$ são as raizes reais do polinômio característico $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ associado à equação diferencial $y^{''} + ay^{'} + by = 0$, então a solução geral y de $y^{''} + ay^{'} + by = 0$, se escreve como $y(t) = c_1 e^{ct} + c_2 e^{dt}$, onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Este é o primeiro caso a ser considerado. Posteriormente, vamos analisar o caso de equação diferenciais $y^{''} + ay^{'} + by = 0$ que determinam raízes reais iguais (para o polinômio característico $p(\lambda)$) e ainda o caso de raízes complexas (para o polinômio característico).

Exemplo 14: Calcule a solução de $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 2y = 0$, com as condições iniciais $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Ora, o polinomio característico $\lambda^2 + 4\lambda - 2$ tem raízes $\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$

Logo, como as raízes são reais distintas, um conjunto de soluções é dado por $y_1 = e^{(-2+\sqrt{6})t}, \qquad y_2 = e^{(-2-\sqrt{6})t}$

A solução geral é portanto $y(t) = c_1\, e^{(-2+\sqrt{6})t} + c_2\, e^{(-2-\sqrt{6})t}$

Calculando a derivada obtemos $y'(t) = (-2+\sqrt{6})c_1\, e^{(-2+\sqrt{6})t} + (-2-\sqrt{6})c_2\, e^{(-2-\sqrt{6})t}$

Vamos agora introduzir as condições iniciais

$y(0) = 1, y'(0) = 2$

Teremos que resolver então o sistema

$1 = y(0) = c_1\, e^{(-2+\sqrt{6})0} + c_2\, e^{(-2-\sqrt{6})0}$

$2 = y'(0) = (-2+\sqrt{6})c_1\, e^{(-2+\sqrt{6})0} + (-2-\sqrt{6})c_2\, e^{(-2-\sqrt{6})0}$,

ou seja,

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(-2+\sqrt{6})0} & e^{(-2-\sqrt{6})0} \\ (-2+\sqrt{6})e^{(-2+\sqrt{6})0} & (-2-\sqrt{6})e^{(-2-\sqrt{6})0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix},$$

para encontrar o valor das incógnitas c_1 e c_2, e assim determinar

$$y(t) = c_1\, e^{(-2+\sqrt{6})t} + c_2\, e^{(-2-\sqrt{6})t}.$$

A partir da equação

$$1 = y(0) = c_1\, e^{(-2+\sqrt{6})0} + c_2\, e^{(-2-\sqrt{6})0},$$

obtemos

$$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2.$$

Segue da equação

$$2 = y'(0) = (-2+\sqrt{6})c_1\, e^{(-2+\sqrt{6})0} + (-2-\sqrt{6})c_2\, e^{(-2-\sqrt{6})0}$$

que

$$(-2+\sqrt{6})c_1 + (-2-\sqrt{6})c_2 = 2.$$

Usando o fato que $c_1 = 1 - c_2$, obtemos

$$-2 + \sqrt{6} + 2c_2 - \sqrt{6}\, c_2 - 2c_2 - \sqrt{6}\, c_2 = 2$$

ou seja que

$$-2\sqrt{6}\,c_2 = 4 - \sqrt{6} \Rightarrow c_2 = \frac{4-\sqrt{6}}{-2\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}-6}{-12} = \frac{3-2\sqrt{6}}{6}.$$

O valor c_1 pode então ser finalmente obtido

$$c_1 = 1 - c_2 = 1 - \frac{3-2\sqrt{6}}{6} = \frac{3+2\sqrt{6}}{6}$$

A solução $y(t)$ é portanto dada por

$$y(t) = \frac{3+2\sqrt{6}}{6}\,e^{(-2+\sqrt{6})t} + \frac{3-2\sqrt{6}}{6}\,e^{(-2-\sqrt{6})t}.$$

Se $c = d$ são as raizes reais do polinômio característico, determinamos apenas uma solução $y_1 = y_2 = e^{ct}$. Necessitamos achar uma outra solução que junto com esta gere o espaço $N(L)$. Isto será feito a seguir.

Note que neste caso $(\lambda - c)(\lambda - c) = \lambda^2 + a\lambda + b$ e assim temos que $a = -2c$ e $b = c^2$.

Lembre a proposição 5 que considera uma equação linear de segunda ordem

$$y^{''} + p(t)y^{'} + q(t)y = 0,$$

em que conhecemos uma solução y_1 mostra como obter outra solução y_2 resolvendo $y_2^{'} + p_1(t)y_2 = q_1(t)$, onde $p_1(t) = \frac{y_1'}{y_1}$ e $q_1(t) = \frac{ke^{-\int p(t)\,dt}}{y_1}$.

Vamos aplicar o resultado acima ao caso de equação diferencial com coeficientes constantes em que $p(t) = a$, $q(t) = b$ e $c = d$ acima são reais.

Para encontrar outra solução $y_2(t)$ de (9) vamos usar o fato que se $y_1(t) = e^{ct}$ (que nunca se anula) e $y_2(t)$ (a ser determinada) são soluções de $y^{''} + ay^{'} + by = 0$, então se $w(t) = w(y_1, y_2)(t)$, vale que $w(t)$ satisfaz a equação $w' + p(t)w = 0$.

Note que neste caso

$$w(t) = ke^{-\int p(t)\,dt} = k\,e^{-at}.$$

Seja $y_1 = e^{ct}$ a solução inicialmente encontrada e y_2 outra solução procurada tal que $w(t)$ não é nula para algum valor $t = t_0$.

Ora,

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = w(t) = k\,e^{-\int p(t)\,dt}$$

ou seja

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1}y_2 = \frac{k}{y_1}e^{-\int p(t)\,dt},$$

pois $y_1(t) = e^{ct} \neq 0, \forall\, t \in \mathbf{R}$, logo y_2 satisfaz a equação $y_2^{'} + p_1(t)y_2 = q_1(t)$.

Esta equação $y_2^{'}+p_1(t)y_2=q_1(t)$ é linear em y_2, e pode ser resolvida como vimos antes quando analisamos as equação lineares de primeira ordem não homogêneas na seção I.2.

Para resolver a equação acima devemos encontrar o fator integrante $u(t)$ que deve satisfazer

$$u'(t)=-u(t)c \Rightarrow u(t)=e^{-tc}.$$

Obtemos assim a equação equivalente,

$$e^{-tc}y_2^{'}-e^{-tc}cy_2=ke^{-\int p(t)dt}e^{-ct},$$

mas como $p(t)=a=-2c$, obtemos

$$y_2' \, e^{-tc}-c\, e^{-tc}y_2=k\, e^{2tc}\, e^{-2tc}=k,$$

e neste caso obtemos a equação

$$(e^{-tc}\, y_2)'=k,$$

podemos supor agora sem perda de generalidade que $k=1$, logo,

$$(e^{-tc}y_2)'=1,$$

integrando em relação à t

$$e^{-tc}\, y_2=t+c$$

tomando c=0, obtemos finalmente

$$y_2(t)=t\, e^{tc}.$$

Concluimos portanto que $y_2(t)=t\, e^{tc}$ deve também ser solução da equação $y^{''}+ay^{'}+by=0$, quando o polinômio característico $\lambda^2+a\lambda+b$ tem raiz dupla real igual à c, isto é quando $\lambda^2+a\lambda+b=(\lambda-c)^2$.

Vamos checar se tal função y_2 é realmente solução. Ora, $y'(t)=e^{tc}+cte^{tc}$, portanto

$$y^{''}(t)=c\, e^{tc}+c\, e^{tc}+c^2t\, e^{tc}=(2c+c^2t)e^{tc},$$

logo

$$y^{''}(t)-2cy'(t)+c^2y(t)=(2c+c^2t)e^{tc}-(2c+2c^2t)e^{tc}+c^2t\, e^{tc}=0.$$

Portanto, de fato $y_2(t)=t\, e^{tc}$ é solução da equação (9).

Conforme o exemplo 11 as funções $y_1(t)=e^{ct}$ e $y_2=te^{ct}$ tem wronskiano não nulo. Como elas são soluções de $y^{''}+ay^{'}+by=0$, y_1 e y_2 acima definidos geram neste caso (c=d) o subespaço vetorial $N(L)$.

Importante: Em resumo, se $c = d$ são as raizes reais do polinômio característico $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ associado à equação diferencial $y^{''} + ay^{'} + by = 0$, então a solução geral y de $y^{''} + ay^{'} + by = 0$, se escreve como $y(t) = c_1 e^{ct} + c_2 t\, e^{dt}$, onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Exemplo 15: Encontre a solução e $y^{''} + 4y^{'} + 4y = 0$, com as condições iniciais $y(0) = 1$, $y^{'}(0) = 3$.

As raizes do polinômio característico são $c = d = -2$, logo a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t\, e^{-2t}.$$

As constantes c_1 e c_2 são finalmente determinadas a partir das equações $y(0) = 1$ e $y^{'}(0) = 3$ obtendo assim $c_1 = 1$ e $c_2 = 5$.

Concluimos finalmente que a solução desejada é

$$y(t) = e^{-2t} + 5te^{-2t}.$$

Vamos fazer agora um pequeno resumo do que foi visto até agora.

Suponha que o polinômio característico $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ da equação $y^{''} + ay^{'} + by = 0$ tem raízes reais c e d, isto é

$$(\lambda - c)(\lambda - d) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

então no caso em que

$$c \neq d \Rightarrow y(t) = c_1\, e^{tc} + c_2\, e^{dt}$$

determina a solução geral, e no caso em que

$$c = d \Rightarrow y(t) = c_1\, e^{tc} + c_2\, t\, e^{tc}$$

determina a solução geral.

Resta ainda o caso em que as raízes são complexas

$$c, d \in \mathbf{C}, \;\; c = r + si, \;\; d = r - si.$$

As raizes c, d devem ser conjugadas pois se $c^2 + ac + b = 0$, tomando o conjugado em ambos os lados, obtemos $0 = \bar{0} = \overline{c^2 + ac + b} = \bar{c}^2 + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}$, e como a, b são reais, obtemos $0 = \bar{c}^2 + a\bar{c} + b$ e assim finalmente concluimos que $\bar{c}$ também é raiz do polinômio com coeficientes reais $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Afirmamos que neste caso a solução geral de $y^{''} + ay^{'} + by = 0$ é

$$y(t) = c_1\, e^{rt} \cos(s\, t) + c_2\, e^{rt} \mathrm{sen}(s\, t)$$

Este resultado está demonstrado em [DL] ou [HS].

Importante: Em resumo, se $c = r + si$ e $d = r - si$ são as raizes reais do polinômio característico $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ associado à equação diferencial $y^{''} + ay^{'} + by = 0$, então a solução geral y de

$y^{''} + ay^{'} + by = 0$, se escreve como $y(t) = c_1\, e^{rt} \cos(s\,t) + c_2\, e^{rt}\text{sen}(s\,t)$ onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Desta maneira todos os possíveis casos envolvendo equação diferencial $y^{''} + ay^{'} + by = 0$, onde a e b são constantes foram tratados. Quando os coeficientes da equação diferencial linear de segunda ordem são não constantes existem vários casos particulares em que se consegue explicitar a solução geral. Não existem, no entanto, resultados gerais explícitos (como no caso em que a e b são constantes).

Exemplo 16: Encontre a solução geral de

$$y^{''} + 2y' + 4y = 0.$$

Ora, o polinômio característico neste caso é

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3},$$

portanto a solução geral é

$$y(t) = c_1\, e^{-t} \cos \sqrt{3}\, t + c_2\, e^{-t}\text{sen}\sqrt{3}\, t.$$

Exemplo 17: Vamos agora resolver a equação acima com as condições iniciais $y(1) = 2$, $y^{'}(1) = 4$.

Note que

$$y^{'}(t) = -c_1\, e^{-t} \cos \sqrt{3}\, t - c_1\, e^{-t}\sqrt{3}\text{sen}\sqrt{3}\, t -$$

$$c_2\, e^{-t}\text{sen}\sqrt{3}\, t + c_2\, e^{-t}\sqrt{3} \cos \sqrt{3}\, t$$

Basta resolver em c_1 e c_2 o sistema linear

$$2 = y(1) = c_1\, e^{-1} \cos \sqrt{3} + c_2\, e^{-1}\text{sen}\sqrt{3}$$

$$4 = y^{'}(1) = -c_1\, e^{-1} \cos \sqrt{3} - c_1\, e^{-1}\sqrt{3}\text{sen}\sqrt{3} +$$

$$c_2\, e^{-1}\text{sen}\sqrt{3} + c_2\, e^{-1}\sqrt{3} \cos \sqrt{3}$$

e substituir c_1 e c_2 em

$$y(t) = c_1\, e^{-t} \cos \sqrt{3}\, t + c_2\, e^{-t}\text{sen}\sqrt{3}\, t.$$

Exercícios:

1) Considere o operador diferencial L de segunda ordem tal que $L(x) = x'' - 3tx' + 3x$. Calcule as funções $L(e^{2t})$, $L(cost)$ e $L(3e^t + 5\cos t)$.

