Sessão 1: Generalidades

Uma *equação diferencial* é uma equação envolvendo derivadas. Fala-se em derivada de uma função. Portanto o que se procura em uma equação diferencial é uma função. Em lugar de começar definindo de conceitos, vamos fazer isto já dentro de exemplos.

Exemplo 1. Resolver a equação diferencial

$$y' = xy \; . \tag{1}$$

O que se procura aqui é uma função $y = y(x)$ de uma variável x, cuja derivada em qualquer ponto satisfaz a equação (1). Dizemos que x é a *variável independente* e y é a *variável dependente*. A equação (1) pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = xy \; .$$

Nesta equação pode-se separar as variáveis: deixar de um lado da igualdade todos os termos em x e dx e do outro lado todos os termos em y e dy:

$$\frac{dy}{y} = x\,dx \qquad \text{ou} \qquad y = 0.$$

A função constante $y = 0$ é uma solução da equação diferencial (1). As demais são obtidas integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \; ,$$

que nos dá

$$\ln|y| + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \; .$$

Note que é desnecessário considerar as duas constantes de integração, elas podem ser agrupadas numa só,

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \big(C_2 - C_1\big) \; .$$

Chamando de $C = C_1 - C_2$, temos

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \; ,$$

ou, tomando exponencial,

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^C e^{\frac{x^2}{2}} \; .$$

Portanto $y = \pm e^C e^{\frac{x^2}{2}}$. Mas se C é uma constante arbitrária, $\pm e^C$ também é, pode assumir qualquer valor não nulo. Chamando $D = \pm e^C$, temos que

$$y = D\,e^{\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

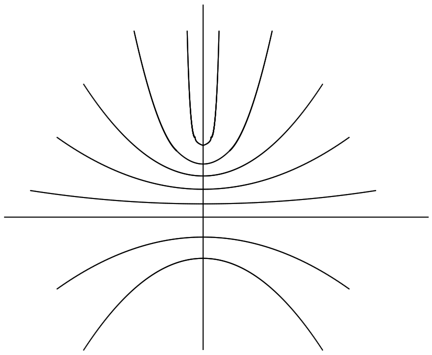


Figura 1

representa uma família de soluções da equação diferencial (1). Note que a solução particular $y = 0$ também estará contida na família (2), se permitirmos que D assuma também o valor 0. Portanto (2) representa a família de todas as soluções da equação diferencial (1), sendo por isto isto chamada de *solução geral* da equação diferencial (1). Um esboço da família de curvas (2) é dado ao lado. Neste exemplo pode-se notar um fato que é típico: por um ponto do plano passa uma e somente uma curva da família (2). Portanto se à equação diferencial (1) acrescentarmos uma condição do tipo $y(a) = b$, chamada de *condição inicial*, formando o que se chama de um *problema de valor inicial*, teremos uma e somente uma solução. Isto se deve ao fato que, *ao impor a condição inicial* $y(a) = b$, *geometricamente isto significa que, dentre todas as curvas da família de soluções, estamos querendo aquela que passe pelo ponto de coordenadas* (a, b). Por exemplo, considerando o problema de valor inicial (PVI)

$$y' = xy \qquad , \qquad y(2) = 3 \,,$$

substituindo a condição inicial em (2), temos $3 = D\,e^2$. Portanto $D = 3\,e^{-2}$. Logo a solução do PVI é

$$y = 3\,e^{-2}\,e^{\frac{x^2}{2}} \,.$$

Observações: 1. Daqui para a frente, toda a vez que estivermos resolvendo uma equação diferencial pelo método de separação de variáveis, ao integrarmos os dois lados, nunca mais colocaremos uma constante de integração de cada lado, pois, como vimos no exemplo acima, elas poderão ser agrupadas em uma só.

