Seção 12: Equações Diferenciais Lineares não Homogêneas de Coeficientes Constantes

O objetivo desta seção é estudar as equações lineares não homogêneas de coeficientes constantes. No entanto, a versão do Prinicípio de Superposição que apresentamos a seguir é válida para equações de coeficientes quaisquer.

Teorema (Prinicípio de Superposição). *Consideremos uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem*

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = r(t)\,. \tag{1}$$

Se $y_p(t)$ é uma solução particular da equação não homogênea (1) *e se $y_0(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ é a solução geral da equação homogênea associada*

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = 0, \tag{2}$$

então

$$y = y_0 + y_p = y_0 + C_1y_1 + C_2y_2 \tag{3}$$

é a solução geral da equação não homogênea (1)*.*

Demonstração: Consideremos o operador diferencial

$$L(y) = y'' + f(t)y' + g(t)y\,.$$

Suponhamos que conhecemos uma solução particular y_p da equação não homogênea (1) e que conhecemos também a solução geral $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$ da equação homogênea associada (2). Então,

$$L(y_p) = r(t) \qquad \text{e} \qquad L(y_0) = 0.$$

Formamos $y = y_0 + y_p$. Então,

$$L(y) = L(y_0 + y_p) = L(y_0) + L(y_p) = 0 + r(t) = r(t).$$

Portanto, as família de funções (3) são soluções da equação não homogênea (1).

Reciprocamente, se y é uma solução qualquer da equação não homogênea (1), definindo y_0 por $y_0 = y - y_p$, temos que y_0 é uma solução da equação homogênea (2). De fato,

$$L(y_0) = L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = r(t) - r(t) = 0\,.$$

Portanto existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$y_0 = y - y_p = C_1y_1 + C_2y_2\,.$$

Portanto, (3) é a família de todas as soluções da equação não homogênea (1).

Exemplo 1. Resolva o problema de valor incial

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 5 \\ y(0) = -1\ , \quad y'(0) = 3 \end{cases} \tag{4}$$

A equação característica

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

tem raízes $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Duas soluções L.I. da equação homogênea associada são $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-t}$. Precisamos encontrar uma solução particular y_p da equação não homogênea. Como o lado direito é uma constante, é razoável procurarmos y_p da forma $y_p = C$. Substituindo na EDO não homogênea obtemos

$$0 + 0 + 2C = 5\,.$$

Portanto $C = 5/2$ e $y_p = 5/2$. Segue que a solução geral da equação não homogênea é

$$y = \frac{5}{2} + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}\,.$$

Utilizando as condições iniciais, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{5}{2} + C_1 + C_2 = -1 \\ -2C_1 - C_2 = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$C_1 = \frac{1}{2} \qquad , \qquad C_2 = -4\,.$$

Logo a solução do PVI (4) é

$$y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,e^{-2t} - 4\,e^{-t}\,.$$

Método dos Coeficientes a Determinar

A partir de agora, vomos nos concentrar no caso de equações lineares não homogêneas de coeficientes variáveis. Na seção anterior já vimos como resolver a equação homogênea associada. Falta ainda saber como encontrar uma solução particular y_p da equação não homogênea.

O Método dos Coeficientes a Determinar é um método para encontrar uma solução particular de uma EDO linear não homogênea

$$L(y) = r(t).$$

Limitações do método:

– A equação diferencial deve ser um EDO linear de <u>coeficientes constantes</u>.

– O termo não homogêneo $r(t)$ deve ser uma combinação de exponenciais, polinômios, senos e cossenos. Por exemplo, $r(t)$ poderia ser:

(a) $r(t) = 5e^{2t} - 2e^{-3t}$

(b) $r(t) = te^{2t} - \big(1 + 3t^2\big)e^{3t}$

(c) $r(t) = 2\cos 3t + \frac{7}{3}\,\mathrm{sen}\,3t$

(d) $r(t) = 3t\cos 3t + \big(5 + 3t\big)\,\mathrm{sen}\,3t - \big(t^3 + 2t^2\big)e^{5t}$.

O método dos coeficientes a determinar é, portanto, de aplicabilidade limitada, mas os casos aos quais ele se aplica, são os mais importantes nas aplicações. Sempre que for aplicável, este método é preferível aos demais, por ser um método puramente algébrico, não envolvendo integrações.

