Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Primeira Lista de Exercícios

1. Aproxime numericamente $f'(2)$, onde f é a função que associa x a $y<0$ tal que $y^2-4xy-2x^3=0$, usando as diferença finitas $d_1=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{\triangle x}$, $d_2=\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\triangle x}$, e preenchendo a tabela abaixo

$\triangle x$	d_1	d_2	$\triangle x$	d_1	d_2
10^0			10^{-4}		
10^{-1}			10^{-5}		
10^{-2}			10^{-6}		
10^{-3}			10^{-7}		

Em particular, você deve encontrar o valor exato desta derivada e comprovar que a sequência associada a d_2 converge mais rapidamente para esse valor.

2. Aproxime numericamente $f'(0.3)$ com 5 casas corretas, onde f é a função que associa x a y tal que

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 3 & -1 \\ x^2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ y \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

usando diferenças centrais e montando uma sequência de aproximações.

3. Uma estratégia para calcular $f'(\bar{x})$ consiste em avaliar f em um conjunto de pontos distintos $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, em torno de $\bar{x}$, então definindo o polinômio interpolador de Lagrange

$$\Phi(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)\ ,\ \text{onde } L_i(x)=\prod_{k=0,\ldots,n;k\neq i}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}, 0\leq i\leq n$$

de onde podemos aproximar $f'(\bar{x})=\phi'(\bar{x})$. Uma vez que podemos *escolher* os pontos $x_0,\ldots,x_n$, muito frequente é o caso em que usamos pontos igualmente espaçados $x_i=x_0+ih$, onde $h=(x_n-x_0)/n$ é o parâmetro de discretização. Neste caso, as expressões simplificam para

$$\Phi(\bar{x})=\sum_{k=0}^{n}\triangle^k f(x_0)\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}$$

onde $s=\dfrac{x-x_0}{h}$, $\triangle^k f(x_0)$ é a k-ésima diferença finita ascendente de f no ponto x_0, e

$$\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}=\frac{s(s-1)\ldots(s-(k-1))}{k!},$$

ou seja,

$$\Phi(\bar{x})=f(x_0)+\triangle f(x_0)s+\triangle^2 f(x_0)\frac{s(s-1)}{2}+\triangle^3 f(x_0)\frac{s(s-1)(s-2)}{6}+$$
$$+\triangle^4 f(x_0)\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}+\ldots+$$

Dessa forma,

$$\Phi'(\bar{x})=\frac{1}{h}\Bigg[\triangle f(x_0)+\triangle^2 f(x_0)\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{\triangle^3 f(x_0)}{6}\left[s(s-1)+s(s-2)+s(s-1)\right]+$$
$$+\frac{\triangle^4 f(x_0)}{24}\left[(s-1)(s-2)(s-3)+s(s-2)(s-3)+s(s-1)(s-3)+s(s-1)(s-2)\right]+\ldots+\Bigg]$$

PEDE-SE: resolva o exercício 2. usando as fórmulas acima, para:

(a) $n=2$, $\{x_0,x_1,x_2\}=\{0.2,0.3,0.4\}$;

(b) $n=4$, $\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}=\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5\}$;

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Segunda Lista de Exercícios

1. Aproxime numericamente

$$I = \int_0^2 \tan\left(\frac{\pi x^2}{16}\right) \; dx$$

usando: (a) Regra Composta do Trapézio e 4 intervalos; (b) Regra Composta de Simpson e 3 intervalos.
2. Aproxime numericamente

$$I = \int_{-2}^2 \frac{\exp(-x^2)}{3+x} \; dx$$

usando: (a) Regra Composta do Trapézio e 5 intervalos; (b) Regra Composta de Simpson e 4 intervalos.
3. Aproxime numericamente

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+x^2} \; dx$$

usando: (a) Regra Composta do Trapézio e 4 intervalos; (b) Regra Composta de Simpson e 3 intervalos.
4. A tabela abaixo mostra os valores de duas variáveis x e y, onde presume-se $y = f(x)$.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.47

