Equações de Bernoulli

Definição. Uma **equação de Bernoulli** é uma equação diferencial de 1ª ordem da forma

$$y' + f(x)\,y = g(x)\,y^n \ , \tag{1}$$

onde n é um número real (não precisa ser inteiro nem positivo). Vamos sempre considerar $n \neq 0, 1$, pois nestes 2 casos a EDO é linear, que já sabemos resolver.

Método de resolução. Experimentemos fazer uma mudança de variável do tipo $y = z^p$. Substituindo em (1), temos

$$p\,z^{p-1}z' + f(x)z^p = g(x)\,z^{np} \ ,$$

ou seja,

$$p\,z' + f(x)z = g(x)\,z^{np-p+1} \ . \tag{2}$$

A EDO (2) se torna o mais simples possível se $np - p + 1 = 0$, isto é

$$p = \frac{1}{1-n} \ .$$

Em outras palavras, para resolver (1), vamos fazer a substituição $y = z^{\frac{1}{1-n}}$.

Conclusão. Com a mudança de variável

$$z = y^{1-n} \tag{3}$$

a EDO de Bernoulli (1) se transforma em uma EDO linear.

De fato, de (1) decorre que

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} \ , \qquad y' = \frac{1}{1-n}\,z^{\frac{1}{1-n}-1}\,z' = \frac{1}{1-n}\,z^{\frac{n}{1-n}}\,z' \ .$$

Substituindo em (1), temos

$$\frac{1}{1-n}\,z^{\frac{n}{1-n}}\,z' + f(x)\,z^{\frac{1}{1-n}} = g(x)\,z^{\frac{n}{1-n}} \ ,$$

isto é,

$$\frac{1}{1-n}\,z' + f(x)\,z = g(x) \ ,$$

que uma EDO linear.

Se o expoente $1-n$ da substituição (3) for negativo, é preciso ter cuidado, pois ao fazer a substituição (3), estaremos eliminando a possibilidade de $y = 0$. Com isto perdemos uma solução da EDO (1), pois é fácil ver que se $n > 0$, então $y = 0$ é uma solução da EDO (1).

Exemplo 1. Consideremos o crescimento de uma bactéria (que vamos supor esférica, por simplicidade). Para cada instante de tempo t, indiquemos por $V(t)$ o volume da bactéria, $M(t)$ sua massa, $S(t)$ a área da superfície e $r(t)$ o raio. Supondo a densidade da bactéria constante igual a ρ, temos $M = \rho V$. A variação destas grandezas deve-se a dois fatores: a alimentação, que provoca um crescimento, e o metabolismo, que provoca uma diminuição.

A alimentação se dá através da superfície. Portanto, a contribuição positiva da alimentação para a taxa de crescimento $\dfrac{dM}{dt}$ em um dado instante t é diretamente proporcional à área $S(t)$. A contribuição do metabolismo é negativa e, segundo nosso modelo, se dá por toda a célula, sendo diretamente proporcional ao volume $V(t)$, logo, também, diretamente proporcional à massa M. Logo a taxa de crescimento da bactéria satisfaz uma condição do tipo

$$\frac{dM}{dt} = a\,S - b\,M \ , \tag{4}$$

com $a > 0$ e $b > 0$ constantes. Na condição (4), temos duas grandezas, M e S, que dependem de t. Mas podemos eliminar uma delas, por exemplo S. Ora,

$$S = 4\pi r^2 \qquad , \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{e} \qquad M = \rho V \ ,$$

de modo que

$$S = 4\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)V^{\frac{2}{3}} \ .$$

Substituindo em (4), obtemos uma relação da forma

$$\frac{dM}{dt} = \alpha M^{\frac{2}{3}} - \beta M \ , \tag{5}$$

que é uma EDO de Bernoulli, com $n = \dfrac{2}{3}$.

