MAT02253 - Inferência Estatística I
1^{a} Lista

Suzi Alves Camey

17 de março de 2006

1. Um dado é lançado n vezes, independentemente. Seja $X_1, \ldots, X_n$ os sucessivos valores das faces. É razoável se pensar que $X_1, \ldots, X_n$ é uma a.a. de uma v.a. X.
   (a) Qual o modelo probabilístico para a v.a. X?
   (b) Qual o modelo estatístico para o experimento?
   (c) Mostre que $EX = \mu_1 = 3,5, EX^2 = \mu_2 = \frac{91}{6}, EX^4 = \mu_4 = \frac{2275}{6}$.
   (d) Obtenha uma distribuição aproximada para $\bar{X}$ e $M_2 = \frac{\sum_{i-1}^{n} X_i^2}{n}$
   (e) Assuma $n = 12$ e calcule aproximadamente $P(40 \leq \sum_{i-1}^{n} X_i \leq 45)$ e $P(170 \leq \sum_{i-1}^{n} X_i^2 \leq 190)$
   (f) Seja $N_i = \#$ de vezes em que ocorre a face i. Qual a distribuição de N_i? Obtenha uma distribuição aproximada para N_i.

2. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população X com distribuição Bernoulli com parâmetro$p$.
   (a) Qual a distribuição amostral?
   (b) Qual a distribuição de $X_1 + \cdots + X_n$?
   (c) Qual a distribuição de $\bar{X}$?
   (d) Para $n = 2$, qual a distribuição de $\sum_{i=1}^{n}(X_i - p)^2$?

3. Uma a.a. de tamanho 10 foi obtida de uma certa população. Uma característica numérica X foi analisada e os resultados numéricos observados foram: 3, 2, 0, 7 ,8 ,10, 3, 5, 5, 6. Determine a média e a variância dessa amostra.

4. Suponha que X tem distribuição χ_n^2. Mostre que $EX = n$ e $Vax(X) = 2n$.

   Sugestão: Use a função geradora de momentos.

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população com média μ e variância σ^2.
   (a) Mostre que $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$.

(b) Mostre que $E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\right)=n-1$ e $ES^2=\sigma^2$.

(c) Qual é o valor de Y que minimiza $\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y)^2$?

6. Seja $X_1,\ldots,X_{10}$ uma a.a. de uma população normal com média μ e variância σ^2. Use a tabela da distribuição χ^2 para determinar os pontos z_1 e z_2 tais que:

   (a) $P\left(z_1<\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<z_2\right)=0,90$.

   (b) $P\left(\frac{10}{\sigma^2}(\bar{X}-\mu)^2\leq z_1\right)=0,90$.

   (c) $P\left(z_1<\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<z_2\right)=0,90$.

   (d) $P\left(z_1\sigma^2<S^2<z_2\sigma^2\right)=0,90$.

7. Uma moeda honesta é lançada 5 vezes. Qual é a exata probabilidade de que a diferença entre a proporção amostral de caras e a proporção esperada de caras seja no máximo $0,05$?

8. Seja $X_1,\ldots,X_n$ uma a.a. de uma população normal com média μ e variância σ^2 desconhecidos.

   (a) Qual a distribuição de $\sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$?

   (b) $\sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ é uma estatística?