Sem criar (usar) novos pontos para essa tabela, aproxime $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ usando:
(a) Regra Composta do Trapézio , (b) Regra Composta de Simpson.
5. Avalie numericamente, com 5 casas decimais exatas,

$$I = \int_1^2 \frac{e^x}{\ln(1+x)} \; dx$$

usando a Regra Recursiva do Trapézio. (e = número de Euler)
6. Avalie numericamente, com 5 casas decimais exatas,

$$I = \int_{\pi/2}^\pi \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\ln(x)} \; dx$$

usando a Regra Recursiva do Trapézio.
7. Avalie numericamente, com 5 casas decimais exatas,

$$I = \int_0^{e^2} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+x^2} \; dx$$

usando a Regra Recursiva do Trapézio. (e = número de Euler) Por quê essa iteração não converge com a velocidade prevista ?
8. Avalie numericamente, com 5 casas decimais exatas,

$$I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin\left(x + |x|^{1/2}\right) \; dx$$

usando: (a) Quadratura Recursiva do Trapézio; (b) Quadratura Recursiva de Simpson.

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Terceira Lista de Exercícios

1. Aproxime numericamente

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}\ dx$$

usando: (a) quadratura de Gauss-Legendre em 3 pontos; (b) quadratura de Gauss-Tchebyshev em 5 pontos.
2. Aproxime numericamente

$$I = \int_0^1 \ln(2-2x^2)\ dx$$

usando: (a) quadratura de Gauss-Legendre em 4 pontos; (b) quadratura de Gauss-Tchebyshev em 4 pontos.
3. Aproxime numericamente

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{|x|}}}{1+x^2}\, dx$$

usando: (a) quadratura de Gauss-Laguerre em 4 pontos; (b) quadratura de Gauss-Hermite em 4 pontos (use a simetria do integrando).
4. Aproxime numericamente

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\pi\sqrt{|x|}}}{2+x^2}\, dx$$

usando: (a) quadratura de Gauss-Hermite em 4 pontos; (b) quadratura recursiva do Trapézio em $[-20, 20]$, com 5 casas significativas corretas.
5. Avalie numericamente

$$I = \int_{-2}^2 arc\text{sen}\ (xe^x/20)\ \ dx$$

usando: (a) quadratura de Gauss-Legendre em 4 pontos; (b) quadratura de Gauss-Tchebyshev em 5 pontos;
6. Aproxime numericamente a *integral mal comportada*

$$I = \int_0^\pi \frac{\text{sen}\,(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

usando a mudança de variável $u = x^{1/2}$ e : (a) quadratura de Gauss-Tchebyshev com 5 pontos;
(b) quadratura de Gauss-Legendre com 4 pontos; (c) quadratura composta recursiva de Simpson, com 5 casas significativas corretas.
7. Para aproximar numericamente a *integral mal comportada*

$$I = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

use a mudança de variável $x = -u^{3/2}, x < 0; x = u^{3/2}, x \geq 0$ e :
(a) quadratura de Gauss-Tchebyshev com 5 pontos; (b) quadratura de Gauss-Legendre com 4 pontos.
8. Para aproximar numericamente a *integral mal comportada*

$$I = \int_0^1 \frac{\text{sen}\ \left(\pi\sqrt{x/4}\right)}{x}\, dx$$

use a mudança de variável $u = \ln(x), x > 0$ e quadratura de Gauss-Laguerre com 5 pontos.

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Quarta Lista de Exercícios

1. Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação

$$\frac{dy}{dt} = t - y^2.$$

Sabendo que $y(0) = 2$, aproxime $y(2)$ usando o método de Euler e $h = 0.1$.
2. Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(ty).$$