Vamos considerar vários casos, ilustrados por exemplos, mas no final veremos que os vários casos podem ser englobados em um único. A razão para esta divisão em casos é puramente didática, visando a seguir uma ordem crescente de complexidade.

Observação Básica. Seja $L(y)$ o operador diferencial $L(y) = y'' + py' + qy$, com p e q constantes e com polinômio característico $f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$. A observação básica é que

$$L\big(e^{\lambda t}\big) = f\big(\lambda\big)e^{\lambda t}. \tag{5}$$

Caso 1: $r(t) = Ae^{at}$

Em virtude da observação básica (5), $L\big(Ce^{at}\big) = CL\big(e^{at}\big) = Cf\big(a\big)e^{at}$. Portanto se a não for uma raiz da equação característica, $f(a) \neq 0$ e a equação não homogênea

$$L(y) = Ae^{at}$$

tem uma solução particular da forma $y_p = Ce^{at}$.

Exemplo 1. Resolver a equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 5e^{2t}$.

Solução:
A equação característica é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Duas soluções L.I. da equação homogênea associada são $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-t}$.
Procuramos uma solução particular da forma $y_p = Ce^{2t}$, onde C é um coeficiente a determinar. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\big(Ce^{2t}\big)'' + 3\big(Ce^{2t}\big)' + 2Ce^{2t} = 5e^{2t}.$$

e, portanto,

$$4Ce^{2t} + 6Ce^{2t} + 2Ce^{2t} = 5e^{2t}.$$

Segue que $12C = 5$ e $C = \dfrac{5}{12}$. Uma solução particular da EDO é $y_p = \dfrac{5}{12}e^{2t}$ e a solução geral é

$$y = \frac{5}{12}e^{2t} + C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}.$$

Exemplo 2. Encontre uma solução particular para a equação diferencial

$$y'' - 3y' + 5y = 2e^t - 3. \tag{6}$$

Solução: A idéia é

– Encontrar y_{p_1} tal que $L\big(y_{p_1}\big) = 2e^t$;
– Encontrar y_{p_2} tal que $L\big(y_{p_2}\big) = -3$;
– Tomar $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$. Por linearidade temos

$$L(y_p) = L\big(y_{p_1} + y_{p_2}\big) = L\big(y_{p_1}\big) + L\big(y_{p_2}\big) = 2e^t - 3.$$

Vamos ter que y_p é uma solução particular da EDO (6). Procuramos y_{p_1} da forma $y_{p_1} = Ce^t$. Substituindo na equação $L(y_{p_1}) = 2e^t$, temos

$$C - 3C + 5C = 2,$$

que nos dá $C = \dfrac{2}{3}$ e $y_{p_1} = \dfrac{2}{3}e^t$.

A EDO $L(y) = -3$ não deixa de ter $r(t)$ da forma $r(t) = Ae^{at}$, simplesmente $a = 0$. Procuramos a solução particular da forma $y_{p_2} = Ce^{0\cdot t} = C$. Substituindo na equação $L(y_{p_2}) = -3$, temos $5C = -3$, ou seja, $C = -\dfrac{3}{5}$ e $y_{p_2} = -\dfrac{3}{5}$. Finalmente uma solução particular da EDO (6) é

$$y_p = \frac{2}{3}e^t - \frac{3}{5}\,.$$

Se a for raiz da equação característica:

Exemplo 3. Encontre uma solução particular para a equação diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2t}. \tag{7}$$

Solução:
A equação característica é $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. Duas soluções L.I. da equação homogênea associada são $y_1 = e^{2t}$ e $y_2 = e^t$.

Se imitássemos o procedimento anterior, procurando uma solução particular da esqução (7) da forma $y_p = Ce^{2t}$, não iríamos encontrar, pois sendo $y_1 = e^{2t}$ solução da equação homogênea associada, $L(Ce^{2t}) = CL(e^{2t}) = 0 \neq 3e^{2t}$ para qualquer valor de C. Portanto temos que procurar nossa solução particular de uma outra forma.

