Seção 27: Pontos Singulares – Método de Frobenius

Definição. Seja x_0 um ponto singular para a equação diferencial

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0 \; .$$

Dizemos que x_0 é um **ponto singular regular** se

$$\big(x - x_0\big) P(x) \;\text{ é analítica em } x_0 \;\text{ e}$$

$$\big(x - x_0\big)^2 Q(x) \;\text{ é analítica em } x_0,$$

isto é, se a singularidade dos coeficientes $P(x)$ e $Q(x)$ pode ser removida pela multiplicação, respectivamente, por $\big(x - x_0\big)$ e $\big(x - x_0\big)^2$.

Exemplos.

1. $x_0 = 0$ é um ponto singular regular para a equação de Cauchy–Euler

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \, .$$

De fato, dividindo por x^2, para reduzir a equação à forma canônica, temos $P(x) = \dfrac{a}{x}$ e $Q(x) = \dfrac{b}{x^2}$. As singularidades destas funções podem ser removidas por multiplicação:

$$xP(x) = a \qquad \text{e} \qquad x^2 Q(x) = b \, .$$

2. $x_0 = 0$ é um ponto singular regular para a *equação de Bessel*

$$x^2 y'' + xy' + \big(x^2 - p^2\big) y = 0 \; , \qquad p \in \mathbb{R} \quad \text{parâmetro fixado.}$$

De fato, dividindo por x^2, temos

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad Q(x) = 1 - \frac{p^2}{x^2} \; .$$

Multiplicando, $xP(x) = 1$ e $x^2 Q(x) = x^2 - p^2$ são analíticas em 0.

OBS. O estudo que fizemos da equação de Cauchy–Euler, nos mostra que existe solução da forma $y = x^r$, com r não necessariamente inteiro. Concluímos daí que, no caso de ponto singular regular, não vamos poder procurar solução na forma de uma série de potências, pois séries de potências envolvem somente potências de x com expoente inteiro. Vamos ter que procurar a solução numa forma que contenha como caso particular as funções $y = x^r$.

Método de Frobenius. O Método de Frobenius para uma equação com ponto singular regular, consiste em procurar solução na forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^{n+r} \; .$$

Podemos sempre supor

$$a_0 \neq 0 \ .$$

Basta escolher como r o menor expoente de $x - x_0$ que aparece na série solução. Se r é o menor expoente presente, o coeficiente a_0 de $(x - x_0)^r$ é não nulo. A partir daqui vamos considerar sempre $x_0 = 0$. O caso geral pode ser sempre reduzido a este pela mudança de variável $x \longmapsto x - x_0$.

Exemplo 1. $2x^2y'' + 3xy' + \big(2x^2 - 1\big)y = 0$.

Substituímos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r} \ , \qquad \text{onde} \qquad a_0 \neq 0 \ .$$

Note que na derivada,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \ ,$$

o índice obrigatoriamente começa a variar a partir de $n = 0$, e não a partir de $n = 1$, pois como o primeiro termo de $y = a_0\, x^r + a_1\, x^{r+1} + \cdots$ em geral não é uma constante, este não se anula por derivação. Não temos aqui a liberdade de escolha de começar, conforme a conveniência, a partir de $n = 1$ ou de $n = 0$, que tínhamos no método de resolução por série de potências em um ponto ordinário. A mesma observação vale para a derivada de ordem 2

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \big(n+r\big)\big(n+r-1\big) a_n x^{n+r-2} \ .$$

Substituindo y, y' e y'' por suas expansões em série na equação diferencial dada, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \, .$$

Agrupando os termos em x^{n+r}, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1\Big) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r+2} = 0 \, .$$

Fazendo $n + 2 = k$ no segundo somatório,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+r)(2n+2r-2+3) - 1\Big) a_n x^{n+r} + \sum_{k=2}^{\infty} 2a_{k-2} x^{k+r} = 0 \, .$$

No segundo somatório podemos substituir k por qualquer letra, inclusive n. Separamos os 2 primeiros termos do primeiro somatório e combinamos os 2 somatórios restantes

$$\Big(r\,(2r+1) - 1\Big) a_0 x^r + \Big((r+1)(2r+3) - 1\Big) a_1 x^{r+1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \Bigg[\Big((n+r)(2\,n + 2\,r + 1) - 1\Big) a_n + 2\, a_{n-2}\Bigg] x^{n+r} = 0$$

Se quisermos obter uma série de potências, dividimos por x^r. Portanto valem as mesmas observações feitas no método de séries de potências e, então, o coeficiente de cada x^{n+r} deve se anular. Como $a_0 \neq 0$, temos

(i) $\qquad r(2r+1)-1=0$, chamada de **equação indicial**

(ii) $\qquad \Big((r+1)(2r+3)-1\Big)a_1 = 0$

(iii) $\qquad \Big((n+r)(2n+2r+1)-1\Big)a_n + 2a_{n-2} = 0\,, \quad$ para $\quad n = 2,3,4,\ldots$

Esta última é a **fórmula de recorrência**.

