Seção 15: Sistema de Equações Diferenciais Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Muitos problemas de física envolvem diversas equações diferenciais. Na seção 14, por exemplo, vimos que o sistema massa-mola do exemplo 2 tem o seu movimento descrito pelas equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1'' = -3x_1 + 2x_2 \\ x_2'' = 2x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Este problema é um exemplo de *Sistema de equações diferenciais.* Observe que cada equação é linear em relação as suas incógnitas x_1 e x_2, sendo assim um sistema de equações lineares. Além disso, as duas equações são homogêneas, pois cada parcela envolve alguma incógnita, e os coeficientes são constantes. Trata-se, portanto, de um *sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas com coeficientes constantes.* O objetivo desta seção é introduzir uma técnica para resolver este tipo de sistema.

Inicialmente observamos que o sistema dado em (1) pode ser facilmente resolvido isolando x_2 na primeira EDO e subsituindo-o na segunda equação. Infelizmente, este processo não é tão simples em certos problemas.

Por exemplo, podemos sentir dificuldade em resolver o sistema

$$\begin{cases} x' &= y' - x + y \\ y' &= -x' + 3x + y \end{cases}$$

visto que não podemos isolar x ou y em qualquer uma das duas equações de forma tão simples. Antes de resolve-lo, vejamos alguns conceitos.

Polinômio de Operadores

Definição: Vamos denotar por D o operador diferencial que associa a cada função a sua derivada, isto é,

$$Dz = z'.$$

Como consequência imediata,

$$DDz = Dz' = z''.$$

Isto sugere definir D^2 por

$$D^2z = DDz = z''.$$

Podemos generalizar, defindo D^n para qualquer inteiro não negativo por

$$D^nz = z^{(n)} \quad \text{derivada de } z \text{ de ordem } n.$$

Assim como definimos "potências" de D, podemos também definir polinômios de D. Mais precisamente, definimos o polinômio $P(D) = a_nD^n + \cdots + a_1D + a_0$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais, por

$$(a_nD^n + \cdots + a_1D + a_0)z = a_nz^{(n)} + \cdots + a_1z^{(1)} + a_0z.$$

Exemplos:

1) $(D-1)z = z' - z$

2) $(D^2 + 2D + 3)z = z'' + 2z' + 3$

3) $(4D^3 - 2D)z = 4z''' - 2z'$.

Observação: Em certo sentido, podemos trabalhar com polinômios em D como se fossem polinômios convencionais. Por exemplo, se $P(D)$ e $Q(D)$ são polinômios em D, então podemos definir $P(D)+Q(D)$, $P(D)-Q(D)$ e $\alpha P(D)$ da mesma forma que definimos a soma, diferença e o produto por um escalar para polinômios em x.

Exemplo: Sejam $P(D) = D^2 - 3D + 4$, $Q(D) = 2D - 3$ e $\alpha = -2$.
Então

$$\begin{aligned} P(D)+Q(D) &= (D^2 - 3D + 4) + (2D - 3) = D^2 - D + 1, \\ P(D)-Q(D) &= (D^2 - 3D + 4) - (2D - 3) = D^2 - 5D + 7, \\ \alpha P(D) &= -2(D^2 - 3D + 4) = -2D^2 + 6D - 8. \end{aligned}$$

Observação 2: Se $P(D)$ e $Q(D)$ são polinômios em D, então a composta $P(D)(Q(D))$ é um polinômio que pode ser calculado fazendo-se o produto entre $P(D)$ e $Q(D)$ como se fossem polinômios comuns.

Exemplos:

1) $P_1(D) = D + 2$ e $P_2(D) = -D + 4 \Rightarrow P_1(D)(P_2(D)) = (D+2)(-D+4) = -D^2 + 2D + 8$.

2) $P_1(D) = D$ e $P_2(D) = 2D - 4 \Rightarrow P_1(D)(P_2(D)) = (D)(2D-4) = 2D^2 - 4D$.

1) $P_1(D) = D^2 - 2$ e $P_2(D) = D + 1 \Rightarrow P_1(D)(P_2(D)) = (D^2-2)(D+1) = D^3 + D^2 - 2D - 2$.