Observação Básica (continuação): Vimos em (5) que $L(e^{\lambda t}) = f(\lambda)\, e^{\lambda t}$. Derivando os dois lados em relação a λ, temos

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(L(e^{\lambda t})\Big) = f'(\lambda)\, e^{\lambda t} + f(\lambda)\, t\, e^{\lambda t}.$$

Para calcular a derivada do lado esquerdo, notemos que o operador diferencial L envolve somente derivadas em relação a variável t. Mas sabemos do Cálculo que a ordem em que se tomam as deriavadas parciais em relação a x e em relação a λ não influem no resultado. Isto significa que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(L(e^{\lambda t})\Big) = L\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\, e^{\lambda t}\Big) = L\big(t\, e^{\lambda t}\big)\,.$$

Combinando com a conclusão anterior, temos

$$L\big(t\, e^{\lambda t}\big) = f'(\lambda)\, e^{\lambda t} + f(\lambda)\, t\, e^{\lambda t}\,. \tag{8}$$

<u>Conclusão</u>: *Se a for uma raiz simples (de multiplicidade 1) da equação característica, isto é, se $f(a) = 0$ e $f'(a) \neq 0$, então $L\big(t\, e^{at}\big) = f'(a)\, e^{at}$, o que implica que a equação $L(y) = A\, e^{at}$ possui uma solução particular da forma $y_p = C\, t\, e^{at}$.*

Retornando ao exemplo 3, vamos então procurar uma solução particular para a equação (7) da forma $y_p = C\, t\, e^{2t}$. Substituindo na equação temos

$$\big(Ct\, e^{2t}\big)'' - 3\big(Ct\, e^{2t}\big)' + 2Ct\, e^{2t} = 3e^{2t},$$

ou seja,

$$4Ce^{2t} + 4Ct\, e^{2t} - 3Ce^{2t} - 6Ct\, e^{2t} + 2Ct\, e^{2t} = 3e^{2t}.$$

Segue que

$$Ce^{2t} = 3e^{2t}$$

e, portanto, $C = \dfrac{1}{3}$. Logo uma solução particular da equação (7) é

$$y_p = \frac{1}{3}\, t\, e^{2t}$$

e a solução geral é

$$y = \frac{1}{3}\, t\, e^{2t} C_1 e^{2t} + C_2 e^{t}.$$

Se a for raiz de multiplicidade 2 da equação característica:

Observação Básica (continuação): Derivando (8) mais uma vez em relação a λ, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(L(t\, e^{\lambda t})\Big) = f''(\lambda)\, e^{\lambda t} + 2f'(\lambda)\, t\, e^{\lambda t} + f(\lambda)\, t^2\, e^{\lambda t}.$$

Como foi justificado acima, a derivação em relação a λ troca de posição com o operador diferencial L,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(L(t\, e^{\lambda t})\Big) = L\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}(t\, e^{\lambda t})\Big) = L\big(t^2\, e^{\lambda t}\big)\,.$$

Combinando com a conclusão anterior, temos

$$L\big(t^2\, e^{\lambda t}\big) = f''(\lambda)\, e^{\lambda t} + 2f'(\lambda)\, t\, e^{\lambda t} + f(\lambda)\, t^2\, e^{\lambda t}\,. \tag{9}$$

Conclusão: *Se a for uma raiz dupla (de multiplicidade 2) da equação característica e, portanto, $f(a) = f'(a) = 0$ e $f''(a) \neq 0$, então $L\big(t^2\, e^{at}\big) = f''(a)\, e^{at}$, o que implica que a EDO $L(y) = A\, e^{at}$ possui uma sulução particular da forma $y_p = C\, t^2\, e^{at}$.*

Exemplo 4. Encontre uma solução particular para a equação diferencial

$$y'' - 10y' + 25y = 3e^{5t}\,. \tag{10}$$

Solução:

A equação característica é $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ e tem raiz dupla $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, pois se fatora como $\big(\lambda - 5\big)^2 = 0$. Procuramos uma solução particular da forma $y_p(t) = At^2 e^{5t}$. Temos

$$y_p'(t) = 2Ate^{5t} + 5At^2e^{5t}\,, \qquad y_p''(t) = \big(2Ae^{5t} + 20At + 25At^2\big)e^{5t}\,.$$

Substituindo na EDO e já dividindo por e^{5t}, temos

$$\big(2A + 20At + 25At^2\big) - 10\big(2At + 5At^2\big) + 25At^2 = 3\,.$$

Agrupando os termos e cancelando, ficamos com

$$2A = 3\,,$$

ou seja, $A = \dfrac{3}{2}$. Portanto uma solução particular é

$$y_p = \frac{3}{2}\, t^2 e^{5t}$$

e a solução geral é

$$y_p = \frac{3}{2}\, t^2 e^{5t} + C_1 e^{5t} + C_2 t e^{5t}\,.$$

Caso 2: $r(t) = p(t)\, e^{at}$, onde $p(t)$ é um polinômio de grau n.