2) Mostre que $x_1(t) = \sqrt{t}$ e $x_2(t) = \frac{1}{t}$ são soluções da equação diferencial $2t^2x'' + 3tx' - x = 0$ no intervalo $t \in (0, \infty)$.

Calcule a seguir o wronskiano $w(t)$ de x_1 e x_2.

O que acontece com $w(t)$ quando $t \to \infty$?

Mostre que x_1 e x_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial no intervalo $t \in (0, \infty)$.

Encontre a solução da equação diferencial que satisfaz $x(1) = 2, x'(1) = 1$.

3) Calcule o wronskiano de

a) $\operatorname{sen}(at)$ e $\cos(at)$.

b) e^{at} e $\cos(at)$

4) Mostre que $x(t) = t^2$ não é solução de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ se as funções $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas em $t = 0$.

5) Seja $x_1(t) = t|t|$ e $x_2(t) = t^2$.

Mostre que x_1 e x_2 são linearmente dependentes no intervalo $0 \leq t \leq 1$.

Mostre a seguir que x_1 e x_2 são linearmente independentes no intervalo $-1 \leq t \leq 1$.

Mostre que o wronskiano de x_1 e x_2 é nulo para todo t.

Mostre que x_1 e x_2 não são soluções da equação diferencial $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ no intervalo $-1 \leq t \leq 1$, se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuos neste intervalo.

6) Suponha que o wronskiano de qualquer duas soluções de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ é constante, mostre que $p(t) = 0$ para todo t.

7) Mostre que se x_1 e x_2 se anulam no mesmo ponto t_1 no intervalo (a, b), então elas não formam um conjunto fundamental de soluções de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ neste intervalo.

8) Mostre que se x_1 e x_2 atingem um máximo no mesmo ponto t_1 no intervalo (a, b), então elas não formam um conjunto fundamental de soluções de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ neste intervalo.

9) Mostre que se x_1 e x_2 são um conjunto fundamental de soluções de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ no intervalo (a, b) então não pode existir $t_1 \in (a, b)$ tal que $x_1'(t_1) = 0 = x_2'(t_1)$, a menos que $p(t_1) = 0 = q(t_1)$.

10) Mostre que se x_1 e x_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ no intervalo $t \in (-\infty, \infty)$, então existe um e apenas um zero de x_1 entre dois zeros consecutivos de x_2.

11) Encontre a solução geral $x(t)$ de

a) $6x'' - 7x' + x = 0$

b) $x'' - 3x' + x = 0$

12) Encontre a solução $x(t)$ da equação diferencial com as respectivas condições iniciais

a) $x'' - 3x' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$

b) $x'' - 3x' - 4x = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 1$

c) $2x'' + x' - 10x = 0$, $x(1) = 7$, $x'(1) = 1$

13) Encontre a solução geral $x(t)$ de

a) $2x'' + 3x' + 4x = 0$

b) $x'' + 2x' + 3x = 0$

14) Encontre a solução $x(t)$ da equação diferencial satisfazendo as condições iniciais

a) $x'' + 2x' + 3x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$
b) $x'' + x' + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$
15) Encontre a solução geral $x(t)$ de
a) $x'' - 6x' + 9x = 0$
b) $4x'' - 12x' + 9x = 0$
16) Encontre a solução $x(t)$ da equação diferencial satisfazendo as condições iniciais
a) $4x'' - 12x' + 9x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$
b) $9x'' + 6x' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

II.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de segunda ordem não-homogêneas

Teorema 6: Se $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ são contínuas no intervalo (a, b), então existe solução única $y(t)$ de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t) \quad , \qquad (12)$$

com as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y_0^1$$

para todo t no intervalo (a, b).

Sabemos portanto que a solução $y(t)$ existe e é única. Vamos a seguir mostrar como se pode tentar descobrir a solução geral $y(t)$ deste problema.

Considere a equação geral linear de segunda ordem

$$y^{''} + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (*)$$

Considere L o operador linear

$$L = D^2 + p(t)D + q(t)I$$

onde D é o operador de derivação e I é o operador identidade.

Para encontrar as soluções y da equação $y^{''} + p(t)y^{'} + q(t)y = g(t)$, basta determinar o conjunto $L^{-1}(g) = \{x \mid Lx = g\}$.

Isto é, para g fixado, desejamos encontrar quais são as funções $y(t)$ tais que

$$(D^2 + p(t)D + q(t)I)(y(t)) = g(t).$$

Vamos mostrar que $L^{-1}(g) = \{x \mid Lx = g\}$, é um subespaço afim de $N(L)$ contido em $\mathcal{F}$. Em outras palavras $N(L)$ é um subespaço vetorial e $L^{-1}(g) = N(L) + \psi$ onde ψ é uma função fixada e que satisfaz $L(\psi) = g$ (ver Proposição 7).

Observação 9: Se $p(t)$ e $q(t)$ são constantes e $g(t)$ é não nula em (12) acima diremos que a equação é não homogênea com coeficientes constantes.

Definição 12: Dada a equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

denominamos

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad (13)$$

de equação homogênea associada a equação não homogênea(12).

Proposição 7: Seja y_1, y_2 conjunto fundamental de soluções de (13). Seja ψ uma solução particular de (12). Então a solução geral de (12) é $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \psi$.

Demonstração: Antes de demonstrar o teorema necessitamos do seguinte lema:

Lema 8: Se $f(t)$ e $h(t)$ são soluções de (12), então $f(t) - h(t)$ é solução de (13).

Demonstração do Lema:: $f(t)$ e $h(t)$ são soluções de (12) $\Rightarrow L(f(t)) = g(t)$ e $L(h(t)) = g(t) \Rightarrow L(f(t) - h(t)) = L(f(t)) - L(h(t)) = g(t) - g(t) = 0 \Rightarrow f(t) - h(t)$ é solução de (13).

Demonstração do teorema: Considere fixado ψ tal que $L(\psi) = g$, então denote por y_1, y_2 um cojunto fundamental de soluções de (13) $\Rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2$ é a solução geral de (13). Seja f solução de (12) então o lema acima implica que $f - \psi$ é solução de (13)
pois ψ é solução de (*) por hipótese
$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ tq $f(t) - \psi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \psi(t)$.

Importante: Concluímos portanto que para encontrar y a geral solução da equação não homogênea, devemos encontrar a solução geral da equação homogênea $c_1 y_1 + c_2 y_2$ e a seguir somar com uma solução particular ψ, obtendo assim a solução geral da equação não-homogênea $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \psi$, onde c_1 e c_2 são constantes. Uma descrição pictórica do conjunto $L^{-1}(g) = N(L) + \psi$ aparece na Figura 7.

Por exemplo, considere a equação não homogênea $y'' - y = 6t - t^3 = g(t)$. Ora, como $\psi(t) = t^3$ é solução particular de $y'' - y = 6t - t^3 = g(t)$, então a solução geral da equação não-homogênea é $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + t^3$, pois, $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ é a solução geral da homogênea associada $y'' - y = 0$.

Exemplo 18: Desejamos encontrar a solução geral de $\frac{d^2y}{dt^2} + y = t$.

A equação homogênea associada é: $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ e o polinômio característico desta última equação é $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

Solução geral de $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ é portanto $z(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen} t$.

Uma solução particular da equação (12) é $\psi(t) = t$, conforme é fácil checar.

Logo a solução geral de $\frac{d^2y}{dt^2} + y = g(t) = t$ é $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen} t + t$.

Vamos resolver agora a equação $\frac{d^2y}{dt^2} + y = t$, com as condições iniciais $y(1) = 7$, $y'(1) = -5$.

Das equações $y(1) = 7$, $y'(1) = -5$ obtemos o sistema

$$y(1) = c_1 \cos 1 + c_2 \text{sen} 1 + 1 = 7$$
$$y(1) = -c_1 \text{sen} 1 + c_2 \cos 1 + 1 = -5$$

ou equivalentemente

$$c_1 \cos 1 + c_2 \text{sen} 1 = 6$$

$$-c_1 \text{sen} 1 + c_2 \cos 1 = -6$$

Ora, resolvendo a equação pelo método dos determinantes

$$\det \begin{pmatrix} \cos 1 & \text{sen} 1 \\ -\text{sen} 1 & \cos 1 \end{pmatrix} = \cos^2 1 + \text{sen}^2 1 = 1,$$

logo o sistema acima tem solução

$$c_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 6 & \text{sen} 1 \\ -6 & \cos 1 \end{pmatrix}}{1} = 6 \cos 1 - 6 \text{sen} 1$$

$$c_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} \cos 1 & 6 \\ -\text{sen} 1 & -6 \end{pmatrix}}{1} = -6 \cos 1 + 6 \text{sen} 1$$

Obtemos finalmente que $y(t)$ solução de $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ com as condições iniciais $y(1) = 7$, $y^{'}(1) = -5$ é

$$y(t) = (6 \cos 1 - 6 \text{sen} 1) \cos t + (-6 \cos 1 + 6 \text{sen} 1) \text{sen} t + t.$$

O leitor deve estar perguntando, neste momento, como determinamos $\psi(t) = t$ no último exemplo. Vamos apresentar a seguir um método geral para determinar uma solução particular da equação não homogênea.

Exercícios:

1) Mostre que t^2 é solução de $x'' - x = 2 - t^2$. A seguir encontre a solução geral da equação diferencial não homogenea.

II.4 Método da Variação dos Parâmetros

Vamos apresentar agora um método prático e útil para encontrar uma solução particular da equação não homogênea. Este método é denominado de método da variação dos parâmetros.

O método é bastante geral e será aplicado a equação de segunda ordem $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$.

Considere a equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

e y_1, y_2 conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada (que existe conforme teorema 6).

Vamos tentar encontrar solução ψ da forma

$$\psi(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t).$$

A expressão acima justifica o nome do método, ou seja o método da variação dos parâmetros (no caso os parâmetros c_1 e c_2). A partir de um conjunto de soluções da equação homogênea associada, vamos obter uma solução da equação não homogênea.

A seguir mostraremos como encontrar $c_1(t)$ e $c_2(t)$ tal que $\psi(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ determine uma solução particular da equação não homogênea.

Derivando $\psi(t)$ obtemos

$$\psi'(t) = c_1y_1' + c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_2y_2'.$$

Vamos impor a condição $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$

Observação 10: Esta imposição (que como veremos a seguir é permitida) visa facilitar o cálculo posterior.

Em função da condição imposta, concluímos que $\psi'(t) = c_1y_1' + c_2y_2'$

Portanto, $\psi''(t) = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''$

Se ψ é solução particular:

$$\psi'' + p(t)\psi' + q(t)\psi = g(t),$$

logo

$$c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' + p(t)[c_1y_1' + c_2y_2'] + q(t)[c_1y_1 + c_2y_2] = g(t).$$

Como y_1 e y_2 são soluções da homogênea então

$$c_1y_1'' + c_1p(t)y_1' + c_1q(t)y_1 = 0$$

e

$$c_2y_2'' + c_2p(t)y_2' + c_2q(t)y_2 = 0,$$

sendo assim somando as duas expressões acima

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p(t)[c_1 y_1' + c_2 y_2'] + q(t)[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0.$$

Do que foi descrito acima concluímos que $c_1' y_1' + c_2' y_2' = g(t)$.

Obtemos assim o seguinte sistema que deve ser satisfeito para $c_1(t)$ e $c_2(t)$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = g(t) \end{cases}$$

A primeira equação é fruto da imposição que fizemos. Fica claro neste momento que a imposição é permitida (ver observação 10) pois temos acima um sistema de duas equações à duas incógnitas c_1' e c_2'.

O sistema pode ser resolvido pois o wronskiano de y_1 e y_2 é não nulo, isto é

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \quad = \quad y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

$\Rightarrow$ existem soluções c_1' e c_2' dados por

$$c_1' = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y_2' \end{pmatrix}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = \frac{-y_2(t) g(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} \Rightarrow$$

$$c_1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-y_2(s) g(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} \; ds$$

e do mesmo modo

$$c_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s) g(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} \; ds.$$

Concluímos portanto que para obter ψ solução particular, basta escolher $c_1(t)$ e $c_2(t)$ como acima e e portanto $\psi(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$ vai ser uma solução desejada da equação não homogênea.