A equação indicial (i) é uma equação algébrica de grau 2. As suas raízes dão os possíveis valores para r. No exemplo que estamos considerando, a equação indicial é

$$2r^2 + r - 1 = 0\,,$$

cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = -1\,.$$

Por razões que vão ser importantes mais tarde, nos casos mais complicados, é conveniente trabalhar primeiro com a maior das raízes da equação indicial. Por esta razão, indicamos por r_1 e r_2, respectivamente, a maior e a menor das raízes da equação indicial.

1ª Solução. Com $r_1 = \dfrac{1}{2}$

A equação (ii) fica

$$5\,a_1 = 0\,.$$

Então a_0 pode ser escolhido arbitrariamente, com a única restrição que seja diferente de 0. Mas necessariamente $a_1 = 0$. Escolhemos $a_0 = 1$.

A fórmula de recorrência fica

$$\Big(\big(2n+1\big)\big(n+1\big)-1\Big)a_n + 2a_{n-2} = 0\ , \quad \text{para} \quad n = 2,3,4,\ldots\ ,$$

ou seja,

$$\big(2n^2+3n\big)a_n + 2a_{n-2} = 0\,.$$

Segue que

$$a_n = -\frac{2a_{n-2}}{n\big(2n+3\big)}\ , \qquad \text{para} \quad n = 2,3,4,\ldots\ .$$

Concluímos que

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$$

$$a_0 = 1 \implies a_2 = -\frac{2}{2\cdot 7} \implies a_4 = \frac{2^2}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 11} \implies a_6 = -\frac{2^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 15}\,.$$

Simplificando, obtemos

$$a_0 = 1\ , \quad a_2 = -\frac{1}{1\cdot 7}\ , \quad a_4 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 7\cdot 11}\ , \quad a_6 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 15}\,.$$

Em geral,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!\big(7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)\big)} \ , \qquad n \geq 1 \, .$$

Obtemos, então, a solução

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Big(7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)\Big)} \, x^{2n} \right) .$$

Note que esta solução pode ser reescrita na forma de um único somatório

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n!\Big(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n+3)\Big)} \, x^{2n} \ .$$

2ª Solução. Com $r_2 = -1$

A equação (ii) fica

$$-a_1 = 0 \, .$$

Ainda podemos escolher a_0 arbitrariamente, com a única restrição que seja diferente de 0. Mas necessariamente $a_1 = 0$. Escolhemos $a_0 = 1$.

A fórmula de recorrência fica

$$\Big((2n+1)(n+1) - 1 \Big) a_n + 2a_{n-2} = 0 \ , \quad \text{para} \quad n = 2, 3, 4, \ldots \ ,$$

ou seja,

$$\big(2n^2 - 3n\big) a_n + 2a_{n-2} = 0 \, .$$

Segue que

$$a_n = -\frac{2a_{n-2}}{n\big(2n-3\big)} \ , \qquad \text{para} \quad n = 2, 3, 4, \ldots \, .$$

Concluímos que

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$$

$$a_0 = 1 \implies a_2 = -\frac{2}{2 \cdot 1} \implies a_4 = \frac{2^2}{2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5} \implies a_6 = -\frac{2^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9} \, .$$

Simplificando, obtemos

$$a_0 = 1 \ , \quad a_2 = -\frac{1}{1 \cdot 1} \ , \quad a_4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5} \ , \quad a_6 = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9} \, .$$

Em geral,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!\big(1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)\big)} \ , \qquad n \geq 1 \, .$$

Obtemos a solução

$$y_2(x) = x^{-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Big(1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)\Big)} \, x^{2n} \right) .$$

Encontramos assim duas soluções linearmente independentes para nossa equação diferencial linear homogênea. É imediato que y_1 e y_1 são linearmente independentes. Uma delas não é múltiplo da outra, pois num caso a potência de x de menor expoente que aparece é $x^{\frac{1}{2}}$ e no outro caso é x^{-1} .

Veremos que existem 3 casos diferentes no Método de Frobenius. O exemplo dado acima é do caso mais simples, em que a equação indicial tem duas raízes distintas r_1 e r_2, mas cuja diferença $r_1 - r_2$ não é um inteiro. Existe ainda um segundo caso, de raiz dupla $r_1 = r_2$, e um terceiro caso, de raízes distintas $r_1 \neq r_2$ tais que $r_1 - r_2 =$ inteiro.