A partir de agora, a composta entre polinômios será tratada como um produto e adotaremos a notação $P(D)Q(D)$ ao invés de $P(D)(Q(D))$.

Observação 3: O produto entre polinômios é comutativo, ou seja,

$$P(D)Q(D) = Q(D)P(D).$$

Exemplo: Seja $P(D) = D - 2$ e $Q(D) = D + 4$. Então,

$$P(D)Q(D) = (D-2)(D+4) = D^2 + 2D - 8 = (D+4)(D-2) = Q(D)P(D).$$

O próximo teorema mostra que o modo como definimos soma, diferença e produto entre operadores será útil.

Teorema 1: Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ polinômios em D, $\alpha \in \mathbb{R}$ e z uma função infinitamente diferenciável. Então,

i) $(P(D)+Q(D))z = P(D)z + Q(D)z$

ii) $(\alpha P(D))z = \alpha P(D)z$

iii) $P(D)(Q(D)z) = P(D)Q(D)z$

Este Teorema pode ser facilmente verificado na prática, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo: Sejam $P(D) = D^2 - 1$, $Q(D) = D + 1$, $\alpha = 2$ e z uma função infinitamente diferenciável. Então,

$$\begin{aligned}(P(D) + Q(D))z = (D^2 - 1 + D + 1)z &= (D^2 - D)z \\ &= z'' - z' \\ &= (z'' - z) + (z' + z) \\ &= (D^2 - 1)z + (D + 1)z = P(D)z + Q(D)z.\end{aligned}$$

Isto mostra a validade de $i)$ do teorema para este exemplo. Seguindo os mesmos passos, podemos também verificar $ii)$ e $iii)$.

Conclusão: Estes resultados mostram que podemos operar (somar, subtrair e multiplicar) com polinômios em D da mesma forma que trabalhamos com polinômios comuns, expressos, em geral, na variável t ou x.

Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais

Vejamos agora como resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes usando operadores.

Exemplo 1: Resolva

$$\begin{cases} x' &= y' - x + y \\ y' &= -x' + 3x + y \end{cases} \tag{2}$$

Solução:
(1) Primeiro, devemos primeiro passar todos os termos para o lado esquerdo da equação, agrupando x com x' e y com y':

$$\begin{cases} (x' + x) - (y' + y) &= 0 \\ (x' - 3x) + (y' - y) &= 0 \end{cases}$$

(2) Note que, usando o operador diferencial D, temos

$$x' + x = (D + 1)x \quad , \quad y' + y = (D + 1)y \quad , \quad x' - 3x = (D - 3)x \quad \text{e} \quad y' - y = (D - 1)y.$$

Assim, o sistema acima pode ser reescrito como

$$\begin{cases} (D + 1)x - (D + 1)y &= 0 \\ (D - 3)x + (D - 1)y &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

Para resolver este sistema de equações com incógnitas x e y e "coeficientes" $(D+1), \ldots, (D-1)$, vamos empregar as técnicas tradicionais para resolver sistemas.

Observação: Embora $D + 1$, $D - 3$ e $D - 1$ sejam notações simbólicas para operadores, podemos operá-los como se fossem coeficientes constantes. Isto é uma consequência do Teorema 2, que nos permite somar, subtrair e mutltiplicar operadores tal qual fazemos com variáveis e números reais. NO ENTANTO, NÃO DEVEMOS DIVIDIR OPERADORES.

Vamos triangularizar o sistema (3) para achar as suas soluções:

1 - Multiplicando a 1ª equação por $D-3$ (primeiro coeficiente da 2ª equação), temos

$$(D-3)(D+1)x-(D-3)(D+1)y=0.$$

2 - Multiplicando a 2ª equação por $D+1$ (primeiro coeficiente da 1ª equação), temos

$$(D+1)(D-3)x+(D+1)(D-1)y=0.$$

3 - Fazendo a diferença entre a 2ª e a 1ª equação, obtemos

$$(D+1)(D-3)x-(D-3)(D+1)x+(D+1)(D-1)y+(D-3)(D+1)y=0.$$

Note que os termos com x desaparecem, visto que $(D+1)(D-3)=(D-3)(D+1)$ (comutatividade) e, portanto, $(D+1)(D-3)-(D-3)(D+1)=0$.

