EXEMPLO – Equação de Euler com raízes complexas e apliacação a um problema de Dirichlet

Sabemos que, para resolver a Equação de Cauchy–Euler

$$a\,x^2\,y'' + b\,x\,y' + c\,y = 0\ , \tag{1}$$

devemos começar procurando uma solução da forma $y = x^m$. Substituindo em (1) vemos que m deve ser raiz da equação algébrica

$$a\,m\,(m-1) + b\,m + c = 0\ . \tag{2}$$

Suponhamos que (2) tenha raízes complexas $m = \alpha \pm i\,\beta$. Com elas construímos duas soluções linearmente independentes de (1),

$$z_1 = x^{\alpha + i\,\beta} \qquad \text{e} \qquad z_2 = x^{\alpha - i\,\beta}\ .$$

Já tínhamos trabalhado com exponenciais com expoente complexo, mas de base e . É fácil dar um sentido às exponenciais acima, cuja base não é e :

$$z_1 = x^{\alpha+i\,\beta} = x^\alpha \cdot x^{i\,\beta} = x^\alpha \cdot \left(e^{\ln x}\right)^{i\,\beta} = x^\alpha \cdot e^{i\,\beta\,\ln x} = x^\alpha \cdot \Big(\cos\left(\beta\,\ln x\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\beta\,\ln x\right)\Big)\ .$$

Analogamente obtemos

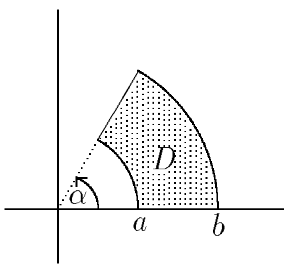
$$z_2 = x^{\alpha-i\,\beta} = x^\alpha \cdot \Big(\cos\left(\beta\,\ln x\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\beta\,\ln x\right)\Big)\ .$$

As duas soluções z_1 e z_2 de (1) encontradas acima são linearmente independentes mas assumem valores complexos, o que pode ser um inconveniente para algumas aplicações. Por esta razão, vamos preferir as combinações lineares delas

$$y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = x^\alpha \cos\left(\beta\,\ln x\right) \qquad , \qquad y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2\,i} = x^\alpha\,\mathrm{sen}\left(\beta\,\ln x\right)\ ,$$

que são linearmente independentes e reais.

Aplicação (exercício 9 da lista 11). Determine a temperatura estacionária em uma barra, cuja seção é um "retângulo curvilíneo", com duas faces consistindo de arcos de círculo subintendendo um ângulo α e centrados na origem, enquanto que as outras duas faces consistem de segmentos de raios do círculo maior. A face retilínea $\theta = \alpha$ é mantida à temperatura constante U_0, enquanto que as demais faces são mantidas à temperatura 0 .



Precisamenete, temos o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0 \quad , \quad (a < r < b\ ,\ 0 < \theta < \alpha) \\ u(r,0) = u(a,\theta) = u(b,\theta) = 0 \\ u(r,\alpha) = U_0 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método de separação de variáveis, começamos procurando u da forma $u(r,\theta) = \varphi(r)\,\psi(\theta)$. Substituindo na equação diferencial, temos

$$\varphi''(r)\,\psi(\theta) + \frac{1}{r}\,\varphi'(r)\,\psi(\theta) = -\frac{1}{r^2}\,\varphi(r)\,\psi''(\theta)\ .$$

Multiplicando por r^2 e dividindo por $\varphi(r)\,\psi(\theta)$, obtém-se

$$\frac{r^2\,\varphi''(r) + r\,\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda\ .$$

Ficamos, então, com duas equações diferenciais independentes:

$$r^2\,\varphi''(r) + r\,\varphi'(r) - \lambda\,\varphi(r) = 0 \qquad \text{e} \qquad \psi''(\theta) + \lambda\,\psi(\theta) = 0\ .$$

A primeira é uma equação de Cauchy–Euler e a segunda é uma equação linear de coeficientes constantes. A condição de fronteira $0 = u(a,\theta) = \varphi(a)\,\psi(\theta)$ nos dá $\varphi(a) = 0$, pois caso contrário, teríamos $\psi(\theta) = 0$, para todo θ, que corresponde à solução trivial $u = 0$. Analogamente as condições de fronteira $u(b,\theta) = 0$ e $u(r,0) = 0$ nos dão $\varphi(b) = 0$ e $\psi(0) = 0$. Passemos ao estudo do problema

$$\begin{cases} r^2\,\varphi''(r) + r\,\varphi'(r) - \lambda\,\varphi(r) = 0 \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$$