Vamos escrever a expressão acima de uma maneira mais compacta

$$\psi(t) = (\int_{t_0}^{t} \frac{-y_2(s) g(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} \; ds) \; y_1(t) +$$

$$(\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s) g(s)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} \; ds) \; y_2(t) =$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{(-y_2(s) y_1(t) + y_1(s) y_2(t))}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} \; g(s) \; ds. \qquad (14)$$

Denote $G(s,t)$ por

$$G(s,t) = \frac{(-y_2(s) y_1(t) + y_1(s) y_2(t))}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} \qquad (**).$$

Note que no denominador aparece o wronskiano de y_1 e y_2.

A expressão (14) acima expressa de maneira sintética a relação

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} G(s,t)g(s)ds. \qquad (***)$$

Fica assim, através da expressão integral acima, determinado como calcular uma solução particular $\psi(t)$.

Na verdade podemos pensar que existe uma função linear H (que leva funções em funções, isto é, $H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$) agindo nas funções g e que nos determina $\psi = H(g)$ através de

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} G(s,t)g(s)ds.$$

É fácil ver que H define um operador linear agindo sobre g. Operadores deste tipo são muito usuais e importantes na análise de equações diferenciais lineares. A função $G(s,t)$ é muitas vezes chamada de Kernel de Green da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

Considere $L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y$. A relação de L com H é dada por

$$LoH(g) = L(H(g)) = L(\psi) = g,$$

ou seja H é uma inversa a direita de L. Como L não é injetivo ele não tem inversa a esquerda.

H é um operador integral, enquanto L é um operador diferencial.

Referimos o leitor a [II][BD][Bu] para mais resultados sobre funções de Green e suas aplicações as equações diferenciais parciais.

Importante: Para calcular uma solução particular $\psi(t)$ de $y^{''} + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, tome y_1 e y_2 soluções de $y^{''} + p(t)y' + q(t)y = 0$ (com wronskiano não nulo) e substitua $g(s)$ em (***), onde $G(s,t)$ é definido por (**).

Exemplo 19: Vamos encontrar agora a solução geral de $\frac{d^2y}{dt^2} + y = t$ pelo método da variação dos parâmetros.

Vamos determinar a seguir uma solução particular ψ usando (***) acima.

Para facilitar as contas vamos supor $t_0 = 0$.

Ora a equação homogênea associada tem como solução geral $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$. Sendo assim podemos considerar $y_1 = \cos t$ e $y_2 = \operatorname{sen} t$.

Primeiro vamos calcular $G(s,t)$. Ora, o wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s) = 1.$$

Vamos tentar encontrar uma solução particular da forma

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} G(s,t)g(s)ds.$$

A partir da expressão (**) acima, como

$$y_1(s)y_2^{'}(s) - y_2(s)y_1^{'}(s) = 1$$

temos que

$$G(s,t) = (-y_2(s)y_1(t) + y_1(s)y_2(t)) = \text{sen}(t-s).$$

Vamos agora multiplicar a expressão acima por $g(s)$

$$G(s,t)\,g(s) = G(s,t)\,s = (-y_2(s)y_1(t) + y_1(s)y_2(t))\,s = s\,\text{sen}(t-s).$$

A seguir para obter ψ vamos integrar por partes (***)

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} s\,\text{sen}(t-s)ds = -\int_0^t \cos(t-s)ds + s\ \cos(t-s)|_0^t =$$

$$-\text{sen}(t-s)|_0^t + t - 0\cos(t) = \text{sen}\ (t) + t.$$

Obtemos assim que a solução geral da equação acima é $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen}\, t + \text{sen}\, t + t$.

Podemos absorver na constante c_2 o coeficiente 1 de $\text{sen}\, t$ obtendo finalmente a expressão geral da equação não homogênea

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen}\, t + t.$$

Fica assim explicado como descobrimos no exemplo 18 a expressão da solução particular $\psi(t) = t$.

Vamos ver a seguir uma classe grande de exemplos de equações diferenciais de segunda ordem provenientes da física.

Exemplo 20: Considere uma mola de massa desprezível à qual é presa em uma ponta uma partícula de massa m. Vamos supor que a outra ponta da mola está presa a uma parede e que só pode se deslocar sobre uma reta à qual é dada um sistema de coordenadas em que a posição de equilíbrio da mola está no ponto 0. Observa-se experimentalmente que dado um afastamento de tamanho x da partícula da sua posição de equilíbrio, a partícula sofre através da reação da mola uma força de intensidade $-kx$, onde k é uma constante positiva (denominada constante de elasticidade). Isto é, a força de repulsão depende linearmente do deslocamento (ver Figuras 10 e 11). Como se sabe, a repulsão é no sentido oposto ao deslocamento. Este fato é naturalmente observado apenas para pequenos deslocamentos. A mola pode até romper-se, em caso de grande delocamento da partícula de sua posição de equilíbrio. Sendo assim, considerando que vamos permitir apenas pequenos deslocamentos, é natural supor que o campo de forças é $f(x) = -kx$. Vamos supor que $x(t)$ vai descrever a posição da partícula no instante t sujeito ao campo de

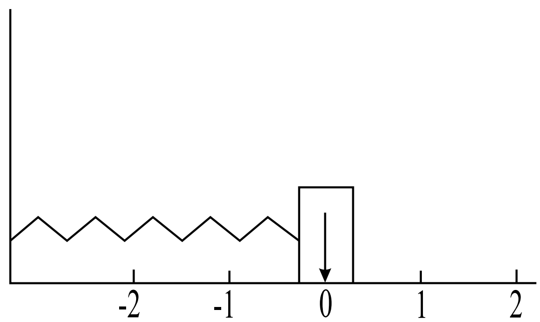

Figura 1.10:

forças $-kx$. Segue da Lei de Newton que a solução $x(t)$ deste sistema mecânico deve satisfazer

$$mx''(t) = f(x(t)) = -kx(t).$$

Ou seja, devemos resolver uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes para encontrar a solução $x(t)$. Como é conhecido (ver Teorema 0), dados os valores iniciais $x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}$ e $x'(t_0) = y_0 \in \mathbf{R}$, a solução de tal equação será determinada de maneira única. Este fato é bastante intuitivo, pois para saber como vai ser a evolução temporal do extremo da mola, não basta saber de onde ela vai ser largada no tempo $t = 0$, mas também com que velocidade inicial vamos lançá-la.

A solução, como sabemos será obtida através do polinômio característico de $mx'' + kx = 0$, que neste caso é:

$$0 = \lambda^2 + \frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i.$$

A solução será então:

$$x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + y_0\sqrt{\frac{m}{k}}\mathrm{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Note que $x(t)$ pode ser escrito na forma $x(t) = A\cos(a+wt)$ onde A, a são constantes. Esta expressão descreve o fato que a solução $x(t)$ irá ficar oscilando em torno do ponto 0.

Vamos considerar agora outro exemplo.

Muitas vezes a força f depende não apenas de x, mas também de $\dot{x}$, como por exemplo no caso da mola com atrito, em que o campo de forças é dado por

$$f(x, \dot{x}) = -kx - c\dot{x},$$

aonde k é a constante de elasticidade, mas aparece agora a constante c de atrito. Esta constante vai ser responsável por frear a mola através do atrito.

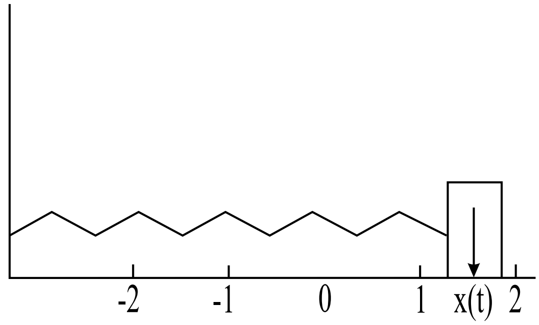

Figura 1.11:

Exemplo 21: A mola com atrito.

Vamos agora considerar a mola com atrito, e mostrar que o ponto de equilíbrio $x_0 = 0 \in \mathbf{R}^2$ é assintoticamente estável.

Neste caso a equação da mola vai ser

$$mx'' = -kx - cx',$$

onde k é a constante positiva de reação da mola (da mesma maneira que na mola sem atrito) e c é a constante positiva de atrito. Isto é, estamos supondo que o atrito é linear na velocidade. Para sermos mais precisos em termos Físicos, teríamos que supor que a mola está mergulhada em um fluido, que vai causar o atrito e tem baixa velocidade, para que a hipótese de linearidade do atrito na velocidade seja aplicável (aproximadamente).

Supondo isto, vamos prosseguir.

A equação da mola com atrito é equivalente a

$$ax'' + bx' + cx = 0,$$

com $a = m$, $b = c$, $c = k$.

A última proposição nos obriga primeiramente a calcular o polinômio característico que é $mx^2 + cx + k = 0$. Note que $m,\ k,\ c$ são todos positivos; sendo assim, se assumirmos $c^2 - 4mk > 0$, então as soluções do polinômio característico serão ambas reais negativas pois

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} < 0$$

e

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} < \frac{-c + \sqrt{c^2}}{2m} = 0.$$

Logo $x(t)$ será da forma:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

As constantes c_1 e c_2 são obtidas a partir das condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $x^{'}(t_0) = x_0^1$ resolvendo o sistema linear

$$x_0 = x(t_0) = c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0},$$

$$x_0^1 = x^{'}(t_0) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0}.$$

Note que qualquer solução $x(t)$ tem a propriedade que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ pois λ_1 e λ_2 são negativos.

No caso em que $c^2 - 4mk < 0$ (isto é, quando o atrito é muito grande), a solução $x(t)$ é dada por

$$x(t) = c_1 e^{-ct/2m} \cos\sqrt{c^2 - 4mk}t/2m + c_2 e^{-ct/2m} \mathrm{sen} \sqrt{c^2 - 4mk}t/2m.$$

Da mesma maneira como antes, a partir das condições iniciais, as constante c_1 e c_2 podem ser encontradas resolvendo um sistema linear.

Note que como $-c/2m$ é negativo $x(t)$ converge a zero quando t tende a infinito.

No caso em que existe uma força $f(t)$ externa à ação da mola, obtemos pela Lei de Newton a equação:

$$mx'' = -kx - cx' + f(t).$$

A equação da mola com atrito sujeita à força externa é equivalente a

$$ax'' + bx' + cx = f(t),$$

com $a = m$, $b = c$, $c = k$.

Esta equação é a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea.

Para resolver tal equação, procedemos da seguinte maneira: primeiros resolvemos a equação homogênea associada através do polinômio característico, como acima, e a seguir, tentamos encontrar pelo método da variação dos parâmetros uma solução particular da equação não-homogênea. A solução geral é obtida finalmente somando a solução geral da equação homogênea associada com uma solução particular da equação não-homogênea.

Para um estudo detalhado da Mecânica Clássica referimos o leitor para [L].

Vamos ver a seguir outra classe de exemplos.

Exemplo 22: Circuitos elétricos.

Uma classe de exemplo de aplicação de equações diferenciais lineares não homogêneas de segunda ordem provém de circuitos elétricos.

Considere um circuito do tipo RLC, isto é, existe uma força eletromotriz E (que pode ser causada por uma bateria ou um gerador) que produz uma diferença de voltagem a qual por sua vez produz uma corrente de intensidade I.

Esta corrente atravessa um circuito elétrico. Pergunta: como podemos obter a expressão da intensidade da corrente $I(t)$?

A Lei de Kirchoff vai determinar a corrente $I(t)$. Esta lei será descrita a seguir. Antes de mais nada algumas definições.

O símbolo R representa uma resistência que pode ser causada, por exemplo, por uma lâmpada.

Quando a corrente atravessa uma bobina de arame, produz-se um campo magnético que pode gerar movimento. Isto é o que acontece por exemplo em um liquidificador. A variação de voltagem produzida pela:

a) a queda de voltagem através da resistência R é igual a RI (Lei de Ohm).

b) a queda de voltagem através do indutor L é igual a

$$L\left(\frac{dI}{dt}\right).$$

c) a queda de voltagem através do capacitor C é igual a

$$\frac{Q}{C}.$$

A Lei de Kirhoff afirma que

$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}.$$

Como a intensidade de corrente é dada por

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt},$$

ou seja, é a variação de carga, obtemos derivando a última expressão que $Q(t)$ deve satisfazer a equação

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d}{dt}E(t).$$

Esta equação é linear de segunda ordem e não homogênea. Dependendo do $E(t)$ aplicado, e das condições iniciais o circuito vai apresentar uma resposta $I(t)$ diferente. Utilizando o que foi descrito acima para equações lineares de segunda ordem podemos determinar a partir da lei de Kirchoff a solução da intensidade de corrente $I(t)$ que está sujeito tal circuito.