Assim, ficamos com

$$(D+1)(D-1)y+(D-3)(D+1)y=0,$$

ou, equivalentemente,

$$(D^2-1)y+(D^2-2D-3)y=0,$$

isto é,

$$(2D^2-2D-4)y=0.$$

Assim, juntando esta equação com a 1ª equação de (3), temos o sistema triangular:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} (D+1)x & - & (D+1)y & = & 0 \\ & & (2D^2-2D-4)y & = & 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

(3) Começaremos estudando a última linha do sistema, já que envolve apenas uma variável. Veja que ela representa

$$2y''-2y-4=0.$$

Esta é uma EDOLH com coeficientes constantes. As soluções podem ser obtidas por meio da equação característica $2\alpha^2-2\alpha-4=0$, cujas raízes são $\alpha_1=2$ e $\alpha_2=-1$. Logo

$$y(t)=C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-t}.$$

Para obter x, devemos substituir y na 1ª equação de (4):

$$(D+1)x-(D+1)(C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-t})=0,$$

ou seja,

$$x'+x-(C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-t})'-(C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-t})=0.$$

Logo,

$$x'+x-2C_1\,e^{2t}+\cancel{C_2\,e^{-t}}-C_1\,e^{2t}-\cancel{C_2\,e^{-t}}=0.$$

Assim,

$$x'+x=3C_1\,e^{2t},$$

que é uma EDOL Não-Homogênea de 1ª ordem. Um fator integrante associado a esta EDO é

$$\mu=e^{\int 1\,dt}=e^t.$$

Multiplicando a EDO por μ, concluímos que

$$e^t x' + e^t x = 3C_1\, e^{2t} e^t = 3C_1\, e^{3t}.$$

Logo,

$$(e^t x)' = 3C_1\, e^{3t}$$

e, portanto,

$$e^t x = \int 3C_1\, e^{3t} dt = C_1 e^{3t} + K.$$

Assim,

$$x(t) = C_1 e^{2t} + K e^{-t}.$$

Resumindo,

$$x(t) = C_1 e^{2t} + K e^{-t} \quad \text{e} \quad y(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}.$$

ATENÇÃO: Observe que a resposta possui 3 constantes livres: C_1, C_2 e K. No entanto, existe um teorema que prediz quantas constantes livres deve ter a resposta final. Para aplicar este resultado, devemos achar a matriz dos coeficientes em D do sistema original, isto é, ANTES de ter sido feito a triangularização. No nosso exemplo, devemos analizar os coeficientes do sistema (3), representados pela matriz

$$\begin{bmatrix} D+1 & -(D+1) \\ D-3 & D-1 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante desta matriz, $2D^2 - 2D - 4$, é um polinômio de grau 2, existe um teorema que garante que a solução final deverá ter apenas 2 constantes livres. Como a nossa resposta tem 3 constantes, significa que deve haver uma relação entre ela. Esta “constante adicional” surgiu durante a triangularização. Trata-se de uma falha do método. Para achar a relação entre C_1, C_2 e K, vejamos quando x e y satisfazem as equações do sistema:

- Quando $x(t) = C_1 e^{2t} + K e^{-t}$ e $y(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}$ satisfazem a 1ª equação do sistema (2)?

$$\begin{aligned} (C_1\, e^{2t} + K\, e^{-t})' &\stackrel{?}{=} (C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t})' - (C_1\, e^{2t} + K\, e^{-t}) + (C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}) \\ \cancel{2C_1\, e^{2t}} - \cancel{K\, e^{-t}} &\stackrel{?}{=} \cancel{2C_1\, e^{2t}} - \cancel{C_2\, e^{-t}} - \cancel{C_1\, e^{2t}} - \cancel{K\, e^{-t}} + \cancel{C_1\, e^{2t}} + \cancel{C_2\, e^{-t}}. \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

  Logo x e y satisfazem a 1ª equação para qualquer C_1, C_2 e K.

