MAT02253 - Inferência Estatística I
3ª Lista

Suzi Alves Camey

27 de abril de 2006

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população com função densidade dada por:
$$f(x|\theta) = \theta^2 x \exp(-\theta x) I_{(0,+\infty)}(x), \ \theta > 0.$$
Mostre que $S = \frac{1}{X_1}$ é um estimador não-viciado para θ.

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. proveniente de uma população normal com média μ e variância 1 e seja $d(\mu) = \mu^2$.
   (a) Mostre, usando a desigualdade de Cramer-Rao, que a variância de qualquer estimador não-viciado de μ^2 tem como limite inferior $4\frac{\mu^2}{n}$.
   (b) Mostre que $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ é o estimador ENVUMV de $d(\mu)$. Compare a sua variância com o limite inferior anteriormente obtido.
   (c) Para este modelo, qual a função $K(\mu, n)$ que adimite um estimador não-viciado cuja variância atinge o limite inferior de Cramer-Rao?

3. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. proveniente de uma população com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$.
   (a) Mostre que existe uma constante k (e determine-a) de modo que $kX_{(n)}$ é um ENV para θ.
   (b) Calcule a variância do estimador obtido em (a).
   (c) Compare a variância anterior com o limite inferior de Cramer-Rao para a variância de um estimador não-viciado para θ e explique porque razão o limite não se aplica nesse caso.

4. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. da distribuição de Poisson com média θ e $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Determine a constante c tal que $exp(-cY)$ seja um ENV para $exp(-\theta)$.
   (b) Obtenha o limite inferior para a variância deste estimador.
   (c) Discuta a eficiência deste estimador.

5. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. da distribuição de Bernoulli com parâmetro $\theta > 0$. Mostre que a variância de qualquer estimador não-viciado de $(1-\theta)^2$ deve ser maior ou igual a $4\theta(1-\theta)^3/n$.

6. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. proveniente de uma $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a cota inferior de Cramer-Rao para a variância dos estimadores não-viciados de σ^2. E de μ. Compare com a $VarS^2$ e $Var\bar{X}$.