O caso 2 engloba o caso 1. A função $r(t) = Ae^{at}$ do caso 1 corresponde ao caso em que o polinômio $p(t)$ é de grau 0, reduzindo-se à constante $p(t) = A$. Portanto, como acontecia no caso 1, no caso 2 também vai ser importante saber de a é ou não raiz da equação característica e, caso for, com qual multiplicidade.

(i) Se a não for raiz da equação característica, procuraramos uma solução particular da forma $y_p(t) = g(t)\, e^{at}$, com $g(t)$ um polinômio de grau n.

(ii) Se a for raiz simples da equação característica, procuraramos uma solução particular da forma $y_p(t) = g(t)\, t\, e^{at}$, com $g(t)$ um polinômio de grau n.

(iii) Se a for raiz dupla da equação característica, procuraramos uma solução particular da forma $y_p(t) = g(t)\, t^2 e^{at}$, com $g(t)$ um polinômio de grau n.

Exemplo 5. Resolver a equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = te^{3t} + 1\,. \tag{11}$$

Solução:

A equação característica é $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ e tem raízes s ao $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Duas soluções L.I. da equação homogênea associada são $y_1 = e^{3t}$ e $y_2 = e^t$. Vamos primeiro procurar uma solução particular y_{p_1} para a EDO

$$y'' - 4y' + 3y = te^{3t}\,. \tag{12}$$

Como t é um polinômio de grau 1 e 3 é raiz simples da equação característica, procuramos y_{p_1} da forma

$$y_{p_1} = \big(At + B\big)te^{3t} = \big(At^2 + Bt\big)e^{3t}\,.$$

Derivando, encontramos

$$y'_{p_1} = \big(2At + B\big)e^{3t} + 3\big(At^2 + Bt\big)e^{3t} = \big(3At^2 + (2A + 3B)t + B\big)e^{3t}$$

e

$$\begin{aligned} y''_{p_1} &= \big(2A + 2\,(2At + B)\,3 + (At^2 + Bt)\,9\big)e^{3t} \\ &= \big(9At^2 + (12A + 9B)t + (2A + 6B)\big)e^{3t}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (12), temos

$$\big(9At^2 + (12A{+}9B)t + (2A{+}6B)\big)e^{3t} - 4\big(3At^2 + (2A{+}3B)t + B\big)e^{3t} + 3\big(At^2{+}Bt\big)e^{3t} = te^{3t},$$

ou seja,

$$4At + (2A + 5B) = t\,.$$

Segue que

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \dfrac{1}{4}$, $B = -\dfrac{1}{4}$. Portanto,

$$y_{p_1} = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4}\,.$$

é uma solução particular de (12). Em segundo lugar, devemos achar uma solução particular para a equação

$$y'' - 4y' + 3y = 1\,. \tag{13}$$

Procurando uma solução particular de (13) da forma $y_{p_2} = C$, constante, encontramos $y_{p_2} = \dfrac{1}{3}$. Portanto, uma solução particular y_p de (11) é a soma

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4} + \frac{1}{3}\,.$$

A solução geral de (11) é

$$y = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4} + \frac{1}{3} + C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}\,.$$

Exemplo 6.

$$y'' - 3y' = t^2\,.$$

Aqui temos $r(t) = t^2 e^{0t}$, que é um polinômio de grau 2. Mas 0 é raiz simples da equação característica $\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Procuramos, então, uma solução particular para a EDO da forma

$$y_p(t) = (At^2 + Bt + C)t = At^3 + Bt^2 + Ct\,.$$

Substituindo na equação, temos

$$6At + 2B - 9At^2 - 6Bt - 3Ct = t^2\,.$$

Agrupando os termos, obtemos

$$-9At^2 + \big(6A - 6B - 3C\big)t + 2B = t^2.$$

Segue que

$$\begin{cases} -9A = 1 \\ 6A - 6B - 3C = 0 \\ 2B = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = -\dfrac{1}{9}$, $B = 0$, $C = -\dfrac{2}{9}$. A solução particular da equação não homogênea é

$$y_p = -\frac{1}{9}\,t^3 - \frac{2}{9}\,t$$

e a solução geral é

$$y = -\frac{1}{9}\,t^3 - \frac{2}{9}\,t + C_1 e^{3t} + C_2\,.$$

Caso 3: Além dos temos dos exemplos anteriores, $r(t)$ envolve também cossenos e senos.