- Quando $x(t) = C_1\, e^{2t} + K\, e^{-t}$ e $y(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}$ satisfazem a 2ª equação do sistema (2)?

$$\begin{aligned} (C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t})' &\stackrel{?}{=} -(C_1\, e^{2t} + K\, e^{-t})' + 3(C_1\, e^{2t} + K\, e^{-t}) + (C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}) \\ (2\, C_1\, e^{2t} - C_2\, e^{-t}) &\stackrel{?}{=} -(2\, C_1\, e^{2t} - K\, e^{-t}) + 3(C_1\, e^{2t} + K\, e^{-t}) + (C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}) \\ \cancel{2\, C_1\, e^{2t}} - \underline{C_2\, e^{-t}} &\stackrel{?}{=} \cancel{-2\, C_1\, e^{2t}} + K\, e^{-t} + \cancel{3\, C_1\, e^{2t}} + 3\, K\, e^{-t} + \cancel{C_1\, e^{2t}} + \underline{C_2\, e^{-t}} \\ -2\, C_2\, e^{-t} &\stackrel{?}{=} 4\, K\, e^{-t} \\ -\frac{C_2}{2} &= K. \end{aligned}$$

  Logo x e y satisfazem a 2ª equação se e só se $-\frac{C_2}{2} = K$. Portanto, a solução final é

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{2t} - \tfrac{C_2}{2} e^{-t} \quad \text{e} \quad y(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}.}$$

Exemplo 2: Resolva

$$\begin{cases} x'' &= -11x + 6y \\ y'' &= 6x - 6y \end{cases} \tag{5}$$

Solução:
(1) Passando todos os termos para o lado esquerdo, temos

$$\begin{cases} x'' + 11x - 6y &= 0 \\ -6x + y'' + 6y &= 0 \end{cases}$$

(2) Reescrevendo o sistema na notação de operador, obtemos

$$\begin{cases} (D^2 + 11)x - 6y &= 0 \\ -6x + (D^2 + 6)y &= 0 \end{cases} \tag{6}$$

Para triangularizar o sistema, vamos multiplicar a primeira linha por 6, multiplicar a segunda linha por $(D^2 + 11)$ e soma-las como indicado

$$\begin{array}{cccccc} 6(D^2+11)x & - & 6 \cdot 6y & = & 0 \\ (D^2+11)(-6)x & + & (D^2+11)(D^2+6)y & = & 0 \\ \hline 0x & + & (D^4+17D^2+30)y & = & 0 \end{array}$$

Juntando esta equação com a $2^{\underline{a}}$ linha do sistema (6), obtemos

$$\begin{cases} -6x & + & (D^2+6)y & = & 0 \\ 0x & + & (D^4+17D^2+30)y & = & 0 \end{cases} \tag{7}$$

Note que organizamos as 2 equações de modo que o sistema ficasse na forma triangular superior. Além disso, preferimos ficar com a $2^{\underline{a}}$ linha do sistema (6) ao invés da $1^{\underline{a}}$. Esta escolha é mais interessante, já que a primeira equação não envolve derivadas em x, facilitando o seu cálculo posteriormente.

(3) Para resolver este sistema começaremos estudando a sua segunda linha que equivale à

$$y^{(4)} + 17y'' + 30y = 0.$$

Esta é uma EDOLH de coeficientes constantes cuja equação característica é

$$\alpha^4 + 17\alpha^2 + 30 = 0.$$

Esta equação é uma biquadrada. Podemos resolve-la definindo $\beta = \alpha^2$, obtendo

$$\beta^2 + 17\beta + 30 = 0.$$

As raízes desta equação são $\beta_1 = -2$ e $\beta_2 = -15$. Assim, como $\alpha = \pm\sqrt{\beta}$, obtemos

$$\alpha_1 = i\sqrt{2} \quad , \quad \alpha_2 = -i\sqrt{2} \quad , \quad \alpha_3 = i\sqrt{15} \quad \text{e} \quad \alpha_4 = -i\sqrt{15}.$$

Portanto,

$$y(t) = C_1 \cos(t\sqrt{2}) + C_2 \operatorname{sen}(t\sqrt{2}) + C_3 \cos(t\sqrt{15}) + C_4 \operatorname{sen}(t\sqrt{15}).$$

Para achar $x(t)$, basta substituir $y(t)$ na primeira equação do sistema (7), obtendo

$$\begin{aligned}-6x &+ (C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) + C_3\ \cos(t\sqrt{15}) + C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15}))'' \\ &+ 6(C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) + C_3\ \cos(t\sqrt{15}) + C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15})) = 0.\end{aligned}$$

