CAMPO ELÉTRICO GERADO POR DOIS FIOS PARALELOS

Consideremos o problema de determinar as linhas de força e as superfícies equipotenciais do campo elétrico gerado por dois fios paralelos de material condutor, carregados com cargas opostas de mesma densidade. Devido à simetria do problema, só duas dimensões de espaço são relevantes. Tomando um sistema de coordenadas em que o eixo Z seja paralelo aos fios, o campo, o potencial e as forças elétricas vão depender só das coordenadas x e y. Podemos visualizar o problema no plano. Mas na verdade um ponto deste plano vai representar uma reta no espaço tridimensional (a reta passando pelo ponto e paralela ao eixo Z). É como se estivéssemos olhando de cima e víssemos a reta como um ponto, um cilindro como um círculo, e assim por diante. Na Figura 1, os pontos A e B representam fios paralelos de um material condutor. Sejam λ ($\lambda > 0$) a densidade linear de carga (carga por unidade de comprimento) do fio A e $-\lambda$ a densidade de carga do fio B. Estamos interessados no campo elétrico num ponto P. Queremos encontrar a linha de força e a superfície equipotencial passando por P. Vamos primeiro encontrar o potencial gerado por um único fio e depois, somando os resultados, obter o potencial gerado pelos dois fios.

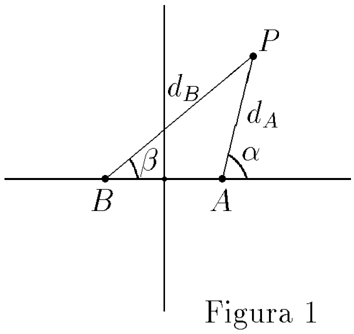


Figura 1

Potencial gerado por um fio. A origem representa agora um fio de material condutor, a densidade de carga vale λ e queremos saber o valor do potencial elétrico no ponto P. Por uma questão de simetria, o campo elétrico $\vec{E}$ vai ser perpendicular ao fio e sua intensidade não vai depender da coordenada Z.

Dado um ponto P no espaço, seja O o ponto do fio mais próximo de P. Coloquemos sobre o fio a coordenada 0 no ponto O. Sejam $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$ os campos elétricos gerados por segmentos de comprimento dz medidos, repectivamente, a partir dos pontos de coordenada z e $-z$. A carga elétrica em cada um destes segmentos vale $\lambda\, dz$. Seja $d\vec{E}$ a resultante de $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$.

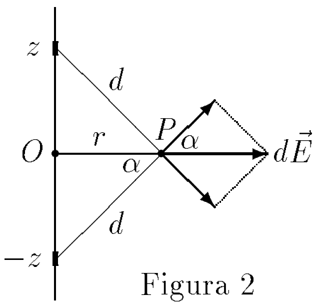


Figura 2

A componente vertical de $\vec{E}$ é nula e a componente horizontal vale

$$dE = |d\vec{E}| = 2\,|d\vec{E}_1| \cdot \cos\alpha = 2\,\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\lambda\,dz}{d^2}\,\frac{r}{d} = \frac{\lambda\,r}{2\,\pi\,\epsilon_0}\frac{dz}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

Logo a intensidade no ponto P do campo gerado pela carga distribuída ao longo de todo o fio vale

$$E = \frac{\lambda\,r}{2\,\pi\,\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{dz}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,r}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\left(\frac{z}{r}\right)$$

e, fazendo uma mudança de variável $w = z/r$,

$$E = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,r}\left(-\left[1+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=\infty} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,r} \tag{1}$$

Para obter o potencial elétrico u, lembremos que

$$\vec{E} = -\nabla u \ .$$

Mas a função u depende apenas da distância r do ponto P ao eixo Z. Isto é, é da forma $u = u(r)$. Portanto

$$\nabla u = -\frac{du}{dr}\,\frac{\vec{r}}{r}\ ,$$

onde $\vec{r} = (x, y, 0)$. Comparando com

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,r}\,\frac{\vec{r}}{r}\ ,$$

que decorre da expressão (1) obtida acima, vemos que deve-se ter

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,r}\ .$$

Portanto u é do tipo

$$u(r) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\,\ln r + C\ ,$$

para alguma constante C. Qual o valor da constante? Lembremos que o importante é não tanto o potencial em cada ponto, mas sim a diferença de potencial entre pares de pontos (por exemplo, o trabalho realizado pela força elétrica sobre uma carga que se desloca entre dois pontos vale o produto da carga pela diferença de potencial entre os dois pontos). Portanto o valor da constante C não é relevante, pois C é cancelada quando se calcula a diferença de potencial. Fazemos então a escolha mais simples possível, $C = 0$. Chegamos assima à expressão

$$u(r) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\,\ln r \tag{2}$$

para o potencial gerado por uma distribuição uniforme de carga elétrica sobre um fio infinitamente longo, sendo λ a densidade linear de carga.

