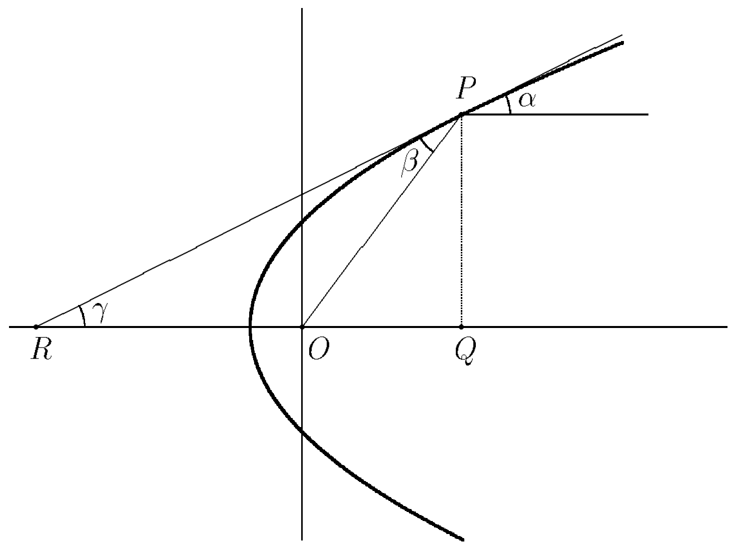
Espelho Parabólico

Consideremos o problema de determinar qual a forma que deve ter um espelho para que tenha a propriedade que, quando um feixe de raios paralelos incidir sobre o espelho, os raios refletidos se concentrem em um único ponto O, o foco do espelho. Este é o tipo de espelho que deve ser usado em um telescópio, a fim de produzir uma imagem perfeita. Outra situação em que este espelho é usado é em uma antena parabólica (veremos que esta deve ser a forma do espelho). Invertendo o sentido de percurso dos raios, o mesmo tipo de situação se apresenta quando emitimos um sinal, a partir de ponto O, e desejamos que este sinal seja captado em um outro ponto, a grande distância. Fazemos com que ele seja refletido por um anteparo. A fim de que o sinal possa ser captado facilmente, não queremos que ele perca muito em intensidade. Por isto vamos querer que os raios refletidos saiam paralelos. Assim evitamos a dispersão. O sinal transmitido vai perder muito pouco em intensidade e só vai poder ser captado em pontos que estiverem sobre a semi-reta partido da fonte, com a direção escolhida. A questão a ser considerada agora é a determinar a forma que deve ter um espelho para que os raios emitidos por uma fonte localizada um ponto O sejam todos eles refletidos paralelamente.

O espelho é uma superfície $\mathcal{S}$, mas cortando a superfície $\mathcal{S}$ por um plano que passa pelo ponto O, obtemos uma curva $\mathcal{C}$. Vamos considerar, então, o problema de determinar a forma da curva $\mathcal{C}$. Temos agora um problema em um plano. Colocando neste plano um sistema de coordenadas de modo que a origem fique sobre a fonte luminosa O e o eixo dos X seja paralelo aos raios refletidos. Temos que resolver um problema puramente geométrico, representado na figura abaixo.



O problema que queremos resolver é o de determinar as curvas $\mathcal{C}$ com a propriedade descrita a seguir. Dado um ponto P qualquer sobre $\mathcal{C}$, seja t a reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto P. Seja α o ângulo entre a tangente t e o eixo X (ou se, preferir, o raio refletido no ponto P) e seja β o ângulo entre a reta t e o raio $\overline{OP}$. Pela lei da reflexão, queremos determinar as curvas $\mathcal{C}$ que tenham a propriedade que $\alpha = \beta$.

Vamos procurar a função $y = y(x)$, cujo gráfico é a curva $\mathcal{C}$. Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico de $\mathcal{C}$. Temos $\alpha = \gamma$, pois são ângulos com lados paralelos (um deles é até comum). Logo $\beta = \gamma$ e o triângulo OPR é isósceles. Logo $\overline{OP} = \overline{OR}$. Mas $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pela interpretação geométrica da derivada,

$$\frac{dy}{dx} = \tan\gamma = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ} + \overline{OR}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ} + \overline{OP}} .$$

Logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} , \tag{1}$$

que é uma equação diferencial satisfeita pela curva $\mathcal{C}$.