Resolução da EDO (5): Seja $z = M^{1-\frac{2}{3}} = M^{\frac{1}{3}}$. Então

$$M = z^3 \qquad , \qquad M' = 3\,z^2 z' \ .$$

Substituindo em (5), obtemos

$$3\,z^2 z' = \alpha z^2 - \beta z^3 \ ,$$

ou seja,

$$z' + \frac{\beta}{3} z = -\frac{\alpha}{3} \ .$$

Multiplicando pelo fator integrante $\mu = e^{\int \frac{\beta}{3}\,dt} = e^{\frac{\beta\,t}{3}}$, temos

$$e^{\frac{\beta\,t}{3}} z' + \frac{\beta}{3}\,z\,e^{-\frac{\beta\,t}{3}} = \frac{\alpha}{3}\,e^{-\frac{\beta\,t}{3}} \ ,$$

ou seja,

$$\left(e^{\frac{\beta t}{3}} z\right)' = \frac{\alpha}{3}\, e^{\frac{\beta t}{3}} \ .$$

Segue que

$$e^{\frac{\beta t}{3}} z = \frac{\alpha}{\beta}\, e^{\frac{\beta t}{3}} + C \ .$$

Segue que

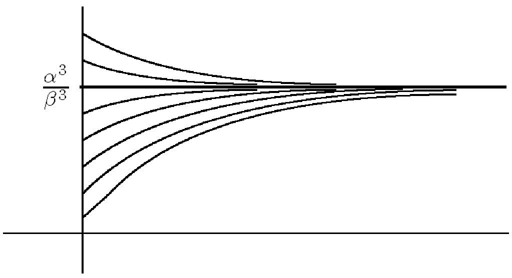
$$z = \frac{\alpha}{\beta} + C\, e^{-\frac{\beta t}{3}}$$

e, finalmente,

$$M(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + C\, e^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3 \ .$$

Observação: A constante C depende da condição inicial. Existe um tamanho limite para a célula, que não depende do tamanho inicial, isto é, qualquer que seja C,

$$\lim_{t\to+\infty} M(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3} = M_{\mathrm{eq}} \ .$$



Condições iniciais $M(0) < M_{\mathrm{eq}}$ é que fazem sentido em nosso problema. Elas corespondem a valores $C < 0$ da constante. Neste caso a solução $M(t)$ é uma função crescente, pois a exponencial é decrescente.
Uma condição inicial $M(0) > M_{\mathrm{eq}}$ é matematicamente possível. Teríamos $C > 0$ e a solução $M(t)$ decrescente.
A função constante $M(t) = M_{\mathrm{eq}}$ é a solução que corresponde a $C = 0$. É a solução de equilíbrio. Trata-se de um ponto de equilíbrio estável: tomando uma condição incial $M(0)$ próxima do valor de equilíbrio M_{eq}, a solução que se obtém tende a voltar ao valor de equilíbrio, embora sem atingi-lo num tempo finito.

Note que se quiséssemos somente encontrar a solução de equilíbrio, poderíamos tê-lo feito sem precisar resolver a equação. De fato, se

$$M(t) = M_{\mathrm{eq}} = \text{const.} \ ,$$

então $M'(t) = 0$ e, portanto,

$$\alpha M_{\mathrm{eq}}^{\frac{2}{3}} - \beta M_{\mathrm{eq}} = 0 \ .$$

Daí se obtém o valor de M_{eq}.

Exemplo 2. Resolver a equação diferencial

$$y' = xy + xy^3 \ . \tag{6}$$

Esta EDO é uma equação de Bernoulli com $n = 3$. Fazemos a mudaça de variável

$$z = y^{1-3} = y^{-2} \ ,$$

isto é,

$$y = z^{-\frac{1}{2}} \ , \qquad y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' \ . \tag{7}$$

Note que com esta mudaça de variável, eliminamos a possibilidade de y se anular. Precisamos então verificar separadamente se $y = 0$ é uma solução da EDO (6). Verifica-se que é.

Substituindo (7) em (6), tem-se

$$-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' = x z^{-\frac{1}{2}} + x z^{-\frac{3}{2}} \ ,$$

isto é,

$$z' + 2xz = -2x \ .$$

Esta é uma EDO linear e um fator integrante para ela é

$$\mu = e^{\int 2x\, dx} = e^{x^2} \ .$$

Multiplicando por este fator integrante, temos

$$e^{x^2} z' + 2xe^{x^2} z = -2xe^{x^2} \ ,$$

ou, equivalentemente,

$$\left(e^{x^2} z\right)' = -2xe^{x^2} \ ,$$

cuja solução é

$$e^{x^2} z = \int -2xe^{x^2}\, dx = -e^{x^2} + C \ .$$

Segue que

$$z = -1 + C\, e^{x^2} \ .$$

Fazendo a substituição inversa, obtemos a solução geral de (6)

$$y = \left(-1 + C\, e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Observe que a solução $y = 0$ de (6) não está incluída na solução geral para nenhum valor de C. Portanto a solução de (6) é

$$y = \left(-1 + C\, e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \ , \qquad y = 0 \ .$$