Seção 28: FUNÇÕES DE BESSEL

A *equação de Bessel de índice* p é a EDO

$$x^2y'' + xy' + \big(x^2 - p^2\big)y = 0 \ ,$$

onde p é um número real.

O ponto $x_0 = 0$ é um ponto singular regular para a equação de Bessel. Aplicando, então, o método de Frobenius, procuramos uma solução da forma

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r} \ , \qquad \text{com} \ \ a_0 \neq 0 \ .$$

Substituindo na equação de Bessel, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}p^2a_nx^{n+r} = 0\,.$$

Juntando o 1º, o 2º e o 4º somatórios, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+r)^2 - p^2\big)a_n\, x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n\, x^{n+r+2} = 0 \ .$$

No segundo somatório acima, fazendo $k = n+2$ e fatorando o coeficiente do primeiro somatório, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+r+p\big)\big(n+r-p\big)a_n\, x^{n+r} + \sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}\, x^{k+r} = 0 \ .$$

No segundo somatório, substituindo o índice k por n, separando os dois primeiros termos do primeiro somatório, obtemos

$$\big(r+p\big)\big(r-p\big)a_0\, x^r + \big(r+p+1\big)\big(r-p+1\big)a_1\, x^{r+1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\Big(\big(n+r+p\big)\big(n+r-p\big)a_n + a_{n-2}\Big)x^{n+r} = 0 \ .$$

Como $a_0 \neq 0$, segue que

$$\big(r+p\big)\big(r-p\big) = 0 \tag{1}$$

$$\big(r+p+1\big)\big(r-p+1\big)a_1 = 0 \tag{2}$$

$$\big(n+r+p\big)\big(n+r-p\big)a_n + a_{n-2} = 0 \tag{3}$$

A equação (1) é a equação indicial. Suas raízes são $r_1 = p$ e $r_2 = -p$.

1ª Solução: Para $r_1 = p \geq 0$, a equação (2) se torna

$$\big(2p+1\big)a_1 = 0 \ ,$$

ou seja,

$$a_1 = 0 \ . \tag{4}$$

A fórmula de recorrência (3) se torna

$$\big(n+2p\big)n\,a_n + a_{n-2} = 0\ , \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5}$$

De (5) segue que

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}\ , \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{6}$$

Usando (4) e (6) e deixando para escolher mais tarde o valor de a_0, obtemos

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2p)}\ , \quad a_4 = \frac{a_0}{2\cdot 4\,(2+2p)(4+2p)}\ , \quad a_6 = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot\, 6\,(2+2p)(4+2p)(6+2p)}\ .$$

Temos

$$a_2 = \frac{(-1)^n\,a_0}{1(1+p)\cdot 2^2}\ , \quad a_4 = \frac{a_0}{1\cdot 2\,(1+p)(2+p)\cdot 2^4}\ , \quad a_6 = -\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot\, 3\,(1+p)(2+p)(3+p)\cdot 2^6}\ .$$

Em geral,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\,a_0}{n!\,(1+p)(2+p)\cdots(n+p)\cdot 2^{2\,n}}\ . \tag{7}$$

Costuma-se fazer a escolha

$$a_0 = \frac{1}{2^p\,\Gamma(1+p)}\ . \tag{8}$$

Utilizando repetidas vezes a identidade

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\ ,$$

temos

$$\begin{aligned}\big(n+p\big)\cdots\big(2+p\big)\big(1+p\big)\Gamma(1+p) &= \big(n+p\big)\cdots\big(2+p\big)\Gamma(2+p)\\ &= \big(n+p\big)\cdots\big(3+p\big)\Gamma(3+p) = \cdots = \Gamma(n+p+1)\ .\end{aligned}$$

Portanto com a escolha (8), (7) se torna

$$a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)\,2^{2n+p}}\ .$$

Obtemos, finalmente, a solução

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Esta função é chamada de **função de Bessel de 1ª espécie de índice** p e denotada por $J_p(x)$:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\ .$$

Para $p = m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}\ .$$

Em particular,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad , \quad J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \quad ,$$

$$J_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2} \quad , \qquad \text{etc.}$$

Examinando a expresão

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{64}\,x^4 + \cdots \ ,$$

vemos que $J_0(x)$ é uma função par, pois só envolve potências de x com expoentes pares e satisfaz $J_0(0) = 1$.