OBS: Decorre da expressão (2) acima que

$$\lim_{r\to 0^+} u(r) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{r\to\infty} u(r) = -\infty\ .$$

Normalmente quando procura-se a expressão do potencial usado o método acima, escolhe-se a constante aditiva de maneira que o potencial tenda a 0 no infinito. No presente caso isto não é possível. Para entender a razão disto, ou melhor dizendo, porque isto não representa uma inconsistência em nosso modelo, notemos que no presente modelo a carga elétrica total sobre o fio é infinita, coisa que na vida real nunca acontece.

Potencial gerado pelos dois fios. Para fixar as idéias, suponhamos que, na Figura 1, os pontos A e B tenham coordenadas $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 0)$. As distâncias $d_A = |AP|$ e $d_B = |BP|$ valem, então,

$$d_A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad d_B = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \ .$$

O potencial u gerado pelos dois fios, sendo a soma dos potenciais gerados por cada um dos fios individualmente, vale

$$u = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\big(\ln d_A - \ln d_B\big) = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\ln\!\left(\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}\right)$$

Logo as superfícies equipotenciais (representadas por curvas no plano XY) são a família das curvas de nível

$$\ln\!\left(\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}\right) = K \ , \qquad (\,-\infty < K < +\infty\,)$$

ou, equivalentemente (escrevendo $K = \ln C$),

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = C \ , \qquad (\,C > 0\,) \ . \tag{3}$$

Reescrevemos (3) como

$$(x+1)^2 + y^2 = C\,\big((x-1)^2 + y^2\big) \ ,$$

isto é,

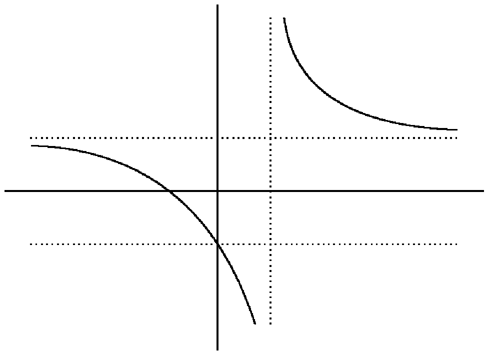
$$\big(C-1\big)\big(x^2 + y^2 + 1\big) = 2\big(C+1\big)x \ . \tag{4}$$

Para $C \neq 1$ (4) representa uma família de círculos. Porém, um membro desta família, para $C = 1$, é o eixo Y, $x = 0$.

Chamando de $D = \dfrac{C+1}{C-1}$, podemos reescrever (4) na forma

$$x^2 + y^2 + 1 = 2\,D\,x \ . \tag{5}$$

A maneira mais simples de descobrir a variação do parâmetro D é olhando para o gráfico da função $D = f(C) = D = \dfrac{C+1}{C-1}$.



Vemos que quando C varia no intervalo $0 < C < \infty$, vamos ter que D varia no conjunto $|D| > 1$, ou seja

$$D \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \ .$$

Completando o quadrado na expressão (5), tem-se

$$x^2 - 2\,D\,x + D^2 + y^2 = D^2 - 1 \ ,$$

isto é,

$$(x - D)^2 + y^2 = D^2 - 1 \ .$$

A conclusão é que as superfícies equipotenciais são os círculos (na realidade, cilindros circulares) centrados em pontos $(D, 0)$ de raio $\sqrt{D^2 - 1}$, para $|D| > 1$.

Linhas de força. Para determinar as linhas de força do campo gerado pelos dois fios, usamos o fato que as linhas de força e as superfícies equipotenciais cortam-se sempre ortogonalmente. Portanto, do ponto de vista matemático, o problema que queremos resolver é o de determinar as trajetórias ortogonais à família de círculos (5).

