Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Algoritmo: (Regra Composta Recursiva Trapezoidal)
Entrada: função f, números reais a e b, tolerância TOL.
Saída: Aproximação s_n para $\int_a^b f(x)dx$
P1: $n = 0$; $h_0 = b - a$; $s_0 = (f(a) + f(b))h_0/2$;
P2: Enquanto TOL ainda não foi alcançado, faça:
P3: n = n + 1;
P4: $h_n = \frac{h_{n-1}}{2}, g_n = \sum_{i\geq 1,\text{ímpar}}^{2^n-1} f(a + i \cdot h_n)$
P5: $s_n = \frac{s_{n-1}}{2} + g_n h_n$
Fim Enquanto
Retorne s_n

Quadratura de Gauss-Legendre para $n + 1$ pontos:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

onde $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidos conforme tabela.
Parâmetros da Quadratura de Gauss-Legendre:

n	x_k	w_k
1	$-\sqrt{1/3}$	1
	$\sqrt{1/3}$	1
2	$-\sqrt{3/5}$	5/9
	0	8/9
	$\sqrt{3/5}$	5/9
3	-0.861136312	0.347854845
	-0.339981044	0.652145155
	0.339981044	0.652145155
	0.861136312	0.347854845

Quadratura de Gauss-TChebyshev para $n + 1$ pontos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$$

onde $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidos por

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}\right), k = 0, 1, \ldots, n$$

Quadratura de Gauss-Laguerre para $n + 1$ pontos:

$$\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

onde $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidos conforme tabela.
Quadratura de Gauss-Hermite para $n + 1$ pontos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

onde $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidos conforme tabela.
Esquema de Runge-Kutta de segunda ordem, ou Heun, para $y' = f(t, y)$:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f(t_{i+1}, y_i + \triangle t k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{\triangle t(k_1 + k_2)}{2}, i = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Parâmetros da Quadratura de Gauss-Laguerre:

n	x_k	w_k
1	0.585786437627	0.853553390593
	3.414213562373	0.14644669407
2	0.415774556783	0.711093009929
	2.294280360279	0.278517733569
	6.289945082937	0.103892565016
3	0.322547689619	0.603154104342
	1.745761101158	0.357418692438
	4.536620296921	$0.388879085150 \cdot 10^{-1}$
	9.395070912301	$0.539294705561 \cdot 10^{-3}$
4	0.2635603197	0.5217556106
	1.413403059	0.39866681108
	3.59642577	$0.75942244868 \cdot 10^{-1}$
	7.0858100059	$0.36117586799 \cdot 10^{-2}$
	12.64080084423	$0.23369972386 \cdot 10^{-4}$

Parâmetros da Quadratura de Gauss-Hermite:

n	x_k	w_k
1	-0.7071067811	0.8862269255
	0.7071067811	0.8862269255
2	-1.22447448714	0.2954089752
	0.00000000000	1.1816359006
	1.22447448714	0.2954089752
3	-1.6506801239	0.0813128354
	-0.5246476233	0.8049140900
	0.5246476233	0.8049140900
	1.6506801239	0.0813128354
4	-2.021828705	0.0199532421
	-0.9585724646	0.3936193232
	0	0.9453087205
	0.9585724646	0.3936193232
	2.021828705	0.0199532421

Parâmetros para os esquemas de Adams-Moulton (corretores):

m	β_0	β_1	β_2	β_3	e_T
1	*1/2*	*1/2*			$\mathcal{O}((\triangle t)^2)$
2	*5/12*	*8/12*	*-1/12*		$\mathcal{O}((\triangle t)^3)$
3	*9/24*	*19/24*	*-5/24*	*1/24*	$\mathcal{O}((\triangle t)^4)$

Parâmetros para os esquemas de Adams-Bashford (previsores):

m	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	e_T
1	0	1				$\mathcal{O}(\triangle t)$
2	0	3/2	-1/2			$\mathcal{O}((\triangle t)^2)$
3	0	23/12	-16/12	5/12		$\mathcal{O}((\triangle t)^3)$
4	0	55/24	-59/24	37/24	-9/24	$\mathcal{O}((\triangle t)^4)$

Esquema de Runge-Kutta de quarta ordem para $y' = f(t, y)$:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{\triangle t}{2}, y_i + \frac{\triangle t k_1}{2}\right) \\ k_3 = f\left(t_i + \frac{\triangle t}{2}, y_i + \frac{\triangle t k_2}{2}\right) \\ k_4 = f\left(t_{i+1}, y_i + \triangle t k_3\right) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{\triangle t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, i = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$