Então,

$$6x = 4\,C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + 4\,C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) - 9\,C_3\ \cos(t\sqrt{15}) - 9\,C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15}),$$

ou seja,

$$x = \frac{2}{3}C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + \frac{2}{3}C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) - \frac{3}{2}C_3\ \cos(t\sqrt{15}) - \frac{3}{2}C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15}).$$

Resumindo,

$$x(t) = \frac{2}{3}C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + \frac{2}{3}C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) - \frac{3}{2}C_3\ \cos(t\sqrt{15}) - \frac{3}{2}C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15})$$

e

$$y(t) = C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) + C_3\ \cos(t\sqrt{15}) + C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15}).$$

ATENÇÃO: Agora devemos verificar quando x e y são soluções (qual a relação entre as constantes). Note que temos 4 constantes livres: C_1, C_2, C_3 e C_4. Lembremos que o número de constantes livres pode ser achado montando a matriz dos coeficientes do sistema (6):

$$\begin{bmatrix} D^2+11 & -6 \\ -6 & D^2+6 \end{bmatrix}$$

e calculando o grau do determinante desta matriz. Como o determinante é $D^4 + 17D^2 + 30$, o grau deste polinômio é 4 e, portanto, o número de constantes livres deve ser 4. Assim, como obtivemos exatamente 4 constantes, todas elas devem ser livres. Portanto, não há relação entre elas e <u>não</u> precisamos substitutir x e y em (5), como fizemos no exemplo anterior.

Logo, a resposta final é

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = \tfrac{2}{3}C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + \tfrac{2}{3}C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) - \tfrac{3}{2}C_3\ \cos(t\sqrt{15}) - \tfrac{3}{2}C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15}) \\ \text{e} \\ y(t) = C_1\ \cos(t\sqrt{2}) + C_2\ \text{sen}\,(t\sqrt{2}) + C_3\ \cos(t\sqrt{15}) + C_4\ \text{sen}\,(t\sqrt{15}). \end{array}}$$

Observação: O sistema deste exemplo pode ser resolvido de um modo mais simples dispensando a técnica de operadores. Basta isolar y na primeira equação

$$y = \frac{x'' + 11x}{6} \tag{8}$$

e substituí-lo na segunda EDO, obtendo

$$\left(\frac{x''+11x}{6}\right)'' = 6x - 6\left(\frac{x''+11x}{6}\right).$$

Portanto, $x^{(4)} + 17x'' + 30x = 0$. A partir deste ponto, o procedimento é igual ao feito anteriormente, isto é, achamos a raízes da equação caracterítica, determinamos a solução geral de x e subsituímos x em (8) para achar y. A importância da técnica de operadores ocorrem em sistemas em que não é possível isolar x ou y tão facilmente.

Exemplo 3: Resolva

$$\begin{cases} x'' - x' &= 2y' - 2y \\ x' + x &= 2y' - y \end{cases} \tag{9}$$

Solução:
(1) Passando todos os termos para o lado esquerdo, temos

$$\begin{cases} x'' - x' - 2y' + 2y &= 0 \\ x' + x - 2y' + y &= 0 \end{cases}$$

(2) Reescrevendo o sistema na notação de operador, obtemos

$$\begin{cases} (D^2 - D)x - (2D - 2)y &= 0 \\ (D + 1)x - (2D - 1)y &= 0 \end{cases} \tag{10}$$

Para triangularizar o sistema, vamos multiplicar a primeira linha por $(D + 1)$, multiplicar a segunda linha por $(D^2 - D)$ e subrair a segunda linha da primeira, como indicado

$$\begin{array}{rcrcl} & (D+1)(D^2-D)x & - & (D+1)(2D-2)y & = 0 \\ - & (D^2-D)(D+1)x & + & (D^2-D)(2D-1)y & = 0 \\ \hline & 0x & + & (2D^3 - 5D^2 + D + 2)y & = 0 \end{array}$$

Juntando esta equação com a $2^{\underline{a}}$ linha do sistema (10) obtemos

$$\begin{cases} (D+1)x & - & (2D-1)y & = 0 \\ 0x & + & (2D^3 - 5D^2 + D + 2)y & = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Note que organizamos as 2 equações de modo que o sistema ficasse na forma triangular superior. Além disso, preferimos ficar com a $2^{\underline{a}}$ linha do sistema (10) ao invés da $1^{\underline{a}}$, visto a segunda é mais simples (envolve apenas derivadas de ordem 1) do que a primeira.