Exemplo 7. Resolver a equação diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = \operatorname{sen} 4t\,. \tag{14}$$

A equação característica é $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$. A partir delas, construímos duas soluções L.I.

$$y_1 = e^{4t} \qquad \text{e} \qquad y_2 = e^{-t} \tag{15}$$

para a equação homogênea associada

$$y'' - 3y' - 4y = 0\,. \tag{16}$$

Vamos procurar uma solução particular da equação (14). Temos que $r(t) = \operatorname{sen} 4t$, mas devemos lembrar que o seno uma combinação linear de duas exponenciais complexas

$$\operatorname{sen} 4t = \frac{e^{4it} - e^{-4it}}{2i}\,.$$

Portanto, para sabermos de que forma devemos procurar uma solução particula de (14), é importante notar que $4i$ e $-4i$ não são raízes da equação característica.

Por outro lado, como $r(t) = \operatorname{sen} 4t$, a solução particular y_p deve envolver um múltiplo de $\operatorname{sen} 4t$. Mas ao subsituirmos na EDO, as derivadas de $\operatorname{sen} 4t$ envolvem também $\cos 4t$. Por isto, em princípio y_p deve envolver também um múltiplo de $\cos 4t$. Portanto, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p = A\cos 4t + B \operatorname{sen} 4t\,. \tag{17}$$

Substituindo (17) na equação (14), temos

$$(-16A\cos 4t - 16B\operatorname{sen} 4t) - 3(-4A\operatorname{sen} 4t + 4B\cos 4t) - 4(A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t) = \operatorname{sen} 4t\,.$$

Agrupando os termos, temod

$$(-16A - 12B - 4A)\cos 4t + (-16B + 12A - 4B)\operatorname{sen} 4t = \operatorname{sen} 4t\,.$$

Daí segue que

$$\begin{cases} -20A - 12B = 0 \\ \;\;12A - 20B = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$B = -\frac{5}{136} \qquad \text{e} \qquad A = \frac{3}{136}$$

Concluímos que uma solução particular da EDO (14) é

$$y_p = \frac{3\cos 4t - 5\operatorname{sen} 4t}{136}\,.$$

Exemplo 8. Resolver a equação diferencial

$$y'' + 4y = \cos 3t\,. \tag{18}$$

Podemos considerar que a EDO (18) representa oscilações não amortecidas (sem atrito, pois o coeficiente de y' é 0) em um sistema massa–mola. A equação característica é $\lambda^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$. A partir delas, construímos duas soluções L.I.

$$y_1 = \cos 2t \qquad \text{e} \qquad y_2 = \operatorname{sen} 2t \tag{19}$$

para a equação homogênea associada

$$y'' + 4y = 0\,. \tag{20}$$

Podemos considerar que (20) representa oscilações livres (sem força externa) no mesmo sistema massa–mola. O período da funções (19) é π e, portanto, sua freqüência é $1/\pi$. Dizemos que $1/\pi$

é a freqüência natural do sistema. A força externa tem período $2\pi/3$ e, portanto, freqüência $3/2\pi$, que é diferente da freqüência natural do sistema.

Neste exemplo $r(t) = \cos 3t$. Como foi explicado no exemplo anterior, devido ao fato que

$$\cos 3t = \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}$$

é importante notar que $3i$ e $-3i$ não são raízes da equação característica. Por causa disto, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p = A\cos 3t + B\,\mathrm{sen}\,3t\,.$$

Substituindo da EDO (18), temos

$$(-9A\cos 3t - 9B\,\mathrm{sen}\,3t) + 4(A\cos 3t + B\,\mathrm{sen}\,3t) = \cos 3t\,.$$

Agrupando os termos, ficamos com

$$-5A\cos 3t - 5B\,\mathrm{sen}\,3t = \cos 3t\,.$$

Daí segue que $-5A = 1$ e $-5B = 0$, isto é, $A = -\dfrac{1}{5}$ e $B = 0$. Portanto, uma solução particular da EDO (18) é

$$y_p = -\frac{\cos 3t}{5}\,.$$

Exemplo 9. Resolver a equação diferencial

$$y'' + 4y = t\cos 2t\,. \tag{21}$$

Em $r(t)$ temos um cosseno multilicado por t A equação característica da EDO homogênea associada é

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

e suas raízes são $2i$ e $-2i$. Vamos levar em conta que

$$\cos 2t = \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}\,.$$

Portanto este cosseno multiplicado por t equivale a exponenciais multiplicadas pelo polinômio do primeiro grau t.