Observação importante: A equação de Bessel não muda se substituirmos p por $-p$. Conseqüentemente $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são duas soluções da equação de Bessel de índice p. Precisamos investigar em que casos estas duas funções são linearmente independentes.

Exemplo: Vamos obter as expansões em séries de potências das funções de Bessel $J_{\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \ .$$

Note que, utilizando repetidas vezes a identidade $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, e, sabendo que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, obtemos

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}+1) = \big(n+\frac{1}{2}\big)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \big(n+\frac{1}{2}\big)\big(n-\frac{1}{2}\big)\Gamma(n-\frac{1}{2}) = \cdots$$
$$= \big(n+\frac{1}{2}\big)\big(n-\frac{1}{2}\big)\cdot\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{2\,n+1}{2}\cdot\frac{2\,n-1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \ ,$$

isto é,

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}+1) = \frac{(2\,n+1)(2\,n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{2^{n+1}}\,\sqrt{\pi}$$

Logo

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,2^{n+1}}{n!\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\,n+1)}\,\sqrt{\frac{1}{\pi}}\;\frac{x^{2\,n+\frac{1}{2}}}{2^{2\,n+\frac{1}{2}}} \ .$$

Levando em conta que

$$n!\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\,n+1)\,2^n = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\,n)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\,n+1) = (2\,n+1)! \quad ,$$

temos

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\,x^{2n+1}$$

e, finalmente,

$$\boxed{J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}\ \operatorname{sen} x}$$

Analogamente mostra-se que

$$\boxed{J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\ \cos x}$$

Conclusão: *Para* $p = \dfrac{1}{2}$, *as funções de Bessel* $J_{\frac{1}{2}}(x)$ *e* $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ *se expressam em termos de funções elementares,* $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\, x}}\ \operatorname{sen} x$ *e* $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\, x}}\ \cos x$ *e são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de índice* $\dfrac{1}{2}$

$$x^2 y'' + x y' + \big(x^2 - \frac{1}{4}\big) y = 0\ .$$

Mais geralmente, temos a seguinte

Propriedade: *Se* p *não é um inteiro, então* $J_p(x)$ *e* $J_{-p}(x)$ *são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de índice* p.

De fato, o comportamento destas funções próximo ao ponto $x_0 = 0$ é dado pelo primeiro termo da série

$$J_p(x) \approx \frac{x^p}{2^p\, \Gamma(1+p)} \qquad \text{e} \qquad J_{-p}(x) \approx \frac{x^{-p}}{2^{-p}\, \Gamma(1-p)} \quad , \qquad \text{quando} \ \ x \longrightarrow 0\ .$$

Logo uma não é múltipla da outra e, portanto, são linearmente independentes.

Exemplo: Vamos mostrar que $J_{-3}(x) = -J_3(x)$. Temos

$$J_{-3}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n-3+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n-2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-3} .$$

Levando em conta que

$$\frac{1}{\Gamma(-2)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0\ ,$$

temos que os 3 primeiros termos da série são nulos e o somatório pode ser começado em $n = 3$,

$$J_{-3}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n-2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-3} ,$$

ou, para $n = k+3$,

$$J_{-3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+3}}{(k+3)!\, k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(k+3)!\, k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+3} = -J_3(x)\ .$$

Usando o mesmo argumento prova-se a

Propriedade: *Para* $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$J_{-m}(x) = (-1)^m\, J_m(x)\ .$$

Em resumo:

(*i*) *Se* p *não é um inteiro, então* $J_p(x)$ *e* $J_{-p}(x)$ *são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de índice* p*;*

(ii) *Se $p = m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, então $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são linearmente dependentes, mais precisamente, $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$.*

Para $p = m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ precisamos encontrar uma segunda solução, linearmente independente de $J_m(x)$. Qualquer solução da equação de Bessel de índice m, linearmente independente de $J_m(x)$, é dita uma **função de Bessel de segunda espécie de índice** p.