1º Caso: $\lambda > 0$

Neste caso, $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$. A equação algébrica $m(m-1) + m - \mu^2 = 0$ tem duas raízes reais diferentes $m_1 = \mu$ e $m_2 = -\mu$. Logo a equação de Cauchy–Euler

$$r^2\,\varphi''(r) + r\,\varphi'(r) - \mu^2\,\varphi(r) = 0$$

tem solução

$$\varphi(r) = A\,r^{\mu} + B\,r^{-\mu}\ .$$

Aplicando as condições de fronteira, temos

$$\begin{cases} A\,a^{\mu} + B\,a^{-\mu} = 0 \\ A\,b^{\mu} + B\,b^{-\mu} = 0 \end{cases}$$

Segue daí que $A = B = 0$, pois

$$\det\begin{pmatrix} a^{\mu} & a^{-\mu} \\ b^{\mu} & b^{-\mu} \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\mu} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\mu} \neq 0\ ,$$

pois $a < b$. Logo $\varphi(r) = 0$ e a solução é trivial.

2º Caso: $\lambda = 0$

Neste caso, a solução da equação de Euler $r^2\,\varphi''(r) + r\,\varphi'(r) = 0$ é $\varphi(r) = A + B\,\ln r$, pois a equação algébrica $m(m-1)+m = 0$ tem raiz dupla $m_1 = m_2 = 0$. As condições de fronteira $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ nos dão $A = B = 0$. Este caso, portanto, também é trivial.

3º Caso: $\lambda < 0$

Neste caso, $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$. A equação algébrica $m(m-1) + m + \mu^2 = 0$ tem duas raízes imaginárias $m_1 = i\,\mu$ e $m_2 = -i\,\mu$. Logo a equação de Cauchy–Euler

$$r^2\,\varphi''(r) + r\,\varphi'(r) + \mu^2\,\varphi(r) = 0$$

tem solução

$$\varphi(r) = A\,\cos(\mu\,\ln r) + B\,\mathrm{sen}\,(\mu\,\ln r)\ .$$

As condições de fronteira $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ nos dão

$$\begin{cases} A\,\cos(\mu\,\ln a) + B\,\mathrm{sen}\,(\mu\,\ln a) = 0 \\ A\,\cos(\mu\,\ln b) + B\,\mathrm{sen}\,(\mu\,\ln b) = 0 \end{cases}$$

Só teremos solução não trivial para nosso problema, se o sistema acima possuir solução não trivial para A e B, mas isto só acontece se seu determinante for nulo, isto é,

$$\det\begin{pmatrix} \cos(\mu\,\ln a) & \mathrm{sen}\,(\mu\,\ln a) \\ \cos(\mu\,\ln b) & \mathrm{sen}\,(\mu\,\ln b) \end{pmatrix} = 0\ .$$

ou seja,

$$0 = \mathrm{sen}\,(\mu\,\ln b)\ \cos(\mu\,\ln a) - \mathrm{sen}\,(\mu\,\ln a)\ \cos(\mu\,\ln b) = \mathrm{sen}\Big(\mu\,(\ln b - \ln a)\Big)\ .$$

Segue que devemos ter

$$\mu\,(\ln b - \ln a) = n\,\pi\ ,$$

ou seja,

$$\mu = \frac{n\,\pi}{\ln b - \ln a}\quad ,\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Encontramos assim as funções

$$\varphi_n(r) = A_n\cos\left(\frac{n\,\pi\,\ln r}{\ln b - \ln a}\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln r}{\ln b - \ln a}\right)\ . \tag{3}$$

Mas temos a condição $\varphi(a) = 0$, dizendo que

$$A_n\cos\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b - \ln a}\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b - \ln a}\right) = 0\ . \tag{4}$$

Em (3) acima, $\varphi_n(r)$ está expressa em termos de duas constantes A_n e B_n, mas, usando (4), podemos eliminar uma constante.
Multiplicando (3) por $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)$, obtemos

$$\varphi_n(r)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)=A_n\cos\left(\frac{n\,\pi\,\ln r}{\ln b-\ln a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)+$$

$$+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln r}{\ln b-\ln a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)\ .$$