2. O procedimento descrito acima para resolver a equação diferencial (1) é um procedimento mecânico, que se presta para os cálculos práticos, mas que, à primeira vista, pode parecer meio mágico. No entanto, é um método que pode ser usado sem reservas, pois como mostraremos a seguir, sempre que o desejarmos ele pode ser tornado rigoroso.

Consideremos novamente a equação diferencial (1)

$$y' = xy \,.$$

Ela equivale a

$$\frac{y'}{y} = x \qquad \text{ou} \qquad y = 0.$$

Note que, pela Regra da Cadeia (para derivar funções compostas),

$$\Big(\ln|y|\Big)' = \frac{1}{y}\,y' = \frac{y'}{y} \,,$$

de modo que a equação diferencial original pode ser escrita como

$$\Big(\ln|y|\Big)' = x \,.$$

Logo $\ln|y| = \displaystyle\int x\,dx - \frac{x^2}{2} + C$. A partir daqui, continuamos como no exemplo acima.

Exemplo 2 – Crescimento Populacional. Suponhamos que se tenha uma população (de bactérias, por exemplo). Indiquemos por $N = N(t)$ o número de indivíduos no instante t. É claro que N varia aos saltos, pois só assume valores inteiros. Mas em um modelo matemático fazemos sempre descrições aproximadas. A realidade em geral é muito complicada. Num modelo matemático levamos em conta apenas alguns aspectos desta realidade, tentando isolar os aspectos mais relevantes. Com este espírito, em nosso modelo vamos supor que $N = N(t)$ varie continuamente com o tempo. Vamos inclusive derivar N em relação a t. A derivada $N'(t) = \dfrac{dN}{dt}$ representa a taxa de crescimento da população. Sabemos, da Biologia, que a taxa de crescimento de uma população em um dado instante é diretamente proporcional ao número de indivíduos neste instante. Em símbolos

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\, N, \tag{3}$$

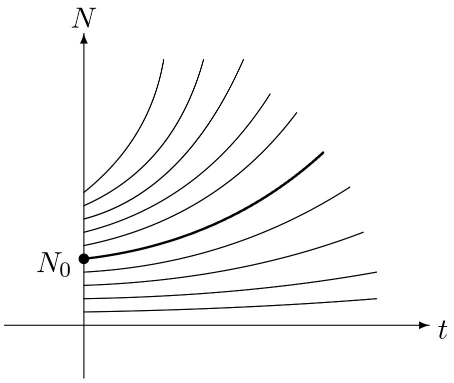
onde $\lambda > 0$ é uma constante que só depende da espécie de bactérias que se está observando (depende do tempo que cada célula leva para se dividir). A equação diferencial (3) também pode ser resolvida por separação de variáveis.

$$\frac{dN}{N} = \lambda\, dt \qquad \text{ou} \qquad N = 0.$$

A função constante $N = 0$ é uma solução particular de (3), embora não seja relevante no caso da população. Por integração,

$$\int \frac{dN}{N} = \lambda \int dt\ ,$$

ou seja, $\ln N = \lambda\, t + C$. Aplicando a exponencial, $N = e^C e^{\lambda\, t}$. Mas e^C representa uma constante arbitrária. O significado não muda se usarmos qualquer outra letra para representá-la. Podemos inclusive usar novamente a letra C. Assim, a solução geral de (3) é



$$N = Ce^{\lambda\, t}\ .$$

Se for conhecida a população N_0 no instante inicial $t = 0$, isto é, se tivermos uma condição inicial $N(0) = N_0$, determinamos $C = N_0$,

$$N = N_0 e^{\lambda\, t}\ .$$

Concluímos que, segundo este modelo, a população cresce exponencialmente. Neste exemplo novamente observamos que em cada ponto do plano passa uma e somente uma solução da equação diferencial. Portanto acrescentando uma condição inicial, ou equivalentemente, ao exigir que a curva solução passe por um determinado ponto, teremos uma única solução para o PVI.