Tudo isto nos indica que devemos procurar uma solução particular de (21) da forma

$$y_p = (At^2 + Bt)\cos 2t + (Ct^2 + Dt)\,\mathrm{sen}\,2t\,.$$

Para substituirmos a EDO (21), vamos primeiro calcular a derivada segunda de y_p. Temos dois produtos para derivar. Utilizamos a *fórmula de Leibniz*

$$(f\cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''\,.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} y_p'' =& 2A\cos 2t + 2(2At + B)(-2\,\mathrm{sen}\,2t) + (At^2 + Bt)(-4\cos 2t) \\ &+ 2C\,\mathrm{sen}\,2t + 2(2Ct + D)2\cos 2t + (Ct^2 + Dt)(-4\,\mathrm{sen}\,2t)\,. \end{aligned}$$

Sustituindo em (21) obtemos

$$2A\cos 2t + 2(2At+B)(-2\,\mathrm{sen}\,2t) + 2C\,\mathrm{sen}\,2t + 2(2Ct+D)2\cos 2t = t\cos 2t\,.$$

$$(2A+4D)\cos 2t + 8Ct\cos 2t + (-4B+2C)\,\mathrm{sen}\,2t - 8At\,\mathrm{sen}\,2t = t\cos 2t\,.$$

igualando os coeficientes dos termos semelhantes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2A+4D=0 \\ 8C=1 \\ -4B+2C=0 \\ -8A=0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$C=\frac{1}{8} \qquad B=\frac{1}{16} \qquad , \qquad A=D=0\ .$$

Segue que

$$y_p = \frac{2t^2\,\mathrm{sen}\,2t + t\cos 2t}{16}\,.$$

A solução geral da EDO (21) é

$$y = \frac{2t^2\,\mathrm{sen}\,2t + t\cos 2t}{16} + C_1\cos 2t + C_2\,\mathrm{sen}\,2t\,.$$

Exemplos de aplicação às oscilações forçadas.

Exemplo 10. Consideremos a EDO

$$y'' + 2y' + 5y = 8\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right), \tag{22}$$

que representa oscilações forçadas em um sistema massa–mola, como vimos anteriormente. A equação característica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

tem raízes complexas $\lambda_1 = -1+2i$ e $\lambda_2 = -1-2i$. Duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada são $y_1 = e^{-t}\cos 2t$ e $y_2 = e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t$. De que forma devemos procurar uma solução particular da equação (22)? Notemos que $r(t) = 8\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right)$ e que o seno é uma combinação linear de exponenciais, mais especificamente,

$$\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right) = \frac{e^{i\sqrt{3}\,t} - e^{-i\sqrt{3}\,t}}{2i}\,.$$

Portanto a forma em que vamos procurar a solução particular vai depender de saber se $\pm i\sqrt{3}$ são ou não raizes da equação característica. Como $\pm i\sqrt{3}$ não são raízes da equação característica, procuramos solução particular da forma

$$y_p = A\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right)\,.$$

Substituindo na equação (22), temos

$$\Big(-3A\cos(\sqrt{3}\,t) - 3B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\Big) + 2\Big(B\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,t) - A\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\Big)$$

$$+5\Big(A\cos(\sqrt{3}\,t) + B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\Big) = 8\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\,.$$

Agrupando os termos,

$$\Big(2A + 2B\sqrt{3}\Big)\cos(\sqrt{3}\,t) + \Big(2A\sqrt{3} + 2B\Big)\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t) = 8\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\,.$$

Portanto A e B são soluções do sistema

$$\begin{cases} 2A + 2B\sqrt{3} = 0 \\ -2A\sqrt{3} + 2B = 8 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $\sqrt{3}$ e somando com a segunda, encontramos $B = 1$. Segue que $A = -\sqrt{3}$. Portanto uma solução particular da equação (22) é

$$y_p = -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,t) + \,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\,.$$