Sabendo que $y(0) = 1$, aproxime $y(\pi)$ usando o método de Euler e $h = \pi/20$.
3. Se T_c é a temperatura corporal de um paciente (em graus absolutos), um termômetro é capaz de revelar essa temperatura segundo

$$\frac{dT}{dt} = \beta(T_c - T)$$

onde $\beta = 10^{-3}/seg$ e t (medido em seg) é o tempo trancorrido na medição. Usando o método de Euler, responda: Assumindo $T(0) = 293$ (temperatura ambiente), e uma temperatura febril ($T_c = 313$), qual o tempo mínimo (em minutos) necessário para uma aferição com 95 % de exatidão ? Você pode comprovar isso usando a solução exata ?
4. Em um processo de decaimento da massa m (Kg) de uma certa amostra radioativa, a análise de dados obtidos por experimentação sugere

$$\frac{dm}{dt} = -\rho m^{2/3},$$

onde $\rho = 5 \times 10^{-2}$ e t é o tempo medido em minutos. Usando o método de Euler, responda: Se isso for verdade, em quanto tempo uma amostra de $2Kg$ é reduzida pela metade ? Você poderia validar o resultado numérico usando a solução exata ?
5. A população de uma micro-cultura de bactérias evolui conforme equação

$$\frac{dy}{dt} = \alpha\sqrt{y}\frac{L - y}{\sqrt{|L - y|}}$$

onde $\alpha = 10^{-1}$ e $L = 10^3$ são parâmetros intrinsecos desse processo, $y(0) = 10^2$, e t é o tempo em minutos. Usando o método de Euler, e $\triangle t = 0.05$, responda: Existe uma saturação para essa população ? Em quê instante 90 % dessa quantidade é alcançada ?
6. Uma bola de neve que desce pela montanha tem forma esférica e raio r, que inicialmente era de 1cm. Sendo V seu volume, e A a área de sua superfície, a bola cresce segundo

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \ln(A)$$

onde t mede o tempo em segundos. Resolva a EDO satisfeita pelo raio r usando o método de Euler, e responda: Em que instante o raio será de 2cm ? Em que instante o raio será de 4cm ? Em que instante o raio será de 6cm ?

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Quinta Lista de Exercícios

1. Encontre a solução numérica do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{0.1y}{1+t^2}, \quad t > 0 \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

no intervalo $[0, 10]$, usando $\triangle t = 0.1$ e o esquema Previsor de ordem 2 de Adams. Faça uma tabela com os valores (t_i, y_i) obtidos. Você poderia validar o resultado numérico usando a solução exata ?

2. Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos(t)y}{1+t^3}.$$

Sabendo que $y(0.5) = 1.5$, aproxime $y(4)$ usando o método Previsor-Corretor de ordem 2 de Adams e $\triangle t = 0.1$. Apresente uma tabela com os valores (t_i, y_i) calculados.

3. (Revisitando) Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação

$$\frac{dy}{dt} = t - y^2.$$

Sabendo que $y(0) = 2$, aproxime $y(2)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 2 e $\triangle t = 0.1$. Apresente uma tabela com os valores (t_i, y_i) calculados.

4. (Revisitando) Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(ty).$$

Sabendo que $y(0) = 1$, aproxime $y(\pi)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 4, e $\triangle t = \pi/20$. Apresente uma tabela com os valores (t_i, y_i) calculados.

5. O mecanismo de controle de admissão de água em um reservatório estima a quantidade de água que já existe e determa maior ou menor abertura na válvula de entrada. Sendo y o volume de água (ℓ) e t o tempo (s), sabe-se que

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 5 - \dfrac{y^2}{\gamma} \quad , t > 0 \end{cases}$$

onde $\gamma = 1.8 \cdot 10^6 \ell \cdot s$.

(a)(1.0pt) estude consistência e ordem do erro de truncamento para o esquema numérico

$$\frac{2y_{i+1} - y_i - y_{i-1}}{3\triangle t} = 5 - \frac{y_i^2}{\gamma},$$

devidamente inicializado, proposto para esse problema.

(b)(2.0pt) sabendo que inicialmente o reservatório tem 100ℓ de água, qual o limite teórico do volume acumulado ? O que ele representa em relação à EDO desse problema ? Estime, numericamente, o tempo necessário para atingir 95% dessa quantidade. Use esquema de Runge-Kutta de ordem 4, e discretização conveniente.