Obs. O fenômeno do decaimento radiativo pode ser modelado pela mesma equação diferencial. Se $N = N(t)$ denota agora a quantidade de material radiativo em uma certa amostra, N decai a uma taxa, em cada instante t, proporcianal à quantidade existente de material no instante t. Mas como N diminui, temos $N' < 0$. Assim a equação diferencial é

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N\ .$$

Fazendo uma análise semelhante à feita acima, encontramos a solução geral

$$N = C\, e^{-\lambda\, t}\ .$$

Exemplo 3. Resolver a equação diferencial

$$y'' + y = 0 \ . \tag{4}$$

Esta é uma *equação diferencial de 2ª ordem.* Por definição, a *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que aparece na equação. Ao resolver (4) estamos procurando uma função y, cuja derivada segunda seja $y'' = -y$. Pela experiência acumulada do Cálculo, conhecemos duas funções que satisfazem a esta condição, $y_1 = y_1(x) = \cos x$ e $y_2 = y_2(x) = \operatorname{sen} x$. Estas são duas *soluções particulares* da equação diferencial (4). A partir delas podemos construir toda uma família de soluções,

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x \ . \tag{5}$$

Por exemplo, $y = 2\cos x - 5 \operatorname{sen} x$ faz parte desta família. É imediato verificar que qualquer função da forma (5) é uma solução de (4). De fato, se

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x \ ,$$

então

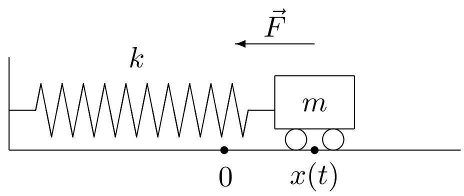
$$y' = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

e, portanto,

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x = -y \ .$$

O que não é nada óbvio e será mostrado mais tarde é que vale a recíproca, toda solução da equação diferencial (4) faz parte da família (5), isto é, (5) é a família de **todas** as soluções da equação diferencial (4). Por esta razão, (5) é chamada de *solução geral* da equação diferencial (4). Note que esta família envolve **duas** constantes arbitrárias, sendo por isto de um tipo "maior", do que a solução geral de uma equação diferencial de 1ª ordem, que envolve uma constante arbitrária. De uma maneira geral, o número de constantes arbitrárias envolvidas na solução geral de uma equação diferencial é igual à ordem da equação diferencial.

Exemplo 4 – Sistema Massa–Mola. Consideremos o sistema mecânico mostrado na figura, formado por uma massa m presa a uma mola de constante de elasticidade k e que realiza oscilações livres (sem força externa), não amortecidas (sem atrito) em torno de uma posição de equilíbrio. Colocamos a coordenada 0 na posição de equilíbrio. Em cada instante t a massa ocupa a posição de abscissa $x = x(t)$. A única força que age sobre a massa é a força restauradora elástica F. O sentido desta força é contrário ao do deslocamento x e seu módulo é diretamente proporcional ao módulo do deslocamento.



$$F = -k\,x \ .$$

Por outro lado, pela 2ª lei de Newton, a força é igual a massa vezes a aceleração,

$$F = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \ .$$

Igualando estas duas expresões para a força, obtemos a equação diferencial

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \ ,$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \ , \qquad \text{com} \ \ \omega^2 = \frac{k}{m} \ . \tag{6}$$

Podemos verificar que $x_1 = x_1(t) = \cos \omega t$ e $x_2 = \operatorname{sen} \omega t$ são duas soluções particulares de (6). Do mesmo modo que no exemplo 3, podemos, a partir delas, construir uma família de soluções

$$x = x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \ . \tag{7}$$

Nossa intuição física nos diz que para prever a posição da massa em um instante t futuro, precisamos conhecer dois dados, a posição e a velocidade iniciais. Chegamos assim ao chamado *problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \tag{8}$$

que consiste da equação diferencial de 2ª ordem (6) e duas condições iniciais. A solução geral (7) corresponde às infinitas oscilações que nosso sistema massa–mola pode realizar. As condições iniciais permitem determinar as constantes C_1 e C_2. De fato, fazendo $t = 0$ em (7) econtramos $C_1 = x_0$. Derivando (7) e fazendo $t = 0$ em (7), econtramos $C_2 = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Assim, a equação diferencial (6) tem uma infinidade de soluções, mas o problema de valor inicial (8) tem uma só solução,

$$x(t) = x_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen}\left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \ . \tag{9}$$