Exercícios:

1) Encontre a solução geral $x(t)$ de

a) $x'' + x = \sec t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

b) $x'' - 4x' + 4x = te^{2t}$
c) $x'' + 4x' + x = 2t^2$
d) $x'' + x' - 2x = e^t$ (tente soluções particulares do tipo cte^t).
e) $x'' + x' + 3x = \text{sen } t$ (tente soluções particulares do tipo (a cos $t + b$ sen t)).
d) $x'' + x' - 2x = at^{n+1} + bt^n$ (tente soluções particulares do tipo polinômios de grau $n+2$).
2) Encontre a solução $x(t)$ da equação diferencial satisfazendo as condições iniciais
a) $3x'' + 4x' + x = (\text{sen}t)e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$
b) $x'' + 4x' + 4x = t^{5/2}e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$
3) A equação diferencial

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 t\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0,$$

onde a_1, a_0 são constantes, é chamada equação de Euler. Encontre a solução geral em função das raízes do polinômio $m(m-1)+a_1m+a_0 = 0$.

Lembre-se que essas raízes podem ser complexas.

(Sugestão: faça a mudança de coordenadas $\mu = \log t$).

II.5 Soluções em Séries de Potências

Os resultados e métodos para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem através de séries de potências são em tudo semelhantes aos já analisados para equações de primeira ordem em I.5.

Definição 13: Dizemos que uma função $f(x_1, x_2)$ é analítica nas variáveis x_1, x_2 se existem números reais $b_{n,m}, n, m \in \mathbf{N}$, tal que f pode ser expressa como

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=0,m=0}^{\infty} b_{n,m}x_1^n x_2^m$$

para todo x_1 e x_2.

Teorema 9: Seja $f(x, x')$ analítica nas variáveis x e x', então $x(t)$ solução de $x'' = f(x, x')$, $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0^1$, é analítica em certo intervalo $(t_0 - \zeta, t_0 + \zeta), \zeta > 0$.

A demonstração do resultado acima foge ao escopo deste texto (ver [S]) para resultados sobre o assunto).

Para encontrar a solução $x(t)$ de uma equação diferencial em que $f(x, x')$ é analítica, basta manipular algebricamente os coeficientes para tentar descobrir a expressão analítica da solução $x(t)$. Vamos dar a seguir um exemplo de como proceder:

Exemplo 23: Considere a equação $x'' + x = 0$.

Vamos tentar descobrir uma solução do tipo

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ...$$

Neste caso

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + ...$$

e

$$x''(t) = 2a_2 + 3\, 2a_3 t + 4\, 3a_4 t^2 + 5\, 4a_5 t^3.$$

Substituindo $x(t)$ na equação $x'' = -x$ e igualando os coeficientes das séries dos dois lados obtemos indutivamente

$$a_2 = -\frac{a_0}{2},\ a_4 = \frac{a_2}{4\,.3},\ a_6 = -\frac{a_4}{6\,.5},\ ...$$

e

$$a_3 = -\frac{a_1}{3\,.2},\ a_5 = \frac{a_3}{5\,.4},\ a_7 = -\frac{a_5}{7\,.6},\ ...$$

Disto resulta que para j impar

$$a_j = (-1)^{(j-1)/2} \frac{a_1}{j!}$$

e para j par

$$a_j = (-1)^{j/2} \frac{a_0}{j!}.$$

Portanto $x(t) = a_0 \cos t + a_1$sen t. Descobrimos assim uma nova maneira de obter o resultado já conhecido sobre a solução geral de $x'' = x$.

Referimos o leitor a [DL] e [BD] para uma análise mais datalhada do assunto.

Exercício:

1) Encontre a solução de $x'' = tx + t, x(0) = 1$
2) Encontre a solução geral de $x'' = t^2 x$.

II.6 A Transformada de Laplace

Desejamos obter métodos gerais mais práticos para obter soluções de equações lineares do tipo

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

com as condições iniciais
$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0^1$

O método que será desenvolvido a seguir é muito útil para se obter soluções de tais equações.

Definição 14: Seja $f(t)$ definida para $0 \leq t < +\infty$, então a transformada de Laplace de $f(t)$ denotada

$$F(s) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(f(t))$$

é determinada pela expressão

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, dt. \quad , \qquad (14)$$

definida apenas para $s > 0$.

É usual denotar por $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, ou seja permitimos o valor infinito no conjunto $\mathbf{R}^*$.

A notação usual é supor que f está na variável t e a sua transformada F (que é também uma função) está definida para a variável s. Fica definida assim uma lei que associa a cada função f uma outra função $F = \mathcal{L}(f)$ dada por

$$\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

onde

$$\mathcal{L}(f) = F,$$

ou, escrevendo de outra forma

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s),$$

e onde $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(0,\infty)} = \{f : (0, \infty) \to \mathbf{R}^*, \text{ diferenciáveis por partes}\}$.

Como veremos a seguir é natural assumir que algumas das funções que vamos trabalhar possam assumir o valor infinito. Existem mais restrições ao conjunto das funções que vamos trabalhar, pois é necessário que $\mathcal{L}(f)$ esteja bem definido para $f \in \mathcal{F}$. Neste caso $f(t)$ deve ter um certo comportamento no infinito ($f(t)$ decair muito rapidamente quando $t \to \infty$) para que possa convergir a integral (14). Para não entrar em detalhes técnicos que não são essenciais no momento, vamos evitar discutir tal questão.

Devemos encarar a transformada de Laplace $\mathcal{L}(f) = F$, como uma mudança de variável definida no espaço de funções, ou seja uma regra $\mathcal{L}$ que associa de maneira única f à F (de maneira bijetiva). Está associação bijetiva entre f e F terá propriedades extremamente úteis quando relacionadas com a operação de derivação e estas propriedades serão fundamentais para seu uso em equações diferenciais como veremos em breve.

Exemplo 24: Vamos considerar a seguir a transformada de Laplace da função constante igual à 1.

$$1) \qquad \mathcal{L}(1) \quad = F(s) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right)_0^A =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{e^{-sA}}{s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}.$$

Concluímos portanto que aplicando a transformada de Laplace à função $f(t)$ constante igual à 1, obtemos a função $F(s)$ na variável s dada por $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \frac{1}{s}$.

Vamos calcular a seguir a transformada de Laplace da função exponencial.

2) Seja a constante positiva, então calcule $\mathcal{L}(e^{at}) = F(s)$.

Ora,

$$F(s) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st}\, e^{at}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{(a-s)t}\, dt =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{a-s} \left(e^{(a-s)t} \right)_0^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{e^{(a-s)A} - 1}{a-s} \right).$$

Logo,

se $s > a$, $\quad \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

e se $0 < s \leq a$, $\quad \mathcal{L}(e^{at}) = +\infty$.

Logo concluímos neste caso que $F(s) = \frac{1}{s-a}$ se $s > a$ e $F(s) = \infty$ se $0 < s \leq a$.

Note que quando s se aproxima de a pela direita então $F(s)$ vai para infinito.

Note também que $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é linear em $f \in \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ está sendo considerado o espaço das funções f definidas em $(0, \infty)$ tomando valores reais ou infinito (ou seja em $\mathbf{R}^\infty$). Sendo assim, por exemplo

$$\mathcal{L}(2 + 3e^{5t}) = 2\mathcal{L}(1) + 3\mathcal{L}(e^{5t}) = 2\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-5}.$$

Em [Sp2] é apresentado um estudo sobre Transformadas de Laplace bem mais detalhado do que faremos aqui.

Exercícios: Mostre que se w for uma constante

1) $\mathcal{L}(\cos wt) = \frac{s}{s^2+w^2}, \qquad s > 0$

2) $\mathcal{L}(\text{sen wt}) = \frac{w}{s^2+w^2}, \qquad s > 0$

Teorema 10: $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ existe para $s > c$, se

i) $f(t)$ é contínua por partes.

ii) $\exists\, M,\, c > 0$ tq $|f(t)| \leq M\, e^{ct}$, $0 \leq t < +\infty$.

Demonstração: O Teorema segue de imediato do fato que

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^\infty M e^{-st} e^{ct} dt,$$

e a última expressão é finita para $s > c$.

Vamos agora apresentar um fato muito importante sobre a transformada de Laplace.

Teorema 11: Suponha que f satisfaz i) e ii) do último teorema acima. Então se $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ então $\mathcal{L}(f'(t)) = s\,F(s) - f(0)$

Demonstração: De fato,

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st}\, f'(t)\, dt =$$

$$\lim_{A\to+\infty} \left(e^{-st}\, f(t) \Big|_0^A + \int_0^A s\, e^{-st}\, f(t)\, dt \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(e^{-sA}\, f(A) - f(0) + \int_0^A s\, e^{-st}\, f(t)\, dt \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} e^{-sA}\, f(A) - f(0) + s\,F(s) = s\,F(s) - f(0).$$

Importante: O resultado acima afirma que se soubermos calcular a Transformada de Laplace de $f(t)$, então sabemos também calcular a Transformada de Laplace de $f'(t)$

Observação 11: Segue facilmente do teorema acima que
$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0)$.

Ou seja, se soubermos calcular a Transformada de Laplace de $f(t)$, então sabemos também calcular a Transformada de Laplace de $f''(t)$

A função $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é bijetiva. É necessário tomar algum cuidado na definição de $\mathcal{F}$ (por exemplo, a função $f(s)$, tal que $f(s) = 1$, se e só se, $0 < s < 1$ e a função $g(s)$, tal que $g(s) = 1$, se e só se, $0 \leq s \leq 1$, satisfazem $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f)$ mas $f \neq g$) para que esta afirmação seja verdadeira mas isto é um detalhe que foge ao escopo deste texto.

Definição 15: Seja $\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, a inversa de $\mathcal{L}$ agindo no espaço de funções $\mathcal{F}$ de tal jeito que para todo $f(t)$,

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}(f(t)) = f(t).$$

Por exemplo, a partir do que foi visto anteriormente

a) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = 1$,

b) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-a}) = e^{at}$,

c) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+5^2}) = \cos(5t)$.

A função $\mathcal{L}^{-1}$ é denominada a inversa da transformada de Laplace. O leitor pode encontrar em [Sp1] tabelas com transformadas de Laplace (e da sua inversa $\mathcal{L}^{-1}$) de várias funções que usualmente aparecem em alguns dos problemas mais comuns de equações diferenciais. A utilidade do método a ser descrito a seguir reside em dispor de tabelas suficientemente ricas que permitam identificar funções através de sua transformada de Laplace.

Muitos programas de computador (por exemplo, os pacotes computacionais [MA][MATL][MATH]) possuem extensas tabelas que permitem utilizar o método com razoável sucesso em vários casos.

Vamos aplicar o Teorema 11 acima para a equação diferencial:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t).$$

Mais exatamente, dado $f(t)$ desejamos encontrar a incógnita $y(t)$

Ora, aplicando a transformada de Laplace dos dois lados da expressão obtemos

$$\mathcal{L}(ay''(t) + by'(t) + cy(t)) = \mathcal{L}(f(t))$$

Sejam

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(s) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(f(t)) = F(s),$$

segue da linearidade de $\mathcal{L}$ que

$$a\,\mathcal{L}(y''(t)) + b\,\mathcal{L}(y'(t)) + c\,\mathcal{L}(y(t)) = F(s),$$

e segue do Teorema 11 e da Observação 11 que

$$a(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = F(s)$$

ou seja que

$$(a\,s^2 + bs + c)Y(s) + (-as - b)y(0) - ay'(0) = F(s),$$

logo,

$$Y(s) = \frac{F(s) + (as + b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c}. \tag{15}$$

Se conseguirmos identificar quem é a função $y(t)$ tal que $\mathcal{L}(y) = Y$ obteremos a solução desejada. Fica claro agora a observação que fizemos anteriormente sobre a conveniência de tratar a transformada $\mathcal{L}$ como uma mudança bijetiva de coordenadas.

