Seção 13: Método da Variação dos Parâmetros

Nas seções enteriores, vimos que a tarefa de resolver uma EDO linear de 2ª ordem pode ser desdobrado em duas etapas:

Etapa 1: Resolver a EDO linear homogênea associada.

Etapa 2: Encontrar uma solução particular para a equação não homogênea.

Já sabemos resolver a 1ª etapa para o caso das equações lineares de coeficientes constantes e também para as equações de coeficientes variáveis quando já conhecemos uma solução não trivial da equação não homogênea associada (Método de D'Alembert).

Para a 2ª etapa, até agora temos só o Método dos Coeficientes a Determinar. Este é um método de fácil aplicação, pois é um método puramente algébrico, que não envolve integração, mas tem o incoveniente de se aplicar somente a equações de coeficientes constantes em que o lado direito da equação é uma função envolvendo apenas produtos polinômios, exponenciais, cossenos e senos.

O Método da Variação dos Parâmetros é um método para realizar esta 2ª etapa de encontrar uma solução particular para a equação não homogênea. Fazendo a suposição de que a 1ª etapa já foi feita, o ponto de partida é a hipótese de que conhecemos duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada. O método se aplica a qualquer equação linear, mas envolve integração. Vamos explicar a idéia básica do método e em seguida ver exemplos.

Suponhamos que queremos encontrar uma solução particular y_p para uma EDO linear não homogênea de 2ª ordem

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)\,. \tag{1}$$

Suponhamos conhecidas duas soluções L.I. $y_1(x)$ e $y_2(x)$ para a equação homogênea associada

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0\,. \tag{2}$$

Qualquer função da forma $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ é solução da equação homogênea e não pode, portanto, ser solução da equação não homogênea. Então, o Método da Variação dos Parâmetros consiste em procurar uma solução particular da equação não homogênea da forma

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x), \tag{3}$$

com $v_1(x)$ e $v_2(x)$ funções não constantes. Vamos calcular as derivadas de 1ª e 2ª ordem e substituir na EDO.

$$y_p' = \big(v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x)\big) + \big(v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)\big)\,. \tag{4}$$

Note que precisamos determinar dois objetos, $v_1(x)$ e $v_2(x)$. Mas a substituição na EDO vai nos dar uma só condição. Precisamos de mais uma condição. Vamos obter essa condição adicional de uma maneira que vai facilitar nossa tarefa. Vamos impor a condição de que o 1º parênteses na expressão (4) seja nulo, isto é

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0\,. \tag{5}$$

Isto vai facilitar porque a expressão de y_p' fica sendo

$$y_p' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x). \tag{6}$$

Então, a expressão de y_p'' vai envolver apenas a 1ª derivada de $v_1(x)$ e $v_2(x)$. Temos

$$y_p'' = \big(v_1'(x)y_1'(x) + v_2(x)'y_2'(x)\big) + \big(v_1(x)y_1''(x) + v_2(x)y_2''(x)\big)\,. \tag{7}$$

Substituindo (3), (6) e (7) na EDO, obtemos

$$\Big(\big(v_1'(x)y_1'(x)+v_2'(x)y_2'(x)\big)+\big(v_1(x)y_1''(x)+v_2(x)y_2''(x)\big)\Big)+f(x)\Big(v_1(x)y_1'(x)+v_2(x)y_2'(x)\Big)$$
$$+\,g(x)\Big(v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)\Big)=r(x)\,.$$

Agrupando os termos, temos

$$\underbrace{\big(y_1''+f(x)y_1'+g(x)y_1\big)}_{=0}v_1(x)+\underbrace{\big(y_2''+f(x)y_2'+g(x)y_2\big)}_{=0}v_2(x)+\big(y_1'(x)v_1'(x)+y_2'(x)v_2'(x)\big)=r(x).$$

Os dois primeiros parênteses acima são nulos porque y_1 e y_2 são soluções para a equação homogênea. Simplificando, segue que

$$y_1'(x)v_1'(x)+y_2'(x)v_2'(x)=r(x). \tag{8}$$

As duas condições (5) e (8) formam o sistema

$$\begin{cases} y_1(x)v_1'(x)+y_2(x)v_2'(x)=0 \\ y_1'(x)v_1'(x)+y_2'(x)v_2'(x)=r(x) \end{cases} \tag{9}$$

que permite obter as derivadas $v_1'(x)$ e $v_2'(x)$. Depois disto, é necessário integrar para encontrar as funções $v_1(x)$ e $v_2(x)$.