Resolução da equação diferencial (1). Trata-se de uma equação diferencial homogênea. É perfeitamente possível resolvê-la empregando os métodos vistos em aula (faça como exercício). No entanto, resulta um pouco mais simples transformá-a na equação

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} , \tag{2}$$

que também é homogênea, pois pode ser reescrita como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} ,$$

com o lado direito dependendo somente da razão x/y. Introduzindo a nova variável independente

$$u = \frac{x}{y} \quad , \qquad x = y\,u \quad , \qquad \frac{dx}{dy} = u + y\,\frac{du}{dy} \quad ,$$

obtemos a equação

$$u + y\,\frac{du}{dy} = u + \sqrt{1 + u^2} ,$$

isto é,

$$y\,\frac{du}{dy} = \sqrt{1 + u^2} .$$

Separando as variáveis,

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} .$$

A segunda integral é calculada por uma substituição trigonométrica $u = \tan s$, $du = \sec^2 s\, ds$,

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\sec^2 s\, ds}{\sqrt{1+\tan^2 s}} = \int \sec s\, ds = \ln|\tan s + \sec s| = \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| \ .$$

Logo

$$\ln|y| + \ln C = \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| \ , \qquad (\, C > 0\,).$$

Logo

$$C\, y = u + \sqrt{1+u^2} = \frac{x}{y} + \sqrt{1+(x/y)^2} \ .$$

Multiplicando por y,

$$C\, y^2 - x = \sqrt{x^2+y^2} \ .$$

Elevando ao quadrado,

$$C^2\, y^4 - 2\, C\, x\, y^2 + x^2 = x^2 + y^2 \ ,$$

ou seja,

$$C^2\, y^4 - 2\, C\, x\, y^2 = y^2 \ .$$

Dividindo por y^2,

$$C^2\, y^2 - 2\, C\, x = 1 \ . \tag{3}$$

Esta equação representa uma família de parábolas (deitadas).

Interpretação da solução: Uma maneira simples de localizar no plano a família de parábolas dada pela equação (3) é completar o quadrado, reescrevendo como,

$$C^2\, y^2 + C^2\, x^2 = 1 + 2\, C\, x + C^2\, x^2 \ ,$$

isto é,

$$C^2 \left(x^2 + y^2\right) = \left(1 + C\, x\right)^2 \ .$$

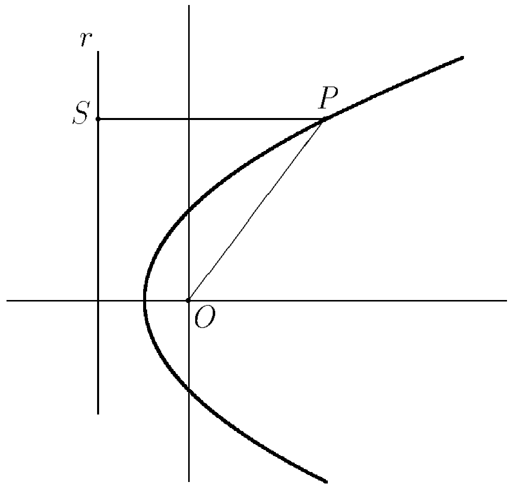
Dividindo por C^2, obtém-se

$$x^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{C}\right)^2 \ ,$$

ou, extraindo a raiz quadrada,

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + \frac{1}{C} \ . \tag{4}$$

O lado esquerdo da igualdade (4) representa a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem, enquanto que o lado direito representa a distância do ponto P à reta vertical $x = -\dfrac{1}{C}$. A igualdade (4) nos diz que cada curva da família $\mathcal{C}$ é caracterizada a partir de uma reta diretriz r, de equação $x = -1/C$. Vale então a propriedade que, para um ponto P qualquer sobre a curva $\mathcal{C}$, a distância $\overline{OP}$ de P ao foco O é igual à distância $\overline{OS}$ de P à reta diretriz r. A cada valor escolhido para a constante C obtém-se uma parábola $\mathcal{C}$. Fazendo variar C, o foco continua na origem e a reta diretriz se desloca. Fazendo $C > 0$ variar, o plano menos o semi-eixo positivo dos X se decompõe numa família de parábolas.



Se cortarmos a superfície $\mathcal{S}$ por um outro plano passando pelo foco O, a seção resultante seria também uma parábola membro da mesma família, em princípio não necessariamente a mesma parábola. Mas na verdade deve dar a mesma parábola, pois caso contrário teríamos uma descontinuidade na superfície $\mathcal{S}$, já que diferentes parábolas da família $\mathcal{C}$ têm vértices distintos.

Conclusão: Os únicos espelhos com a propriedade que, quando sobre eles incide um feixe de raios paralelos, os raios refletidos concentram-se em um único ponto O, são aqueles que têm a forma de um parabolóide de revolução. Além disto, é preciso que os raios incidentes sejam paralelos ao eixo do parabolóide. O ponto O vai se situar no foco do parabolóide. Em particular, epelhos esféricos têm sempre uma aberração, os raios refletidos não se concentram exatemente em um único ponto.