$\mathcal{L}$ é bijetiva e portanto possui uma inversa $\mathcal{L}^{-1}$ (não vamos mostrar aqui tal propriedade mas apenas usá-la).

A solução $y(t)$ será finalmente obtida como $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$.

Importante: Em resumo, consideramos inicialmente um problema que envolvia uma equação diferencial na "variável" y, o qual via Transformada de Laplace $\mathcal{L}$ virou um problema algébrico (manipulação via produtos, somas, quocientes, etc..) envolvendo uma função na variável Y. Após descobrir quem é Y (em função de $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ como dado por (15)), voltamos novamente as coordenadas y via a função inversa de $\mathcal{L}$

Por exemplo, se no procedimento acima descobrirmos que $Y(s) = \frac{s}{s^2+3^2}$, então (usando o exercício a) antes do Teorema 10) obtemos $y(t) = \cos 3t$. Neste caso, usamos o fato que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+3^2}) = \cos 3t$.

Vamos a seguir apresentar um exemplo que vai ilustrar a utilidade do método.

Exemplo 25: Vamos encontrar a solução de $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ com as condições iniciais $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Ora,

$$\mathcal{L}(y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)) = \mathcal{L}(e^{3t}),$$

e como sabemos que,

$$\mathcal{L}(e^{3t}) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{(3-s)t}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{(3-s)t}}{3-s}\Big|_0^A = \frac{1}{s-3},$$

logo,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(y'' - 3y'(t) + 2y(t)) = \\ &= (s^2Y(s) - s) - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \\ &= (s^2 - 3s + 2)Y(s) - s + 3 = \frac{1}{s-3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-2)} + \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}, \tag{16}$$

vamos expressar agora $Y(s)$ de uma maneira mais conveniente e para isto vamos tentar encontrar A, B, C tais que

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

Devemos portanto resolver o sistema

$$\begin{cases} (A + B + C) = 0 \\ -5A - 4B - 3C = 0 \\ 6A + 3B + 2C = 1 \end{cases}$$

A seguir vamos resolver o sistema linear acima pelo método do pivotamento.

Somando as linhas da matriz associada a um sistema linear obtemos um sistema equivalente, ou seja com as mesmas soluções, logo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto, resolvendo o sistema equivalente dado pela última expressão matricial obtemos

$$C = \frac{1}{2}, \qquad A + B = -\frac{1}{2}, \qquad A = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \qquad B = -1$$

Finalmente concluímos que

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}.$$

A seguir desejamos obter D e E tal que para todo valor s

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2} = \frac{(D+E)s - (E+2d)}{(s-1)(s-2)}. \quad (17)$$

Sendo assim, $D + E = 1$, $2D + E = 3$
Logo, $D = 2, E = -1$.
Portanto,

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

Finalmente de (16) e (17)

$$Y(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s-1} - 2\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} = \mathcal{L}(y(t)).$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa $\mathcal{L}^{-1}$ (use o exemplo 24 2)), segue que

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = \frac{5}{2}e^{t} - 2\,e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

Note que o procedimento usado no último teorema permitiu (no exemplo considerado acima) transformar a operação de derivar em um problema que envolve uma manipulação algébrica das Transformadas de Laplace. Este é o ponto fundamental na utilidade da Transformada de Laplace em Equações Diferenciais Lineares. Ela transforma equações diferenciais em equações funcionais (sem derivadas).

O ponto fundamental para o método funcionar bem é podermos descobrir quem é a transformada de Laplace e sua inversa para um grande número de funções. Para isto necessitamos poder combinar e manipular as transformadas de maneira mais adequada. Isto será obtido através das propriedades que seguem.

Teorema 12: $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}(-t\,f(t)) = \frac{d}{ds}F(s)$

Demonstração:

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st}f(t))dt =$$

$$\int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = \mathcal{L}(-tf(t)).$$

Por exemplo, como $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$, então $\mathcal{L}(-t) = \mathcal{L}(-t\,1) = \frac{d}{ds}\frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}$. Logo, $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$.

Exemplo 26: $\mathcal{L}(te^t) = -\mathcal{L}(-t\,e^t) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1} = -\left(-\frac{1}{(s-1)^2}\right) = \frac{1}{(s-1)^2}$

Teorema 13: $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}(e^{at}\,f(t)) = F(s-a)$

Demonstração:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-(s-a)}f(t)dt = F(s-a)$$

.

Exemplo 27: Calcule a transformada de Laplace de $e^{2t}\cos t$.
Ora, $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$, logo $\mathcal{L}(e^{2t}\cos t) = \frac{(s-2)}{(s-2)^2+1}$.

Definição 16: A função H_c, usualmente denominada de função de Heavyside no ponto c, é definida como $H_c(t) = 0$, se $0 \le t < c$ e $H_c(t) = 1$, se $c \le t$.

Sendo assim, para todo s positivo

$$\mathcal{L}(H_c(t)) = F(s) = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-st}\,H_c(t)\,dt =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^c e^{-st}H_c(t)\,dt + \int_c^A e^{-st}H_c(t)\,dt\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\int_c^A e^{-st}1dt = \lim_{A\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_c^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{e^{-sA}}{s} + \frac{e^{-sc}}{s}\right) = \frac{e^{-sc}}{s}$$

Teorema 14: $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \Rightarrow \mathcal{L}(H_c(t)f(t-c)) = e^{-cs}\,F(s)$.

Demonstração: $\mathcal{L}(H_c(t)f(t-c)) = \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)f(t-c)dt$, logo fazendo a mudança de variável $y = t-c$, obtemos

$$\mathcal{L}(H_c(t)f(t-c)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t-c)dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-s(y+t)} f(y)dy = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy = e^{-cs}F(s).$$

Exemplo 28: Calcule a transformada de Laplace de $H_3(t)(t-3)$.

Usando a notação do teorema acima, como $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2} = F(s)$, então $\mathcal{L}(H_3(t)(t-3)) = \frac{e^{-3s}}{s^2}$.

Função $f(t)$	Transformada de Laplace $F(s)$
$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$
k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$, $s > k$
$e^{kt}\text{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$, $s > k$
$e^{kt}\cos\omega t$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2}$, $s > k$
$e^{kt}\text{senh}\omega t$	$\frac{\omega}{(s-k)^2-\omega^2}$, $s > k$
$e^{kt}\cosh\omega t$	$\frac{s-k}{(s-k)^2-\omega^2}$, $s > k$
$e^{kt}\left[A\cos\omega t + \frac{Ak+B}{\omega}\text{sen}\omega t\right]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2+\omega^2}$, $s > k$
$e^{kt}\left[A\cosh\omega t + \frac{Ak+B}{\omega}\text{sen}h\omega t\right]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2-\omega^2}$, $s > k$
$\frac{t^{n-1}e^{kt}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-k)^n}$, $n \geq 1$, $s > k$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+)$
$f''(t)$	$s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
$e^{kt}f(t)$	$F(s-k)$
$f(kt)$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$
$\int_a^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(\tau)d\tau$
$x^t f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))$

Apresentamos na tabela em anexo as transformadas de Laplace de algumas funções importantes e algumas fórmulas que descrevem as principais propriedades descritas neste texto.

Uma propriedade extremamente útil no contexto da Transformada de Laplace é a convolução de funções. Note que $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ mas $\mathcal{L}(f.g) \neq \mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g)$. O conceito de convolução de funções vai nos permitir trabalhar com $\mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g)$

Definição 17: Dadas duas funções f e g, a convolução de $f(t) \in \mathcal{F}$ e $g(t) \in \mathcal{F}$ é a função $h(t) \in \mathcal{F}$, denotada por $(f * g)(t)$ que é dada por definição como

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du.$$

Exemplo 29: Se $f(t) = t^2$ e $g(t)$ constante igual a 1, então

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1\ s^2 ds = \frac{t^3}{3}.$$

Exercício: Mostre que $(f * g) = (g * f)$.

Uma propriedade estremamente útil para o uso da Transformada de Laplace é dada pelo próximo teorema.

Teorema 15:

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g)$$

Demonstração: Denote por F, G e C as transformadas de Laplace respectivamente das funções f, g e $(f * g)$.

Ora,

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = C(s) = \int_0^\infty e^{-st} (\int_0^t f(t-v) g(v)\, dv)\, dt =$$

$$\int_0^\infty g(v) (\int_v^\infty e^{-st} f(t-v)\, dt)\, dv,$$

onde usamos o Teorema de Fubini (intercâmbio de ordem de derivação) na última igualdade. Usamos também convergência absoluta na integral acima.

Fazendo a mudança de variável $y = t - v$ obtemos

$$\int_v^\infty e^{-st} f(t-v) dt \ = \int_0^\infty e^{-s(v+y)} f(y) dy.$$

Note que acima usamos que se $y = 0$, então como $t - v = y$, isto corresponde a $t = v$

Logo,

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = C(s) = \int_0^\infty (g(v) \int_0^\infty e^{-sv} e^{-sy} f(y)\, dy)\, dv =$$

$$= (\int_0^\infty g(v) e^{-sv}\, dv)\, (\int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy) = G(s) F(s).$$

Fica assim demonstrado o Teorema.

Vamos agora mostrar a utilidade do que foi descrito acima.

Exemplo 30: Calcule $f(t)$ a transformada de Laplace inversa de $\frac{b}{s^2(s^2+b^2)}$, isto é, calcule $\mathcal{L}^{-1}(\frac{a}{s^2(s^2+b^2)}) = f(t)$. Ora, $\mathcal{L}(\text{sen} bt) = \frac{a}{s^2+b^2}$ e $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$, logo pelo teorema acima

$$\mathcal{L}(t * \text{sen} bt) = \mathcal{L}(t)\, \mathcal{L}(\text{sen} bt) = \frac{b}{s^2(s^2+b^2)}.$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$, a inversa da transformada de Laplace, em ambos os lados da última igualdade obtemos

$$\frac{\text{sen}bt - bt\cos bt}{b^2} = \int_0^t (t-u)\text{sen}bu\,du = t * \text{sen}bt = \mathcal{L}^{-1}(\frac{b}{s^2(s^2+b^2)}).$$

A conclusão é que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{a}{s^2(s^2+b^2)}) = f(t) = \frac{\text{sen}bt - bt\cos bt}{b^2}$.

O teorema acima permite obter resultados sobre transformada de Laplace envolvendo produtos e quocientes de transformadas conforme exemplo acima. Isto é sem dúvida muito útil em manipulações envolvendo tranformadas de Laplace.

Por exemplo, se num certo problema envolvendo equações diferenciais a solução $y(t)$ fosse tal que $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s) = \frac{a}{s^2(s^2+b^2)}$, então segue do que foi calculado acima que $y(t) = \frac{\text{sen}bt - bt\cos bt}{b^2}$.

Vamos considerar agora um outro tópico importante na teoria das transformadas de Laplace

A delta de Dirac no ponto s_0, é a função (generalizada) que é nula fora de s_0 e tem massa 1 no ponto s_0. Para esclarecer ao leitor o que temos em mente, sem entrar em detalhes matemáticos que estão acima do escopo deste texto (referimos o leitor a [II] para a fundamentação matemática) , devemos pensar que:

Definição 18: A delta de Dirac no ponto s_0 é o limite da sequência de funções $f_n, n \in \mathbf{N}$, dadas por $f_n(t) = 0$ se $t < s_0$, $f_n(t) = n$ se $s_0 \leq t < s_0 + \frac{1}{n}$ e $f_n(t) = 0$ se $t \geq s_0 + \frac{1}{n}$.

Logo, em termos heurísticos a delta Dirac seria uma função que é infinito em s_0 e 0 fora de s_0 e que tem integral igual a 1.

A delta de Dirac não é uma função no sentido usual da palavra, no entanto ela pode ser definida de maneira Matemática precisa dentro da Teoria das distribuições ou também chamada de Teoria das funções generalizadas (ver [II] [BU] para mais resultados sobre o assunto).

Vamos utilizar a delta de Dirac de uma maneira operacional sem entrar em detalhes mais precisos.

Vamos denotar a delta de Dirac em s_0 (no caso em consideração $s_0 > 0$) por $\delta_{s_0}(t)$ ou também por $\delta(t - s_0)$, onde s_0 é constante e t é a variável.

Seja s_0 fixado, o ponto fundamental aqui é que a delta de Dirac δ_{s_0} expressa na verdade a ação de integrar uma função "contínua" $g(t)$ multiplicada por uma massa unitária no ponto s_0. Vamos descrever tal ação da seguinte maneira dado s_0 fixo, queremos associar a este valor s_0 a operação que a cada g associa $\int_0^\infty g(t)\delta_{s_0}(t)dt$.