Solução do problema. Seja $\mathcal{F}_1$ a família de círculos (5) e seja $\mathcal{F}_2$ a família das trajetórias ortogonais à família $\mathcal{F}_1$. O primeiro passo é encontrar uma equação diferencial de primeira ordem, da qual $\mathcal{F}_1$ seja a solução geral. Reescrevendo (5) como

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{x} = 2\,D \ ,$$

pensando em y como função de x e derivando em relação a x, obtém-se

$$\frac{(2\,x + 2\,y\,y')\,x - (x^2 + y^2 + 1)}{x^2} = 0 \ .$$

O numerador desta fração deve se anular. Logo

$$2\,x\,y\,y' + x^2 - y^2 - 1 = 0 \ .$$

Logo os círculos da família $\mathcal{F}_1$ dada satisfazem, todos eles, a equação diferencial em forma normal

$$y' = \frac{y^2 - x^2 + 1}{2\,x\,y} \ .$$

Usando a condição de ortogonalidade, a família ortogonal $\mathcal{F}_2$ deve satisfazer

$$y' = \frac{2\,x\,y}{x^2 - y^2 - 1} \, . \qquad (6)$$

Para resolver (6), reescrevemos esta equação como

$$2\,x\,y\,dx + (y^2 - x^2 + 1)\,dy = 0 \ . \qquad (7)$$

Vamos procurar um fator integrante para (7). Investigando a existência de um fator integrante $\mu(y)$ dependendo só de y, multiplicamos (7) por $\mu(y)$, obtendo

$$2\,x\,y\,\mu(y)\,dx + (y^2 - x^2 + 1)\,\mu(y)\,dy = 0 \ .$$

A condição para que esta última seja uma equação exata é que

$$\Big(2\,x\,y\,\mu(y)\Big)_y = \Big(y^2 - x^2 + 1)\,\mu(y)\Big)_x \ ,$$

isto é,

$$2\,x\big(\mu(y) + y\,\mu'(y)\big) = -2\,x\,\mu(y)$$

ou ainda,

$$\mu(y) + y\,\mu'(y) = -\mu(y)\ . \tag{8}$$

Como x foi eliminado, a condição (8) é uma equação diferencial ordinária, que pode ser facilmente resolvida separando as variáveis,

$$y\,\frac{d\mu}{dy} = -2\,\mu \quad , \quad \int \frac{d\mu}{\mu} = \int -2\,\frac{dy}{y}\ .$$

Não estamos interessados na solução geral desta última equação diferencial. Basta-nos ter <u>um</u> fator integrante. Escolhendo, então, a constante de integração como 0, obtemos

$$\ln \mu = -2\,\ln y\ .$$

Encontramos assim o fator integrante $\mu = y^{-2}$ para (7). Multiplicando (7) por $\mu = y^{-2}$, obtém-se a equação exata

$$2\,x\,y^{-1}\,dx + (1 - x^2 y^{-2} + y^{-2})\,dy = 0\ .$$

Para resolvê-la, procuramos uma função de duas variáveis $F(x, y)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\,x\,y^{-1} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 - x^2 y^{-2} + y^{-2} \end{cases} \tag{9}$$

Da primeira condição acima segue que

$$F(x, y) = x^2\,y^{-1} + \varphi(y)\,, \tag{10}$$

com $\varphi(y)$ dependendo só de y. Derivando (10) em relação a y,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 y^{-2} + \varphi'(y)$$

e comparando esta última com a segunda condição em (9), segue que

$$\varphi'(y) = 1 + y^{-2}\ .$$

Integrando esta última e tomando a constante de integração como sendo 0, segue

$$\varphi(y) = y - y^{-1}\ .$$

Portanto uma função que satisfaz (9) é

$$F(x, y) = x^2\,y^{-1} + y - y^{-1}\ .$$

Logo a solução geral de (7) é

$$x^2\,y^{-1} + y - y^{-1} = C \ ,$$

que pode ser reescrita de maneira mais simples como

$$x^2 + y^2 - C\,y - 1 = 0\,. \tag{11}$$

Logo a família $\mathcal{F}_2$ das linhas de força também é uma família de círculos. É imediato verificar que $x = \pm 1\,,\ y = 0$ são soluções de (11). Logo a família $\mathcal{F}_2$ das linhas de força é a família dos círculos que passam pelos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$. A figura ao lado re-presenta as duas famílias de círculos. Os círculos traçados com linhas mais grossas representam a família $\mathcal{F}_1$ das linhas equipotenciais e os círculos desenhados com linhas mais finas representam a família $\mathcal{F}_2$ das linhas de força.