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Quinta Lista de Exercícios - parte 2

Em **Matlab**, **Scilab** e **Maple** existem resolvedores (solvers) para solução numérica de problemas de valor inicial $y' = f(t, y); y(t_0) = y_0$. Nosso objetivo aqui é exercitar seu uso. Mesmo sistemas de equações diferenciais poderão ser resolvidos usando tais resolvedores, como veremos mais adiante. Em *Matlab*, a função que implementa $f(t, y)$ deve estar implementada em um M-file (arquivo com extensão .m), e os principais resolvedores são **ode113**, **ode15S**, **ode23** e **ode45**. Em *Scilab*, existe um único solver **ode** que permite escolher dentre alguns métodos de solução. Em *Maple 15*, também existe um único resolvedor, **dsolve**, que também faz solução numérica. Como muitas dessas estratégias usam passo adaptativo, o parâmetro de discretização, mesmo quando fornecido implicitamente, normalmente é desconsiderado.

6. (Revisitando) Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação

$$\frac{dy}{dt} = t - y^2.$$

Sabendo que $y(0) = 2$, aproxime $y(2)$ usando **ode113** em Matlab, e $h = \triangle t = 0.1$. Dica: leia a ajuda *help ode113*; crie um arquivo f_ex56.m (para lista 5, exercício 6) :

```
function u=f_exe56(t,y)
  u = t -y*y;
return
```

e use, em *Matlab*

```
dt=0.1;
[ti,yi]=ode113('f_ex56',[0:dt:2],2);
[ti yi]
```

7. (Revisitando) Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação $\dfrac{dy}{dt} = \cos(ty)$. Sabendo que $y(0) = 1$, aproxime $y(\pi)$ usando o método **ode23** em **Matlab**, com $h = \triangle t = \pi/20$. Apresente uma tabela com os valores (t_i, y_i) calculados.

8. (Revisitando) Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos(t)y}{1 + t^3}.$$

Sabendo que $y(0.5) = 1.5$, aproxime $y(4)$ usando o solver **ode** em **Scilab** (selecione o método Previsor-Corretor de Adams) e $\triangle t = 0.1$. Apresente uma tabela com os valores (t_i, y_i) calculados.

Dica: *help ode* para ver como funciona.

```
function u=f_ex58(t,y)
 u = cos(t)*y/(1+t**3);
endfunction
dt=0.1; ti=[0.5:dt:4]';
yi=ode('adams',1.5,0.5,ti,f_ex58);
yi=yi'; [ti yi]
```

9. (Revisitando) Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação $\dfrac{dy}{dt} = \cos(ty)$. Sabendo que $y(0) = 1$, aproxime $y(\pi)$ usando o método **rk** (Runge-Kutta Adaptativo de ordem 4) do solver **ode** em **Scilab**, com $h = \triangle t = \pi/20$. Apresente uma tabela com os valores (t_i, y_i) calculados.

10. Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação diferencial $\dfrac{dy}{dt} = 1 - \dfrac{y}{t^2}$. Sabendo que $y(1) = 0.5$, aproxime $y(3)$ usando o solver **dsolve** do Maple (selecione o método Forward Euler).

Dica: busque ajuda com *? dsolve*.

```
ed510:={ diff(y(t),t)=1-y(t)/t^2, y(1)=0.5};
res510:=dsolve(ed510,numeric,method=classical[foreuler]);
res(3);
```

11. (Revisitando) Uma quantidade y evolui no tempo segundo equação $\dfrac{dy}{dt} = \cos(ty)$. Sabendo que $y(0) = 1$, aproxime $y(\pi)$ usando o método RKF45 (opção method=rkf45 para *dsolve/numeric*) em **Maple**.