Este é o ponto de vista de olhar uma função qualquer $f(t)$ não por seus valores numéricos $f(t) \in \mathbf{R}$, mas pela sua ação $\int_0^\infty g(t)\, f(t)dt$ sobre funções g (que são chamadas de funções teste). Pode-se mostrar que tal ação sobre todas as g determina f de maneira única. É neste sentido que δ_{s_0} é uma função, mas para não confundir com as funções $f(t)$ (de verdade) chamamos ela de função generalizada. A formalização matemática destes fatos foge ao escopo deste texto e pode ser encontrada em [II] (mas não é, de maneira alguma, essencial para o que segue).

Na verdade, a expressão acima é definida através de um limite. Lembre que a delta de Dirac no ponto s_0 é o limite da sequência de funções $f_n, n \in \mathbf{N}$, dadas por $f_n(t) = 0$ se $t < s_0$, $f_n(t) = n$ se $s_0 \leq t < s_0 + \frac{1}{n}$ e $f_n(t) = 0$ se $t \geq s_0 + \frac{1}{n}$.

Portanto vamos definir o valor $\int_0^\infty g(t)\delta_{s_0}(t)dt$ como

$$\int_0^\infty g(t)\delta_{s_0}(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)g(t)dt.$$

Ora, se g é contínua, é fácil ver que o valor acima é $g(s_0)$. De fato, para n grande integrando obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)g(t)dt = \int_{s_0}^{s_0+1/n} ng(t).$$

Como $g(t)$ é aproximadamente igual à $g(s_0)$ para $t \in (s_0, s_0+1/n)$ se n for grande (mais precisamente, para cada n existe s_n^* em $(s_0, s_0+1/n)$ tal que $\int_{s_0}^{s_0+1/n} g(t)dt = 1/n\ g(s_n^*))$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)g(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{s_0}^{s_0+1/n} ng(t)dt = \lim_{n\to\infty} 1/n\ n\, g(s_n^*) = g(s_0).$$

Concluímos portanto que para funções contínuas $g(t)$ a integral $\int g(t)\delta_{s_0}(t)dt = g(s_0)$.

Em resumo, a delta de Dirac é caracterizada não por seus valores escalares reais (como usualmente se define uma função), mas por sua ação (multiplicando e integrando) sobre outras funções teste g. Referimos o leitor para [Bu] para vários exemplos de aplicações de funções generalizadas ou também chamadas de distribuições às equações diferenciais parciais.

A utilidade da delta de Dirac pode ser entendida ao supor, por exemplo, que na equação da mola sob a ação de uma força externa $f(t)$

$$my^{''} + cy^{'} + ky = f(t),$$

podemos considerar $f(t) = \delta_{s_0}(t)$.

O que temos em mente, é que a mola vai sofrer uma força instantânea com intensidade 1 no tempo s_0, ou mais precisamente, um piparote com intensidade 1 no tempo s_0. A maneira matemática de descrever tal ação é a delta de Dirac no tempo s_0. O piparote com intensidade k seria então descrito por $k\delta_{s_0}(t)$.

Como veremos a seguir, formalmente poderemos resolver problemas de molas sujeitos à piparotes desta maneira. Existe uma formalização matemática precisa de todos estes fatos, mas está acima do escopo deste texto (ver [II][Bu]).

O fundamental é o fato que não vamos considerar individualmente a delta de Dirac, mas vamos apenas integrar funções multiplicadas pela delta de Dirac, como veremos a seguir.

Vamos primeiramente calcular formalmente $\mathcal{L}(\delta(t-t_0))$, mesmo que a delta de Dirac não esteja no conjunto $\mathcal{F}$.

Como e^{-st} é uma função contínua, pelo que vimos acima,

$$\mathcal{L}(\delta(t-s_0)) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st}\,\delta(t-s_0)\,dt = e^{-ss_0}, \quad s_0 \geq 0. \qquad (18)$$

Observação 12: Para c fixo, a função $H_c'(t)$ derivada da função de Heavyside $H_c(t)$ é tal que $H_c'(t) = \delta_c(t)$.

Note que a função $H_c(t)$ não é diferenciável em c e para t diferente de c sua derivada é nula. Sendo assim, não existe a função derivada de H_c, mas se pensarmos no sentido funções generalizadas, tal "função" derivada vai existir e é a delta de Dirac em c. Este fato pode ser rigorosamente demonstrado utilizando ferramentas matemáticas mais sofisticadas que fogem ao escopo deste livro (ver [II]). Vamos aqui apenas mostrar de uma maneira formal tal propriedade.

Este fato será obtido através do uso de Tranformada de Laplace.

Ora se $y'(t) = \delta_c(t)$ então $\mathcal{L}(y')(s) = \mathcal{L}(\delta_c)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\delta(t-c)\,dt = e^{-sc}$.

Como sabemos que $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0)$, obtemos que formalmente

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s} + \frac{e^{-cs}}{s}.$$

Se $y(0) = 0$ (como ocorre com $\delta_c(t)$ quando $c \neq 0$) então $Y(s) = \frac{e^{-cs}}{s}$.

Aplicando a transformada de Laplace inversa concluímos assim que $y(t) = H_c(t)$.

Vamos agora mostrar a utilidade do formalismo acima.

Exemplo 31: Seja uma mola de massa $m = 1$ com constante de atrito $c = 4$, com constante da mola igual $k = 4$, a qual no tempo $t_0 = 0$ está na posição 1 com velocidade 1. Suponha que a mola sofra piparotes nos tempos respectivamente 1 e 2 com intensidade respectivamente 3 e 1. Calcule a trajetória da extremidade da mola.

$$my'' + cy' + ky = y'' + 4y' + 4y = 3\,\delta(t-1) + \delta(t-2) \qquad (19)$$

com as condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (19) e usando (18) e observação 11 temos que

$$s^2\,Y(s) - s - 1 - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = 3e^{-s} + e^{-2s},$$

logo,

$$Y(s) = \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2},$$

como,

$$\mathcal{L}(t\,e^{2t}) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

então,

$$\mathcal{L}(3\,H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)}) = \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2},$$

e assim,

$$Y(s) = \mathcal{L}(e^{2t} - t\,e^{2t}) + \mathcal{L}(3\,H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)}) + \mathcal{L}(H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}),$$

logo concluímos que

$$\frac{(s-3)}{(s-2)^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \mathcal{L}(e^{2t} - t\,e^{2t}),$$

e finalmente obtemos

$$y(t) = (1-t)e^{2t} + 3\,H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}.$$

Note que o segundo termo da expressão acima, só aparece após $t = 1$ e o terceiro termo só aparece após o tempo $t = 2$. Este fato está de acordo com a nossa intuição, pois é exatamente nos tempos $t = 1$ e $t = 2$, que a mola sofre o piparote.

Exercícios:

1) Calcule a transformada de $F(s)$ de
a) $f(t) = t$
b) $f(t) = e^{at}\cos(bt)$
c) $f(t) = \cos^2(at)$
d) $f(t) = t^2 \mathrm{sen} t$
e) $f(t) = t\,\mathrm{sen}(at)$
f) $f(t) = t^n e^{at}$
2) Encontre a inversa $f(t)$ da transformada de Laplace
a) $F(s) = \frac{s}{(s+a)^2+b^2}$
b) $F(s) = \frac{s^2-5}{s^3+4s^2+3s}$
c) $F(s) = \frac{1}{s(s+4)^2}$
3) Usando o método da Transformada de Laplace calcule uma solução particular de
a) $y'' - y = t$
b) $y'' - 2y' + y = t^2$
4) Encontre diretamente (via Transformada de Laplace) a solução das seguintes equações diferenciais com condições iniciais

a) $y'' - y = t$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

b) $y'' + 2y' + y = 2(t-3)H_3(t), y(0) = 3, y'(0) = 1$

c) $y' + y' + y = H_7(t), y(0) = 1, y'(0) = 2$

d) $y' + y = \text{sen}t + \delta_3(t), y(0) = 0, y'(0) = 1$

e) $y'' + y' + y = 2\delta_1(t) - 3\delta_2(t), y(0) = 1, y'(0) = 0$

5) Calcule a convolução das seguintes funções

a) e^{at}, e^{bt}, $a \neq b$

b) $\cos(at)$, $\cos(bt)$

c) t, $\text{sen}t$

6) Usando convolução de funções calcule, via Transformada de Laplace inversa, a função$f(t)$ tal que $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$.

a) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$ (lembre que $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$)

b) $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$

c) $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$

Sistemas Lineares de Equações Diferenciais

Silvia Lopes - UFRGS

Considere o sistema linear de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & a\ x(t) + b\ y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & c\ x(t) + d\ y(t) \end{cases}$$

onde a,b,c,d são constantes reais

$x'(t)$ descreve a taxa de variação de $x(t)$ no tempo t e $y'(t)$ descreve a taxa de variação de $y(t)$ no tempo t.

As incógnitas no caso são as funções $x(t)$ e $y(t)$. É útil as vezes considerar o par $(x(t), y(t))$ evoluindo com o tempo t sobre o plano R^2.

Por exemplo se $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = -5$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & 2\,x(t) + 0\,y(t) = 2\,x(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & 0\,x(t) - \,5\,y(t) = -\,5\,y(t) \end{cases}$$

Neste caso, podemos resolver individualmente primeiro a equação em $x(t)$ e depois em $y(t)$.

Obtemos $x(t) = x_0\,e^{2\times t}$ e $y(t) = \,y_0 e^{-5\times t}$.

Deste modo, $(x(t), y(t)) = (6\,e^{2\,t}, 7\,e^{-5\,t})$ é uma curva solução evoluindo com o tempo t em R^2. Por exemplo, para $t = 9$ a solução vai estar em $(x(9), y(9)) = (6\,e^{2\times 9}, 7\,e^{-5\times 9}) = (6\,e^{18}, 7\,e^{-45})$

Faça voce mesmo as contas e comprove que tal $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem a equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2\,x(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = -\,5\,y(t) \end{cases}$$

Este caso foi muito simples pois a evolução de $x(t)$ não sofre interferência da evolução de $y(t)$ e vice versa. Os caso mais interessante é quando existe interferencia. Isto acontece quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Esta análise será o objeto do que segue.

Pode-se mostrar que para $a, b, c, d, x_0, y_0 \in R$ fixos, só existe uma função $(x(t), y(t))$ com $t \in R$, tal que satisfaz ao mesmo tempo

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,$$

e a equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & a\ x(t) + b\ y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & c\ x(t) + d\ y(t) \end{cases}$$

O problema, é claro, é como obter $(x(t), y(t))$ a partir dos dados acima.

Exercício: Mostre que $(x(t), y(t)) = (2e^{7\,t}, e^{7\,t})$ satisfaz a propriedade $(x(0), y(0)) = (2, 1)$ e a equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & x(t) + 12\ y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & 3\ x(t) + 1\ y(t) \end{cases}$$

Exercício: Mostre que $(x(t), y(t)) = (-2e^{-5\,t}, e^{-5\,t})$ satisfaz a propriedade $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$ e a equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & x(t) + 12\ y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & 3\ x(t) + 1\ y(t) \end{cases}$$

Exemplo: Suponha que estamos analisando uma população de N_1 lobos e N_2 coelhos e nosso objetivo é analisar como estas duas populações se propagam numa disputa natural. Assim, podemos supor (simplificando o modelo) que um sistema linear de equações diferenciais dado por

$$\begin{cases} N_1'(t) \ = \ \frac{dN_1}{dt} \ = \ aN_1(t) + bN_2(t) \\ \\ N_2'(t) \ = \ \frac{dN_2}{dt} \ = \ cN_1(t) + dN_2(t) \end{cases}$$

onde aqui $b > 0$, $c < 0$, $a > 0$ e $d > 0$, descreve a evolução do sistema.

$N_1'(t)$ descreve a taxa de variação da população $N_1(t)$ e $N_2'(t)$ descreve a taxa de variação da populacão $N_2(t)$.

Neste caso, estamos supondo que a taxa de variação do número de lobos $N_1'(t)$ no decorrer do tempo é uma combinação linear do número de coelhos e o número de lobos. $N_1(t))$ vai crescer $(b > 0)$ quanto mais coelhos existirem. Os lobos (o predador) tem alimento. O coeficiente $a > 0$ da conta do crescimento populacional de lobos por cruzamento na espécie.