(3) Para resolver este sistema começaremos estudando a sua segunda linha que equivale à

$$2y''' - 5y'' + y' + 2y = 0.$$

Esta é uma EDOLH de coeficientes constantes cuja equação característica é

$$2\alpha^3 - 5\alpha^2 + \alpha + 2 = 0.$$

Para achar as suas raízes, devemos tentar os divisores do termo independente. Como o termo independente é 2, os candidatos a raízes são ± 1, ± 2.

Substituindo 1 no lado esquerdo, vemos que ele uma solução da equação. Assim $\alpha_1 = 1$ é uma raiz e, portanto, $\alpha - 1$ divide o polinômio $2\alpha^3 - 5\alpha^2 + \alpha + 2$. Usando o método convencional para divisão de polinômios, obtemos

$$\frac{2\alpha^3 - 5\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha - 1} = 2\alpha^2 - 3\alpha - 2.$$

Logo,

$$2\alpha^3 - 5\alpha^2 + \alpha + 2 = (\alpha - 1)(2\alpha^2 - 3\alpha - 2).$$

Assim, para achar as outras raízes, basta achar as raízes de

$$(2\alpha^2 - 3\alpha - 2).$$

As raízes deste polinômio do segundo grau são 2 e $-1/2$. Portanto,

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = 2 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = -1/2.$$

Logo,

$$y(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-t/2}.$$

Para achar $x(t)$, basta substituir $y(t)$ na primeira equação do sistema (11), obtendo

$$x' + x - 2(C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-t/2})' + (C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-t/2}) = 0.$$

Então,

$$x' + x = C_1\, e^t + 3\, C_2\, e^{2t} - 2\, C_3\, e^{-t/2},$$

que é uma EDOL Não-Homogênea de 1ª ordem. Multiplicando esta EDO pelo seu fator integrante $\mu = e^{\int 1 dt} = e^t$, resulta

$$e^t x' + e^t x = C_1\, e^{2t} + 3\, C_2\, e^{3t} - 2\, C_3\, e^{t/2},$$

ou seja,

$$(e^t x)' = C_1\, e^{2t} + 3\, C_2\, e^{3t} - 2\, C_3\, e^{t/2}.$$

Logo,

$$e^t x = \int C_1\, e^{2t} + 3\, C_2\, e^{3t} - 2\, C_3\, e^{t/2} dt = \frac{C_1\, e^{2t}}{2} + C_2\, e^{3t} - 4\, C_3\, e^{t/2} + K.$$

Dividindo por e^t,

$$x = \frac{C_1\, e^t}{2} + C_2\, e^{2t} - 4\, C_3\, e^{-t/2} + K\, e^{-t}.$$

Resumindo,

$$x(t) = \frac{C_1\, e^t}{2} + C_2\, e^{2t} - 4\, C_3\, e^{-t/2} + K\, e^{-t} \quad \text{e} \quad y(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-t/2}.$$

ATENÇÃO: Agora devemos verificar quando x e y são soluções (qual a relação entre as constantes). Note que temos 4 constantes livres: C_1, C_2, C_3 e K. Lembremos que o número de constantes livres pode ser achado montando a matriz dos coeficientes do sistema (10):

$$\begin{bmatrix} D^2 - D & -(2D-2) \\ D+1 & -(2D-1) \end{bmatrix}$$

e calculando o grau do determinante desta matriz. Como o determinante é $-2D^3 + 5D^2 - D - 2$, o grau deste polinômio é 3 e, portanto, o número de constantes livres deve ser 3. Logo temos constantes demais.