Exemplo 1. Resolver a equação diferencial

$$y''-2y'+y=e^x\ln x\,. \tag{10}$$

Solução: Apesar de (10) ser uma EDO linear de coeficientes constantes, não pode ser resolvida pelo método dos coeficientes a determinar por causa da presença do logaritmo do lado direito da igualdade. A equação homogênea associada é de coeficientes constantes. A equação característica

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

tem raiz dupla $\lambda_1=\lambda_2=1$. Portanto duas soluções L.I. para a equação homogênea são

$$y_1=e^x \qquad \text{e} \qquad y_2=xe^x\,.$$

Neste exemplo o sistema (9) fica

$$\begin{cases} e^xv_1'(x)+xe^xv_2'(x)=0 \\ e^xv_1'(x)+(1+x)e^x(x)v_2'(x)=e^x\ln x \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} v_1'(x)+\quad xv_2'(x)\quad=0 \\ v_1'(x)+(1+x)v_2'(x)=\ln x \end{cases} \tag{11}$$

Subtraindo a 1ª equação de (11) da 2ª, obtemos

$$v_2'(x)=\ln x\,.$$

Integrando e escolhendo a constante de integração como 0, obtemos

$$v_2(x)=\int \ln x\,dx=x\ln x-x\,. \tag{12}$$

Então, da 1ª equação do sistema (11) segue que

$$v_1'(x) = -x \ln x\,.$$

Integrando e escolhendo a constante de integração como 0, obtemos

$$v_1(x) = \int -x \ln x \, dx = -\frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4}\,. \tag{13}$$

Substituindo (13) e (12) em (3), encontramos a solução particular

$$y_p = x^2 e^x \left(-\frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4} \right) - x^2 e^x \ln x = x^2 e^x \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4} \right).$$

A solução geral da equação (10) é

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4} \right).$$

Exemplo 2. Resolver o PVI

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = f(x) \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

onde $f(x)$ é uma função genérica.

A equação característica $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ tem raízes $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Duas soluções L.I. da equação homogênea associada são $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = e^{-2x}$. Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea da forma

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2.$$

O sistema (9) fica

$$\begin{cases} e^{3x} v_1'(x) \ + \ e^{-2x} v_2'(x) = 0 \\ 3e^{3x} v_1'(x) - 2e^{-2x} v_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{15}$$

Multiplicando a 1ª equação de (15) por 2 e somando na 2ª, obtemos

$$5e^{3x} v_1'(x) = f(x)$$

de onde segue que

$$v_1'(x) = \frac{e^{-3x} f(x)}{5}.$$

Para obter v_1 vamos integrar. A fim de ter $v_1(1) = 0$, fazemos uma integral definida

$$v_1(x) = \frac{1}{5} \int_1^x e^{-3t} f(t)\, dt.$$

Isto equivale fazer uma escolha conveniente da constante de integração, a fim de ter $v_1(1) = 0$.

Da mesma forma, multiplicando a 1ª equação de (15) por 3 e subtraindo da 2ª, obtemos

$$-5e^{-2x} v_2'(x) = f(x)$$

e

$$v_2'(x) = -\frac{1}{5}\, e^{2x} f(x).$$

Integrando entre 1 e x, temos

$$v_2(x) = -\frac{1}{5}\int_1^x e^{2t} f(t)\,dt\,,$$

que satisfaz $v_2(1) = 0$. Obtemos

$$y_p(x) = \frac{e^{3x}}{5}\int_1^x e^{-3t} f(t)\,dt - \frac{e^{-2x}}{5}\int_1^x e^{2t} f(t)\,dt$$

ou seja,

$$y_p(x) = \int_1^x \frac{e^{3(x-s)} - e^{-2(x-s)}}{5}\, f(t)\,dt$$

Notemos que

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x).$$

Logo,

$$y_p'(x) = v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x).$$

Levando em conta que $v_1(1) = v_2(1) = 0$ é imediato que $y_p(1) = 0$ e que

$$y_p'(1) = v_1'(1)y_1(1) + v_2'(1)y_2(1).$$

Mas

$$v_1'(1) = \frac{e^{-3}f(1)}{5} \qquad \text{e} \qquad v_2'(1) = -\frac{1}{5}\,e^2 f(1).$$

Logo,

$$y_p'(1) = \frac{f(1)}{5} - \frac{f(1)}{5} = 0.$$

Conclusão: A solução do PVI (14) é

$$y(x) = \int_1^x \frac{e^{3(x-s)} - e^{-2(x-s)}}{5}\, f(t)\,dt\,.$$

Observação. Indiquemos por $C^{(0)}$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e por $C^{(2)}$ o conjunto de todas as funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tenham derivadas de primeira e segunda ordem contínuas. O operador diferencial $L = D^2 - Dy - 6y$, $L : C^{(2)} \longrightarrow C^{(0)}$, que associa a cada $y \in C^{(2)}$ a função $f = L(y) = y'' - y' - 6y$, não tem uma inversa. Por exemplo, não existe só uma $y \in C^{(2)}$ tal que $L(y) = 0$, na verdade $L(C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}) = 0$, para quaisquer C_1, C_2.

No entanto, o que a conclusão acima está dizendo é que, se diminuirmos o domínio do operador,

$$\begin{aligned} L : \{y \in C^{(2)} \mid y(1) = y'(1) = 0\} &\longrightarrow C^{(0)} \\ y &\longmapsto f = L(y) = y'' - y' - 6y \end{aligned}$$

é invertível e sua inversa é o operador integral

$$\begin{aligned} I : C^{(0)} &\longrightarrow \{y \in C^{(2)} \mid y(1) = y'(1) = 0\} \\ f &\longmapsto y(x) = \int_1^x \frac{e^{3(x-s)} - e^{-2(x-s)}}{5}\, f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Esta observação é válida para um operador diferencial de segunda ordem genérico. Foi feita para um exemplo particular para ficar mais simples.