A taxa de variação do número de coelhos $N_2'(t)$ no decorrer do tempo é combinação linear do número de lobos e do número de coelhos. $N_2(t)$ vai decrescer muito $(c < 0)$ se o número de lobos for grande. Os coelhos (a presa) são comidos pelos lobos. O coeficiente $d > 0$ da conta do crescimento populacional de coelhos por cruzamento.

Os valores a, b, c, d podem ser estimados em função de dados reais.

Na situação em que $a = 0,1$, $b = 0 = c$, e $d = 0,3$ com $N_1(0) = x_0$ e $N_2(0) = y_0$, temos que

$$\frac{dN_1}{dt} = 0,1\,N_1(t)$$

e

$$\frac{dN_2}{dt} = 0,3\,N_2(t),$$

ou seja,

$$\boxed{\begin{array}{c} N_1(t) = x_0 e^{0,1\,t} \\ N_2(t) = y_0 e^{0,3\,t} \end{array}}$$

Da mesma forma como acima obtemos a curva solução
$h : R \longrightarrow R^2$
$t \longrightarrow h(t) = (x(t), y(t)) = (N_1(t), N_2(t)) = (x_0 e^{0,1\,t}, y_0 e^{0,3\,t})$
onde $h(0) = (x_0, y_0)$
Os valores x_0 e y_0 representariam os valores das duas populações, respectivamente N_1 e N_2, no tempo $t = 0$.

Se $x_0 = 100$ lobos e $y_0 = 100$ coelhos, então. $h(t) = (100e^{0,1t}, 100e^{0,3t})$

Voltemos ao caso geral. Vamos supor interferencia entre as populações N_1 e N_2 da seguinte forma.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = & a\,N_1(t) + b\,N_2(t) = N_1'(t) \\ \\ \frac{dN_2}{dt} = & c\,N_1(t) + d\,N_2(t) = N_2'(t) \end{cases}$$

onde $N_1(0) = x_0$ e $N_2(0) = y_0$
Gostaríamos de saber quem é a curva $(N_1(t), N_2(t))$ no plano (ver figura 1.12)
Queremos tentar encontrar (otimisticamente) uma solução do tipo

$$\begin{cases} N_1(t) = & A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ \\ N_2(t) = & B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Em principio a solução poderia não ser desta forma (felizmente, é).

Objetivo: Encontrar os valores para A_1,A_2,B_1,B_2,λ_1 e λ_2
Primeira Etapa: Ora, derivando em t

$$N_1'(t) = A_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

e por outro lado assumimos que

$$N_1'(t) = \frac{dN_1}{dt} = aN_1(t) + bN_2(t)$$

Assim,

$aN_1(t) + bN_2(t) = a(A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}) + b(B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t}) =$
$(aA_1 + bB_1)e^{\lambda_1 t} + (aA_2 + bB_2)e^{\lambda_2 t}$

Mas como
$A_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} = N_1'(t) = aN_1(t) + bN_2(t)$ temos que

$$A_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} =$$
$$(aA_1 + bB_1)e^{\lambda_1 t} + (aA_2 + bB_2)e^{\lambda_2 t}.$$

Igualando os coeficientes que multiplicam $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_1 t}$, obtemos que

$$\boxed{\begin{array}{rl} A_1\lambda_1 = & aA_1 + bB_1 \\ A_2\lambda_2 = & aA_2 + bB_2 \end{array}}$$

Segunda Etapa:

$$N_2'(t) = B_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + B_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}$$

e

$$N_2'(t) = \frac{dN_2}{dt} = cN_1(t) + dN_2(t)$$

Assim,

$cN_1(t) + dN_2(t) = c(A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}) + d(B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t}) =$
$(cA_1 + dB_1)e^{\lambda_1 t} + (cA_2 + dB_2)e^{\lambda_2 t}$
Mas como
$B_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + B_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} = N_2'(t) = cN_1(t) + dN_2(t)$ temos que

$$\boxed{\begin{array}{rl} B_1\lambda_1 = & cA_1 + dB_1 \\ B_2\lambda_2 = & cA_2 + dB_2 \end{array}}$$

Terceira Etapa: Pegando as duas primeiras equações (de cada uma das expressões dentro do quadrado acima obtidas na etapa 1 e 2) chegamos ao sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}.$$

Pegando as duas últimas equações (de cada uma das expressões dentro do quadrado acima obtidas na etapa 1 e 2) chegamos ao sistema

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

one M é a matriz dois por dois

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Note que resolver o sistema acima equivale a resolver

$$0 = (\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} - M) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix},$$

e

$$0 = (\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - M) \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, de maneira compacta

$$(\lambda_1 I - M) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = 0,$$

e

$$(\lambda_2 I - M) \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0,$$

onde I é a matriz identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

λ_1 é chamado de autovalor associado ao autovetor $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$

λ_2 é chamado de autovalor associado ao autovetor $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$.

Para resolver tal problema necessitamos encontrar quem é λ_1 e λ_2 que satisfaz

$$\det(\lambda_1 I - M) = 0$$

e

$$\det(\lambda_2 I - M) = 0.$$

Lembre que dada uma matriz B, se $\det\, B = 0$, então existe um vetor v tal que $B(v) = 0$. Esta é a razão para buscar as equações acima (faça primeiro $B = \lambda_1 I - M$ e depois $B = \lambda_2 I - M$).

Sendo assim, desejamos resolver em λ o polinomio de grau dois

$\det(\lambda I - M) = 0 \Leftrightarrow \det\, M = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}}.$$

Acima usamos a formula de Bascara para obter a resposta. Somente quando as soluções λ são reais que tem sentido considerar a solução acima.

As demais constantes A_1, A_2, B_1 e B_2 podem ser obtidos pelas equações de autovetores. Vamos mostrar isto num exemplo concreto a seguir.

Exercício 1: Suponha que $\begin{cases} N_1' = & 3N_1 - 2N_2 \\ N_2' = & 2N_1 - 2N_2 \end{cases}$

e ainda as populações iniciais, $N_1(0) = 100$, $N_2(0) = 300$; neste caso $a = 3$, $b = -2$; $c = 2$; $d = -2$

Determine os valores de $\lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2, B_1$ e B_2.

Queremos resolver o sistema $\det(\lambda I - M) = 0$ onde $\lambda \in R$ e

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

isto é,

$\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+2)+4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-6+4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda = \frac{1 \overset{+}{-} \sqrt{1-4(-2)}}{2} \qquad \begin{matrix} \nearrow & \lambda_1 = 2 \\ \searrow & \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

Logo,

$\begin{cases} N_1(t) = & A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t} \\ N_2(t) = & B_1 e^{2t} + B_2 e^{-t} \end{cases}$ onde $N_1(0) = 100$ e $N_2(0) = 300$

Sabemos que

$\begin{cases} 100 = & A_1 + A_2 \\ 300 = & B_1 + B_2 \end{cases}$ quando $t = 0$ e pela equação das derivadas

$\begin{cases} A_1(\lambda_1 - a) = & bB_1 \\ A_2(\lambda_2 - a) = & bB_2 \end{cases}$

Então,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = & 100 \\ B_1 + B_2 = & 300 \end{cases} \text{e} \begin{cases} A_1(-1) = & -2B_1 \\ A_2(-4) = & -2B_2 \end{cases} \text{isto é} \begin{cases} A_1 = & 2B_1 \\ 2A_2 = & B_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} B_1 = & \frac{A_1}{2} \\ B_2 = & 2A_2 \end{cases}$$

Temos

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = & 100 \\ \frac{A_1}{2} + 2A_2 = & 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = & 100 - A_2 \\ 50 - \frac{A_2}{2} & +2A_2 = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 100 & -A_2 \\ \frac{3}{2}A_2 = & 250 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} A_1 = & -\frac{200}{3} \\ \\ A_2 = & \frac{500}{3} \end{array}}$$

Como $B_1 = \frac{A_1}{2}$ e $B_2 = 2A_2$ obtemos finalmente a partir de

$$A_1 = \frac{-200}{3}, \;\; A_2 = \frac{500}{3},$$

que

$$B_1 = \frac{-100}{3}, \;\; B_2 = \frac{1000}{3}.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$\boxed{\begin{array}{rl} N_1(t) = & -\frac{200}{3}e^{2t} + \frac{500}{3}e^{-t} \\ \\ N_2(t) = & -\frac{100}{3}e^{2t} + \frac{1000}{3}e^{-t} \end{array}}$$

Informações importantes:

Supondo que todos os coeficientes $A_1, A_2, B_1, B_2, \lambda_1, \lambda_2$ são diferentes de zero, queremos saber se as populações se extinguem ou explodem.

$$\lim_{t\to+\infty} N_1(t) = \lim_{t\to+\infty} A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} = \lim_{t\to+\infty} A_1e^{2t} + A_2e^{-t} = A_1 \lim_{t\to+\infty} e^{2t} = -\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} N_2(t) = \lim_{t\to+\infty} B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t} = \lim_{t\to+\infty} B_1e^{2t} + B_2e^{-t} = B_1 \lim_{t\to+\infty} e^{2t} = -\infty$$

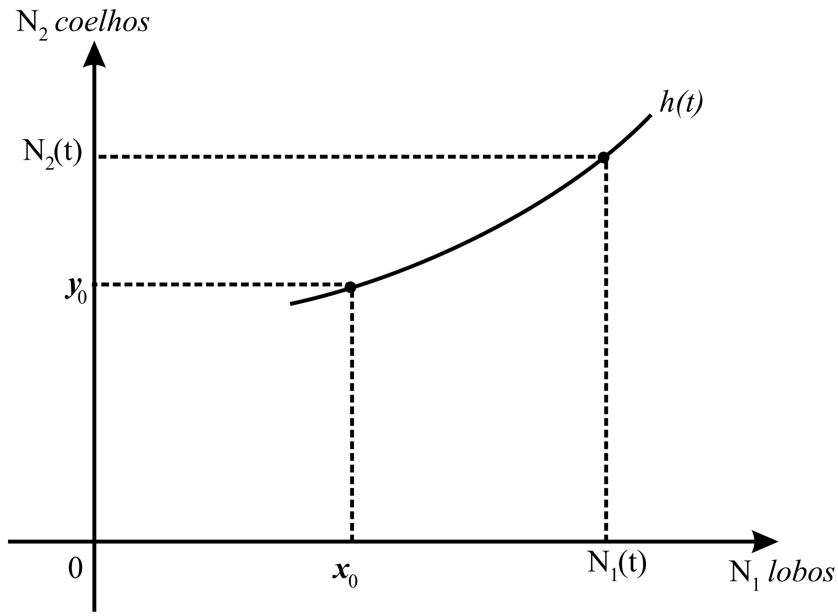

Figura 1.12:

Portanto, com os coeficientes encontrados no exercício, as duas populações se extinguem quando o tempo fica ilimitadamente grande.

Nem sempre ocorre das populacoes se extinguirem ou irem para o valor infinito.

Exercício 2: Suponha o sistema linear $\begin{cases} x' = & 7x - 4y \\ y' = & -9x + 7y \end{cases}$

Perguntas: O que acontece em geral com as populações $x(t)$ e $y(t)$?

Assuma que a condição inicial é $x(0) = 4$ e $y(0) = 1$.Calcule $x(t)$ e $y(t)$.

