

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

## PRIMEIRA PROVA A

**Questão 1** (2 pontos) Resolva o PVI e determine o intervalo máximo de definição da solução da EDO

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3 \quad y(1) = -1$$

**Questão 2.** (2 pontos) Considere a EDO

$$y' = -(y^2 - 8y + d)$$

onde  $d > 0$  é um número real positivo.

- Determine para que valores de  $d$  a EDO possui dois pontos de equilíbrio  $y_1, y_2$ . Esboce o gráfico das soluções e analise sua estabilidade.
- Mostre que se  $0 < y(0) < y_1 < y_2$  a solução atinge o valor 0 num tempo finito, porém se  $y(0) > y_1$  a solução tende a  $y_2$  quando  $t$  cresce.
- Determine para que valores de  $d$  a EDO possui um único ponto de equilíbrio, esboce o gráfico das soluções e analise sua estabilidade.
- Para que valores de  $d$  todas as soluções são decrescentes?

**Questão 3.** (2 pontos) Resolva o PVI abaixo, reduzindo a EDO de segunda ordem a uma EDO de primeira ordem, utilizando a mudança da variável  $p(y) = y'$  como função de  $y$ . Determine o intervalo máximo de definição da solução do PVI.

$$2yy'' = 3(y')^2 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

**Questão 4.** (2 pontos) Considere o sistema massa-mola que é descrito pela equação

$$x'' + 6x' + 9x = 0$$

- Encontre a solução geral da EDO acima.
- Resolva o PVI para  $x(0) = a$ ,  $a > 0$  e  $x'(0) = b$ .
- Qual a condição que  $a, b$  devem satisfazer para que a massa passe uma vez pela posição de equilíbrio ( $x = 0$ )?

**Questão 5.** (2 pontos) Uma caixa d'água tem a forma de um paralelepípedo de base 6m por 3m e 2m de altura e está inicialmente cheia. No fundo da caixa existe uma pequena abertura circular de raio  $r$  m. Indique por  $y = y(t)$  a altura da água no tanque no instante  $t$ . Sabe-se que a velocidade com que a água deixa o tanque pela abertura no fundo é de  $\sqrt{2gy}$  m/s. Encontre a altura  $y$  da água na caixa em função de  $t$  e o instante que o tanque esvazia.