Para $p = m = 0$, a equação de Bessel é

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 .$$

Uma solução é $y_1 = J_0(x)$. Sabemos que podemos encontrar uma solução, linearmente independente da forma

$$y_2 = v(x) J_0(x) .$$

Substituindo na equação de Bessel, obtemos

$$x\big(v'' J_0 + 2v' J_0'\big) + v' J_0 = 0$$

$$v'' x J_0 + (2x J_0' + J_0) v' = 0 ,$$

que se reduz à primeira ordem fazendo $z = v'$,

$$\frac{dz}{dx} = -\left(\frac{2\, J_0'}{J_0} + \frac{1}{x}\right) z .$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \left(\frac{2\, J_0'}{J_0} + \frac{1}{x}\right) dx$$

ou

$$\ln z = -2 \ln |J_0| - \ln x + \ln C$$

$$z = C \frac{1}{x\big(J_0(x)\big)^2}$$

$$v = C \int \frac{1}{x\big(J_0(x)\big)^2}\, dx + D .$$

Escolhendo $C = 1$ e $D = 0$,

$$y_2 = J_0(x) \int \frac{1}{x\big(J_0(x)\big)^2}\, dx .$$

Por outro lado, de

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 + \cdots$$

segue que

$$\begin{aligned}
\big(J_0(x)\big)^2 &= \Big(1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 + \cdots\Big)\Big(1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 + \cdots\Big) \\
&= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \left(\frac{1}{64} + \Big(-\frac{1}{4}\Big)^2 + \frac{1}{64}\right) x^4 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{32} x^4 + \cdots .
\end{aligned}$$

Queremos encontrar a expansão de $\dfrac{1}{\big(J_0(x)\big)^2}$. Como $\big(J_0(x)\big)^2$ só envolve potências de x com expoente par (ou seja, é função par), o mesmo acontece com seu inverso.

$$\frac{1}{\big(J_0(x)\big)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{32}\,x^4 + \cdots} = b_0 + b_2\,x^2 + b_4\,x^4 + \cdots$$

Devemos ter

$$1 = \Big(1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{32}\,x^4 + \cdots\Big)\Big(b_0 + b_2\,x^2 + b_4\,x^4 + \cdots\Big) \quad ,$$

ou, efetuando a multiplicação,

$$1 = b_0 + \Big(b_2 - \frac{b_0}{2}\Big)x^2 + \Big(b_4 - \frac{b_2}{2} + \frac{3\,b_0}{32}\Big)x^4 + \cdots \quad .$$

Da igualdade das séries, temos

$$\begin{aligned} 1 &= b_0 \\ 0 &= b_2 - \frac{b_0}{2} \\ 0 &= b_4 - \frac{b_2}{2} + \frac{3\,b_0}{32}\,. \end{aligned}$$

Segue que

$$b_0 = 1 \quad , \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad b_4 = \frac{5}{32} \quad , \quad \text{etc.}$$

Logo,

$$\frac{1}{\big(J_0(x)\big)^2} = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{32}\,x^4 + \cdots\,.$$

Finalmente,

$$y_2 = J_0(x)\int\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,x + \frac{5}{32}\,x^3 + \cdots\Big)\,dx = J_0(x)\ln x + J_0(x)\Big(\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{5}{128}\,x^4 + \cdots\Big)\,.$$

Note que

$$\begin{aligned} J_0(x)\Big(\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{5}{128}\,x^4 + \cdots\Big) &= \Big(1 - \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{64}\,x^4 + \cdots\Big)\Big(\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{5}{128}\,x^4 + \cdots\Big) \\ &= \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{3}{128}\,x^4 + \cdots\,. \end{aligned}$$

Obtemos, finalmente, uma segunda solução para a equação de Bessel de índice 0, que é linearmente independente de $J_0(x)$, a função

$$y_2 = Y_0(x) = J_0(x)\ln x + \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{3}{128}\,x^4 + \cdots \;,$$

conhecida como **função de Bessel de Neumann de segunda espécie de índice 0**. Como $J_0(0) = 1$, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} Y_0(x) = -\infty\,.$$

Conclusão: *As únicas soluções da equação de Bessel de índice 0 que são limitadas em intervalos do tipo* $(0,a)$ *são as da forma*

$$y = C\,J_0(x)\,.$$

Para $p = m = 1, 2, 3, \ldots$ prova-se a mesma conclusão e, portanto, vale a seguinte

Propriedade: *As únicas soluções da equação de Bessel de índice* $p = m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *que são limitadas em intervalos do tipo* $(0,a)$ *são as da forma*

$$y = C\,J_m(x)\;.$$