Usando (4), segue que

$$\varphi_n(r)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)=A_n\cos\left(\frac{n\,\pi\,\ln r}{\ln b-\ln a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)-$$

$$-A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln r}{\ln b-\ln a}\right)\cos\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)\ ,$$

e, finalmente,

$$\varphi_n(r)\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)=-A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,(\ln r-\ln a)}{\ln b-\ln a}\right) \tag{5}$$

Analogamente, multiplicando (3) por $\cos\left(\dfrac{n\,\pi\,\ln r}{\ln b-\ln a}\right)$, obtém-se

$$\varphi_n(r)\ \cos\left(\frac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)=B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,(\ln r-\ln a)}{\ln b-\ln a}\right)\ . \tag{6}$$

Como $\cos\left(\dfrac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\,\pi\,\ln a}{\ln b-\ln a}\right)$ não podem ser ambos nulos, segue de (5) e (6) que existe uma constante E_n (igual a $-A_n\operatorname{sen}^{-1}\Big(n\,\pi\,\ln a/(\ln b-\ln a)\Big)$ ou a $B_n\ \cos^{-1}\Big(n\,\pi\,\ln a/(\ln b-\ln a)\Big)$) tal que

$$\varphi_n(r)=E_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,(\ln r-\ln a)}{\ln b-\ln a}\right)\ .$$

O valor de λ que corresponde a $\varphi_n(r)$ é

$$\lambda_n=-\mu^2=-\left(\frac{n\,\pi}{\ln b-\ln a}\right)^2\ .$$

Pondo este valor de λ na outra equação, obtemos

$$\psi''(\theta)-\left(\frac{n\,\pi}{\ln b-\ln a}\right)^2\psi(\theta)=0\ ,$$

cuja solução é

$$\psi(\theta) = C \exp\left(\frac{n\,\pi\,\theta}{\ln b - \ln a}\right) + D \exp\left(-\frac{n\,\pi\,\theta}{\ln b - \ln a}\right) \ .$$

Usando a condição de fronteira $\psi(0) = 0$, obtemos $C + D = 0$ e, daí,

$$\psi_n(\theta) = E_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,\theta}{\ln b - \ln a}\right) \ .$$

O terceiro caso nos dá, portanto,

$$u_n(r,\theta) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,(\ln r - \ln a)}{\ln b - \ln a}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,\theta}{\ln b - \ln a}\right) \ .$$

Fazendo a superposiição dos termos encontrados, obtemos

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,(\ln r - \ln a)}{\ln b - \ln a}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,\theta}{\ln b - \ln a}\right) \ .$$

Finalmente, usando a condição $u(r,\alpha) = U_0$, temos

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi\,(\ln r - \ln a)}{\ln b - \ln a}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{\ln b - \ln a}\right) \quad , \qquad \text{para todo} \quad r \in (a,b) \ .$$

Observemos que a expansão acima não é uma série de Fourier (na variável r), mas se converte em uma série de Fourier pela mudança de variável

$$t = \frac{\pi\,(\ln r - \ln a)}{\ln b - \ln a} \ .$$

De fato, quando r varia no intervalo $a < r < b$, vamos ter $0 < t < \pi$ e

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{\ln b - \ln a}\right) \cdot \operatorname{sen} n\,t \quad , \qquad \forall t \in (0,\pi) \ ,$$

que é uma expansão em série de senos no intervalo $(0,\pi)$, para a função constante. Segue que

$$A_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{\ln b - \ln a}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} U_0 \operatorname{sen} n\,t\; dt =$$

$$= \frac{2\,U_0}{\pi}\left[-\frac{\cos\,n\,t}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0\ , & \text{se } n \text{ é par;} \\ \dfrac{4\,U_0}{n\,\pi}\ , & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Finalmente, obtemos a resposta

$$u(r,\theta) = \frac{4\,U_0}{n\,\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2\,m+1)\,\pi\,(\ln r - \ln a)}{\ln b - \ln a}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\dfrac{(2\,m+1)\,\pi\,\alpha}{\ln b - \ln a}\right)}{(2\,m+1)\operatorname{senh}\left(\dfrac{(2\,m+1)\,\pi\,\alpha}{\ln b - \ln a}\right)} \ .$$