Observação. Vamos aproveitar para fazer uma observação muito útil nas aplicações. Olhando a expressão (7) para a solução geral, fica difícil ter uma idéia geométrica da família de funções por ela representadas. Por isto, vamos transformar a expressão (7). Seja P o ponto do plano cujas coordenadas cartesianas são $P = \big(C_2, C_1\big)$. O ponto P tem coordenadas polares, digamos, C e φ, dadas por

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad \text{e} \qquad \varphi = \arctan \frac{C_1}{C_2} \ .$$

Temos

$$C_1 = C \ \operatorname{sen} \varphi \qquad \text{e} \qquad C_2 = C \ \cos \varphi \ .$$

Substituindo em (7) temos

$$x(t) = C \ \cos \omega t \ \operatorname{sen} \varphi + C \ \operatorname{sen} \omega t \ \cos \varphi$$

ou seja,

$$x(t) = C \operatorname{sen}\big(\omega t + \varphi\big) \ . \tag{10}$$

A conclusão é que (7) e (10) são duas maneiras diferentes de expressar a solução geral da equação diferencial (6). Este exemplo ilustra o fato que podem existir diferentes maneiras de expressar a solução geral. A expressão (10) para a solução geral é muito mais conveniente para ter uma descrição geométrica para a solução geral. A constante φ corresponde a uma translação horizontal. O fator C simplesmente modifica a amplitude. Portanto qualquer solução $x(t)$ é obtida da senóide $x = \operatorname{sen} \omega t$ através de um deslocamento horizontal e da multiplicação por uma constante C.

Classificação das Equações Diferenciais

– A **ordem** de uma equação diferencial é a maior ordem de derivação envolvida.
Exemplo: $y'' - 2xy' + 4y = e^x$ é uma equação diferencial de 2ª ordem.

– Uma equação diferencial é **ordinária** (EDO) se a função procurada for de uma variável.
Exemplo: Todos vistos até agora.

– Uma equação diferencial é **parcial** (EDP) se a função procurada for uma função de várias variáveis e, conseqüentemente, a equação envolver derivadas parciais.

Exemplo: A *Equação de Laplace* $u_{xx} + u_{yy} = 0$, é uma equação diferencial parcial de 2ª ordem. Alguns exemplos de soluções particulares da equação de Laplace são $u_1(x,y) = x^2 - y^2$, $u_2(x,y) = xy$, $u_3(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $u_4(x,y) = e^x \cos y$, $u_5(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, $u_6(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $u_7(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $u_8(x,y) = Ax + by + C$, $u_9(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
O objetivo de dar esta lista de algumas soluções particulares da equação de Laplace é mostrar que existem soluções dos mais diversos tipos. A estrutura da família das soluções é muito mais complexa do que nos exemplos vistos de equações diferenciais ordinárias.

Notação

No exemplo baixo mostramos 3 notações usuais para a mesma EDO:

(i) $\left(x - y^2\right)y' = x^2 y$

(ii) $\left(x - y^2\right)\dfrac{dy}{dx} = x^2 y$

(iii) $x^2 y \, dx + \left(y^2 - x\right)dy = 0$

Observação. Não precisamos nos preocupar com o sentido de cada um dos símbolos dx e dy isoladamente. Apenas convecionamos que o significado da expressão (iii) acima é o que se obtém ao dividir tudo por dx.