Portanto a solução geral da equação (22) é

$$y = \Big(-\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,t) + \,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\Big) + \Big(C_1e^{-t}\cos 2t + C_2e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t\Big)\,. \tag{23}$$

A solução (23) é a resposta do sistema à força externa $8\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)$. As constantes C_1 e C_2 dependem das condições iniciais. O termo $\Big(C_1e^{-t}\cos 2t + C_2e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t\Big)$ é chamado de *parte transiente* da resposta. Devido à presença da exponencial e^{-t}, a parte transiente tende a 0 quando $t \longrightarrow +\infty$. Em conseqüência, após um certo tempo, vamos observar

$$y \approx -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,t) + \,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t).$$

Por esta razão o termo $\Big(-\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,t) + \,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\Big)$ é chamado de *parte estacionária* da resposta. Neste exemplo a parte estacionária pode ser reescrita como

$$2\Big(\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{3}\,t)\cos\frac{\pi}{3} - \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos(\sqrt{3}\,t)\Big) = 2\,\mathrm{sen}\,\Big(\sqrt{3}\,t - \frac{\pi}{3}\Big)$$

Note que a resposta estacionária tem freqüência igual à da força externa, mas apresenta um atraso de fase em relação a ela.

Exemplo 11. Consideremos a EDO

$$y'' + 2y' + 5y = \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t) \tag{24}$$

que representa oscilações forçadas em um sistema massa–mola, como no exemplo anterior. A equação característica é a mesma do exemplo anterior

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Como vimos, as raízes camplexas complexas, $\lambda_1 = -1+2i$ e $\lambda_2 = -1-2i$. Duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada são $y_1 = e^{-t}\cos 2t$ e $y_2 = e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t$. Como está explicado no exemplo anterior, devemos procurar solução particular da forma

$$y_p = A\cos(\sqrt{5}\,t) + B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t)\,.$$

Substituindo na equação (24), obtemos

$$\Big(-5A\cos(\sqrt{5}\,t) - 5B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t)\Big) + 2\Big(B\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}\,t) - A\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t)\Big)$$

$$+5\Big(A\cos(\sqrt{5}\,t) + B\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t)\Big) = 8\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t)\,.$$

Agrupando os termos, obtemos

$$2B\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}\,t) - 2A\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t) = \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t)\,.$$

Portanto $A = \dfrac{1}{2}$ e $B = 0$ e uma solução particular da equação (24) é

$$y_p = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{5}\,t).$$

Portanto a solução geral da equação (24) é

$$y = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{5}\,t) + \Big(C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t\Big)\,. \tag{25}$$

A solução (25) é a resposta do sistema à força externa $\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\,t)$. As constantes C_1 e C_2 dependem das condições iniciais. O termo $\Big(C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t\Big)$ é a parte transiente da resposta. É a parte que depende das condições iniciais e tende a 0 quando $t \longrightarrow +\infty$. Em conseqüência, após um certo tempo, vamos observar a resposta periódica

$$y \approx \frac{1}{2}\cos(\sqrt{5}\,t),$$

que é a parte estacionária da resposta. Neste exemplo observamos novamente que a resposta estacionária tem freqüência igual à da força externa, mas apresenta um atraso de fase em relação a ela.

Exemplo 12. Neste exemplo vamos observar ressonância. A equação diferencial

$$y'' + 4y = \mathrm{sen}\,2t \tag{26}$$

representa oscilações não amortecidas (sem atrito, pois o coeficiente de y' é 0). A equação característica é $\lambda^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$. Duas soluções linearmente independentes de (26) são $y_1(t) = \cos 2t$ e $y_2(t) = \mathrm{sen}\,2t$. Portanto, a oscilações livres neste sistema têm período π e freqüência $1/\pi$. A força externa é dada pela função $\mathrm{sen}\,2t$ e tem freqüência exatamente igual à freqüência natural do sistema. Como

$$\mathrm{sen}\,2t = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}$$

e como $2i$ e $-2i$ são raízes da equação característica, vamos procurar uma solução particular de (26) da forma

$$y_p = At\cos 2t + Bt\,\mathrm{sen}\,2t\,.$$

Derivando duas vezes (o melhor é utilizar a fórmula de Leibniz para derivar o produto, conforme foi explicado acima), obtemos

$$y_p'' = 2A(-2\,\mathrm{sen}\,2t) - 4At\cos 2t + 2B2\cos 2t - 4Bt\,\mathrm{sen}\,2t\,.$$