A solução é do tipo $\begin{cases} x(t) = & A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = & B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

Queremos obter os autovalores da matriz

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix},$$

ou seja, obter os valores λ tais que $\det(\lambda I - M) = 0$, isto é,

$$\lambda = \frac{14 \overset{+}{-} \sqrt{14^2 - 4(13)}}{2} = \frac{14 \overset{+}{-} \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \overset{+}{-} 12}{2}.$$

As soluções da equação polinomial são $\lambda_1 = 13$ e $\lambda_2 = 1$

Portanto, a solução $(x(t), y(t))$ é dada por

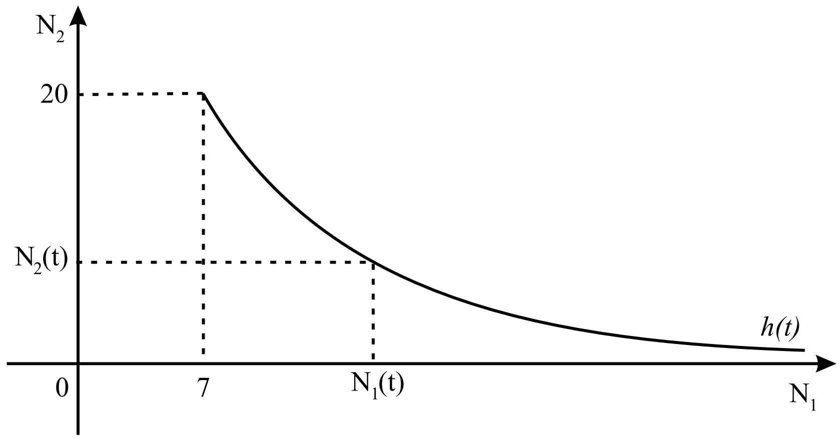

Figura 1.13:

$$\begin{cases} x(t) = & A_1e^{13t} + A_2e^{t} \\ y(t) = & B_1e^{13t} + B_2e^{t} \end{cases}$$

Como

$$\begin{cases} x(0) = & 4 \\ y(0) = & 1 \end{cases} \text{temos} \begin{cases} A_1 + A_2 = & 4 \\ B_1 + B_2 = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = & 4 - A_2 \\ B_1 = & 1 - B_2 \end{cases}$$

$$\text{e}\begin{cases} A_1(\lambda_1 - a) = & bB_1 \\ A_2(\lambda_2 - a) = & bB_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1(6) = & -4B_1 \\ A_2(-6) = & -4B_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A_1 = & -2B_1 \\ 3A_2 = & 2B_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} B_1 = & -\frac{3}{2}A_1 \\ B_2 = & \frac{3}{2}A_2 \end{cases}$$

$$\text{Assim}\begin{cases} A_1 = & 4 - A_2 \\ B_1 = & 1 - B_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = & 4 - A_2 \\ -\frac{3}{2} = & 1 - \frac{3}{2}A_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = & 4 - A_2 \\ -\frac{5}{2} = & -\frac{3}{2}A_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A_1 = & 4 - A_2 \\ A_2 = & \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = & \frac{7}{3} \\ A_2 = & \frac{5}{3} \end{cases}$$

E ainda

$$\begin{cases} B_1 = & -\frac{7}{2} \\ B_2 = & \frac{5}{2} \end{cases}$$

Logo a solução é dada por

$$\begin{cases} x(t) = & \frac{7}{3}e^{13t} + \frac{5}{3}e^{t} \\ y(t) = & -\frac{7}{2}e^{13t} + \frac{5}{2}e^{t} \end{cases} com \begin{cases} x(0) = & 4 \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

Observe que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} (\frac{7}{3}e^{13t} + \frac{5}{3}e^{t}) = +\infty$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}(-\frac{7}{2}e^{13t} + \frac{5}{2}e^{t}) = 0$$

Suponha que $x(t) = N_1(t)$ e $y(t) = N_2(t)$ descrevem duas populações em competição. Suponha que a populações iniciais, fossem $N_1(0) = 4$ e $N_2(0) = 20$. Suponha que, como acima,

$$\lim_{t\to+\infty} N_1(t) = \infty,$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} N_2(t) = 0.$$

Então quando t cresce imilitado, o presente sistema seria descrito pela figura 1.13. Note que $N_1(t)$ vai a infinito e $N_2(t)$ vai a zero quando $t \to \infty$.

Observação: Note que $(x(t), y(t) = (0,0))$ para todo t real sempre satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & a\,x(t) + b\,y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & c\,x(t) + d\,y(t) \end{cases},$$

e ainda $(x(0), y(0)) = (0,0)$.

Exercício: Determine a solução $(x(t), y(t))$ satisfazendo a condição inicial $(x(0), y(0)) = (2,3)$ do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & x(t) + 12\; y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & 3\; x(t) + 1\; y(t) \end{cases}$$

Sugestão: Calcule primeiro as soluções em λ do polinômio do segundo grau

$$\det(\lambda\, I - M) = 0,$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estes valores são $\lambda = 7$ e $\lambda = -5$. A seguir proceda como acima resolvendo um sistema linear e usando o fato que $(x(0), y(0)) = (2,3)$.

A resposta é $(x(t), y(t)) = (4\,e^{7\,t} - 2\,e^{-5\,t}, 2\,e^{7\,t}\; +\; e^{-5\,t})$.

Exercício: Determine a solução geral $(x(t), y(t))$ satisfazendo a condição inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & x(t) + 12\ y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & 3\ x(t) + 1\ y(t) \end{cases}$$

Sistemas de equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & a\,x(t) + b\,y(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & c\,x(t) + d\,y(t) \end{cases}$$

são denominados de lineares, visto que $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ dependem de maneira linear de $x(t)$ e $y(t)$. Este é um modelo bastante simplificado

Os problemas reais são em geral mais complexos. É natural muitas vezes uma descrição mais elaborada da competição entre espécies envolvendo termos não lineares.

Exemplo: Por exemplo poderíamos ter

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & 5\,x(t)^2 + 6.9\,\cos(y(t)) \\ \\ \frac{dy}{dt} = & x(t)^3 + 4\,y(t) + 7 \end{cases}$$

Por exemplo, se $x(t)$ e $y(t)$ descrevem duas populações distintas, a equação acima traduziria uma maneira mais complexa dos valores das taxas de variação destas populações (ao longo do tempo) dependerem dos valores das populações $x(t)$ e $y(t)$.

A solução $(x(t), y(t))$ com $t \in R$, pode ser muitas vezes difícil de explicitar, embora sob condições gerais, se saiba que existe e é única, fixada a condição inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (r, s)$ no tempo t_0, onde r, s são tambem fixos.

Felizmente alguns softwares matemáticos como Mathematica, MAPLE e Mathlab permitem exibir soluções aproximadas de $(x(t), y(t))$ o que pode nos dar uma boa ideia do que acontece em diversos problemas aplicados (ver [MA], [MAT], [MATL]).

O caso mais geral de equação diferencial em R^2 seria

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = f(x(t), y(t)) \\ \\ \frac{dy}{dt} & = g(x(t), y(t)) \end{cases},$$

onde $f : R^2 \to R$ e $g : R^2 \to R$.

Quando

$$f(x, y) = a\,x + b\,y$$

e

$$g(x, y) = c\,x + d\,y$$

obtemos um sistema linear de equações diferenciais.

No caso do último exemplo acima temos que

$$f(x, y) = 5\,x^2 + 6.9\ \cos(y),$$

e

$$g(x, y) = x^3 + 4\,y + 7.$$

Note que no caso geral, se (x_0, y_0) é tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e $g(x_0, y_0) = 0$, então, da mesma forma com antes, se a curva $(x(t), y(t))$, $t \in R$, for constante igual a (x_0, y_0) então $(x(t), y(t))$, $t \in R$ é solução ou seja satisfaz a equação acima. Dizemos neste caso que $(x(t), y(t))$ é uma solução em equilíbrio. Em muitos problemas reais, o que se deseja é saber quem é (x_0, y_0) tal que as duas populações $x(t)$ e $y(t)$ ficam em equilíbrio nestes valores. Para tanto basta descobrir os (x_0, y_0) tal que $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)) = (0, 0)$. Neste caso, a solução $(x(t), y(t)$ fica parada na posição (x_0, y_0) com a variação de t.

Da mesma maneira como antes, alguns equilíbrios são estáveis e outros não. O exame destas possibilidades é mais complexo na presente situação (ver [B])

Note que quando o sistema é linear, sempre vale que $(f(0, 0), g(0, 0)) = (0, 0)$. Logo, neste caso, a função $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ para todo t real é solução de equilíbrio.

É muitas vezes muito útil para se ter uma idéia da evolução dinâmica das distintas soluções analisar o desenho no plano R^2 de várias curvas soluções. Na figura 21 desenhamos duas no caso de um certo sistema linear. Na seguinte figura 22 exibimos três em outro exemplo distinto de equação diferencial linear. A descrição geométrica no plano das distintas soluções é chamado de espaço de fase da equação diferencial.

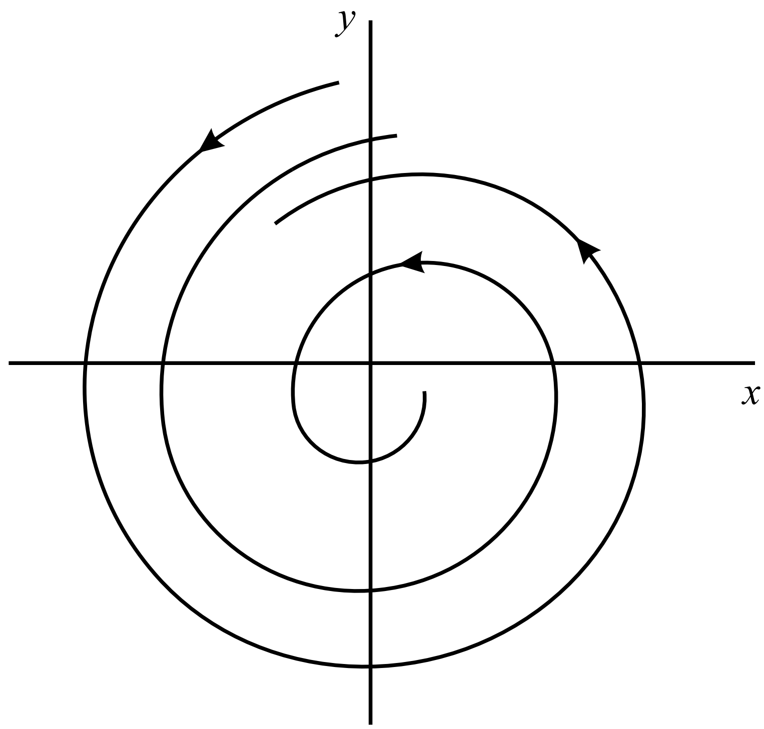

Figura 1.14:

Bibliografia:

[Ba] E. Batschelet, "Introdução ‘a matemática para biocientistas", Editora Interciencia, São Paulo, (1978)

[BD] W. Boyce and R. Diprima, "Equações Diferenciais elementares e problemas de contorno", Ed Guanabara 2, (1977)

[B] M. Braun, "Differential equations and their applications", Springer Verlag, (1975)

[BF] R. Bassanezi e W. Ferreira Jr., "Equações Diferenciais com aplicações", Ed Harbra, (1988)

[Bu] E. Butkov, "Física Matemática", LTC, Rio de Janeiro

[Ca] M. P. do Carmo, "Elementos de Geometria Diferencial", LTC, Rio de Janeiro (1969)

[Ch] A. Chiang, "Matemática para economistas", Ed McGraw Hill, (1982)

[Co] S. D. Conte, "Elementos de Análise Numérica"Ed Globo, (1977)

[DL] C. Doering and A. Lopes, "Equações Diferenciais Ordinárias", a ser publicado

[FN] D. Figueiredo e A. Neves, "Equações Diferenciais Aplicadas", Col Mat Universitária, IMPA, (1997)

[HS] M. Hirsh and S. Smale, ”Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra”, Academis Press, (1974)

[I] V. Iório, ”EDP, um curso de graduação”, Col Mat Universitária, IMPA, (1991)

[II] R. Iório e V. Iório, ”Equações Diferenciais Parciais, uma introdução”, Proj Eucliodes, IMPA, (1988)

[KF] A. Kolomogorov e S. Fomin, ”Elemementos da Teoria das funções e de Análise Funcional”, Ed MIR, (1982)

[KG] D. Kaplan and L. Glass, ”Understanding nonlinear dynamics”, Springer Verlag, (1995)

[Li1] E. Lima, ”Álgebra Linear”, Col Mat Universitária, IMPA, (1996)

[Li2] E. Lima, ”Curso de Análise”, Vol I, Proj Euclides, IMPA, (1976)

[Li3] E. Lima, ”Curso de Análise”, Vol II, Proj Euclides, IMPA, (1981)

[L] A. Lopes, ”Introdução à Mecânica Clássica”, Monografias de Matemática, IMPA, (2000)

[MA] B. W. Char e outros, ”MAPLE V, Fisrt leaves: a tutorial introduction to MAPLE V”Springer Verlag (1992)

[MAT] S. Wolfram, ”MATHEMATICA, a system for doing Mathematics by computer”, Addison Weseley, (1991)

[MATL] ”MATHLAB - High performance numeric computation and visualization software”, The Math Works, Inc, (1992)

[S] J. Sotomayor, ”Lições de equações diferenciais ordinárias”, Proj Euclides, IMPA, (1979)

[Sp1] M. Spiegel, ”Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas”, McGraw Hill, (1973)

[Sp2] M. Spiegel, ”Transformadas de Laplace”, McGraw Hill, (1965)

[SW] E. Swokowski, ”Cálculo, Vol I e II”, Mc Graw Hill, (1983)

Índice Alfabético