Vamos verificar quando x e y são soluções do sistema (9):

• Quando $x(t) = \frac{C_1\, e^t}{2} + C_2\, e^{2t} - 4\, C_3\, e^{-t/2} + K\, e^{-t}$ e $y(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-t/2}$ satisfazem a 1ª equação do sistema (9)?

$$\left(\frac{C_1\, e^t}{2} + C_2\, e^{2t} - 4\, C_3\, e^{-t/2} + K\, e^{-t}\right)'' - \left(\frac{C_1\, e^t}{2} + C_2\, e^{2t} - 4\, C_3\, e^{-t/2} + K\, e^{-t}\right)' =$$

$$2(C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-t/2})' - 2(C_1\, e^t + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-t/2})$$

Isto equivale à
$$\cancel{2\,C_2\,e^{2t}} - \cancel{3\,C_3\,e^{-t/2}} + 2\,K\,e^{t/2} \;=\; \cancel{2\,C_2\,e^{2t}} - \cancel{3\,C_3\,e^{-t/2}},$$
ou seja,
$$K = 0.$$
Com esta relação, temos agora apenas 3 constantes livres: C_1, C_2 e C_3. Como no comentário anterior foi predito a existência de 3 constantes livres, não precisamos verificar quando x e y satisfazem a segunda equação de (9). Se o fizermos, chegaremos a relação $0 = 0$, não adicionando qualquer informação nova.

Portanto, as soluções são

$$\boxed{x(t) = \tfrac{C_1\,e^t}{2} + C_2\,e^{2t} - 4\,C_3\,e^{-t/2} \quad \text{e} \quad y(t) = C_1\,e^t + C_2\,e^{2t} + C_3\,e^{-t/2}.}$$

Observação. O método dos operadores se aplica também a sistemas não homogêneos, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4. Resolver o sistema
$$\begin{cases} x' + y'' = e^{3t} \\ x' + y' + x - y = 4e^{3t} \end{cases}$$
Reescrevendo com os operadores, temos
$$\begin{cases} Dx \quad + \quad D^2 y \quad = e^{3t} \\ (D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t} \end{cases} \tag{12}$$
Multiplicando a primeira equação por $D + 1$ e a segunda por, D temos
$$\begin{cases} D(D+1)x + D^2(D+1)y = 4e^{3t} \\ D(D+1)x + \ D(D-1)y \ = 12e^{3t} \end{cases}$$
Note que, por exemplo, $(D + 1)(e^{3t}) = (e^{3t})' + e^{3t} = 3e^{3t} + e^{3t} = 4e^{3t}$.

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos a EDO $\big(D^2(D+1)-D(D-1)\big)y = -8e^{3t}$, isto é,
$$(D^3 + D)y = -8e^{3t}. \tag{13}$$
A equação característica é $\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Com elas construímos três soluções linearmente independentes para a equação homogênea
$$1, \quad \cos t, \quad \operatorname{sen} t.$$
Procuramos uma solução particular para a equação não homogênea (13) da forma $y_p(t) = Ae^{3t}$. Substituindo na equação, depois de feitas as contas, encontramos
$$y_p(t) = -\frac{4}{15}\,e^{3t}.$$
Portanto,
$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 - \frac{4}{15}\,e^{3t}. \tag{14}$$

Substituindo na primeira equação, obtemos

$$x' = e^{3t} - y'' = e^{3t} + C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + \frac{12}{5}\, e^{3t}.$$

Integrando, temos

$$x(t) = -C_2 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t + \frac{17}{15}\, e^{3t} + C_4. \tag{15}$$

Para saber o número de constantes arbitrárias na solução do sistema, calculamos o determinante

$$\det \begin{pmatrix} D & D^2 \\ D+1 & D-1 \end{pmatrix} = -D^3 - D.$$

Como obtivemos um operador diferencial de ordem 3, sabemos que a solução geral do sistema vai envolver 3 constantes arbitrárias. Mas na solução dada por (14) e (15), aparecem 4 constantes. Logo, as quatro constantes não são livres, deve haver algum vínculo entre elas. Para descobrir esse vínculo, substituimos (14) e (15) no sistema. Ao substituir na primeira equação, não obtemos nada de novo, mas substituindo na segunda equação, obtemos

$$C_3 = C_4.$$

Portanto, a soluç ão do sistema é

$$x(t) = -C_2 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t + \frac{17}{15}\, e^{3t} + C_3$$
$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 - \frac{4}{15}\, e^{3t}.$$