Substituindo em (26), temos

$$-4A \operatorname{sen} 2t + 4B \cos 2t = \operatorname{sen} 2t\,.$$

Segue que $-4A = 1$ e $B = 0$. Logo,

$$y_p = \frac{t \cos 2t}{4}\,.$$

Portanto a solução geral de (26) é

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{t \cos 2t}{4}\,.$$

Os valores das constantes C_1 e C_2 dependem das condições iniciais, mas quaisquer que sejam eles, o termo $y_0(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t$ é limitado, $|y_0(t)| \leq \left|C_1\right| + \left|C_2\right|$, enquanto que o termo $\dfrac{t \cos 2t}{4}$ oscila com amplitude tendendo ao infinito. Portanto, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2, a solução $y(t)$ oscila com amplitude tendendo ao infinito. Estamos diante do fenômeno de ressonância.

Exemplo 13. Consideremos o PVI

$$\begin{cases} y'' + 25y = \cos 6t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

O PVI (28) representa oscilações não amortecidas (sem atrito) de um sistema massa–mola. As condições iniciais nos dizem que a massa parte do repouso, na posição de equilíbrio $y = 0$. A equação homogênea associada

$$y'' + 25y = 0 \tag{28}$$

governa as oscilações livres (sem força externa) no mesmo sistema massa–mola. Suas soluções

$$y_1 = \cos 5t \qquad \text{e} \qquad y_2 = \operatorname{sen} 5t$$

caracterizam a freqüência natural de oscilação do sistema. Note que a freqüência da força externa $\cos 6t$ é próxima. Como $6i$ e $-6i$ não são raízes da equação característica, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p = A \cos 6t + B \operatorname{sen} 6t\,.$$

Substituindo na equação (28), temos

$$(-36A \cos 6t - 36B \operatorname{sen} 6t) + 25(A \cos 6t + B \operatorname{sen} 6t) = \cos 6t\,,$$

istoé,

$$-11A \cos 6t - 11B \operatorname{sen} 6t = \cos 6t\,.$$

Segue que $-11A = 1$ e $-11B = 0$, ou seja, $A = -\dfrac{1}{11}$ e $B = 0$. Logo, auma solução particular da equação (28) é

$$y_p = -\frac{1}{11} \cos 6t\,.$$

Portanto, a solução geral da equação (28) é

$$y = -\frac{1}{11} \cos 6t + C \cos 5t + D \operatorname{sen} 5t\,.$$

Temos então

$$y' = \frac{6}{11}\operatorname{sen} 6t - 5C \operatorname{sen} 5t + 5D\cos 5t\,,$$

de modo que as condições iniciais nos dizem que

$$0 = y(0) = -\frac{1}{11} + C$$
$$0 = y'(0) = 5D$$

Portanto, $C = \dfrac{1}{11}$ e $D = 0$. A solução do PVI (28) é

$$y(t) = \frac{1}{11}\Big(\cos 5t - \cos 6t\Big). \tag{29}$$

Vamos obter uma outra expressão para a solução, que vai nos possibilitar ter uma idéia de seu gráfico e do seu comportamento. Começamos com as fórmulas da Trigonometria

$$\cos\big(A+B\big) = \cos A\cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$
$$\cos\big(A-B\big) = \cos A\cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Subtraindo as duas, obtemos

$$\cos\big(A+B\big) - \cos\big(A-B\big) = -2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Para aplicar em (29), precisamos encontrar A e B tais que

$$\begin{cases} A+B = 5t \\ A-B = 6t \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos

$$A = \frac{11t}{2} \quad , \qquad B = -\frac{t}{2}\,.$$

Portanto, a solução (29) do PVI (28) pode ser reescrita como

$$y(t) = \frac{1}{11}\Big(\cos 5t - \cos 6t\Big) = \frac{2}{11}\,\operatorname{sen}\frac{11t}{2}\,\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,. \tag{30}$$

Na figura abaixo o gráfico da solução $y(t)$ está representado pela linha mais grossa. Estão representadas também as curvas $y = \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}$ e $y = -\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}$, que servem da apoio para o gráfico da solução. Note que o período da função de apoio $y = \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}$ é muito maior do que o período da força externa e o período das oscilações livres no mesmo sistema ($y_0 = C_1\cos 5t + C_2 \operatorname{sen} 5t$).