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Sexta Lista de Exercícios

1. Estude consistência e ordem do erro de truncamento local para o método de Adams-Bashford correspondente a $m = 3$, seguindo a notação de aula.
2. Estude consistência e ordem do erro de truncamento local para o método de Adams-Bashford correspondente a $m = 4$, seguindo a notação de aula.
3. Em lista de exercícios anterior, você estudou consistência e ordem do erro de truncamento para o esquema numérico

$$\frac{2y_{i+1} - y_i - y_{i-1}}{3\triangle t} = 5 - \frac{y_i^2}{\gamma},$$

devidamente inicializado, proposto para o problema

$$\left\{ \frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y^2}{\gamma} \quad , t > 0 \right.$$

com γs dado. Pede-se que você faça uma análise de estabilidade linear para esse esquema. Você poderia apresentar expressão analítica ou plotagem da região de estabilidade ?
4. Um esquema bastante conhecido é dado pelo Método Theta (parâmetro $0 \leq \theta \leq 1$)

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\triangle t} = (1-\theta) f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \theta f(t_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, N-1$$

devidamente inicializado. Casos particulares são os esquemas de Euler ($\theta = 1$), trapezoidal ($\theta = 1/2$) e Euler Implícito ($\theta = 0$). É possível uma análise unificada sobre consistência e ordem do erro de truncamento ? e de estabilidade linear (regiões de estabilidade ?). Quem sabe (ao menos) para cada um dos três casos particulares acima ?
5. Estude consistência, ordem do erro de truncamento local e estabilidade linear do esquema numérico

$$\frac{y_{i+1} - 3y_i + 2y_{i-1}}{\triangle t} = \frac{13f(t_{i+1}, y_{i+1}) - 20f(t_i, y_i) - 5f(t_{i-1}, y_{i-1})}{12}$$

devidamente inicializado, proposto para $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.
6. Estude consistência, ordem do erro de truncamento, e faça análise de estabilidade linear para o esquema BDF (Backward-Difference-Formula) de ordem 2

$$\frac{3y_{i+1} - 4y_i + y_{i-1}}{\triangle t} = 2f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

devidamente inicializado, proposto para $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. É possível encontrar expressão analítica da região de estabilidade ? ou ao menos plotar ela ?
7. Completando **1.**, estude estabilidade linear do método de Adams-Bashford correspondente a $m = 3$. Região de estabilidade ?
8. Completando **2.**, estude estabilidade linear do método de Adams-Bashford correspondente a $m = 4$. Região de estabilidade ?

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Sétima Lista de Exercícios

Equações diferenciais ordinárias de ordem maior do que 1 sempre podem ser escritas como sistema de equações de ordem 1, através de mudança de variável.

Sistemas de equações diferenciais explícitas podem ser escritos como $\dot{\mathbf{y}} = F(t, \mathbf{y})$, onde t é a variável independente e $\mathbf{y}$ é o vetor de incógnitas. Esta lista de exercícios trabalha esse assunto.

1. Resolva a EDO linear

$$\begin{cases} y^{(3)} + 3y^{(2)} + y^{(1)} + 6y = cos(t), t > 0 \\ y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = -2 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 10]$, com $\triangle t = 1/10$, e via redução a sistema de EDOs de primeira ordem, e método Previsor Corretor de Ordem 2 de Adams. Plote a solução.

2. Resolva a EDO não-linear para $u = u(t)$

$$\begin{cases} u'' + e^u u' + cos(u) = 1, t > 0 \\ u(0) = 1, u'(0) = 1 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 100]$, com $\triangle t = 1/10$, e via redução a sistema de EDOs de primeira ordem, e método Previsor Corretor de Ordem 2 de Adams. Plote a solução.

3. (Oscilador de Van Der Pol) Importante aplicação tem o oscilador não-linear

$$\begin{cases} x'' - \epsilon(1 - x^2)x' + x = 0, t > 0 \\ x(0) = x_0, x'(0) = v_0 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 30]$, com $\epsilon = 1/10$, $\triangle t = 1/10$, via redução de Lienard:

$$\begin{cases} x' = \epsilon(x - x^3/3 - y) \\ y' = x/\epsilon \end{cases}$$

Plote a solução no espaço fase (x', y').

4. Considere o modelo predador-presa (de Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1(\alpha - \beta y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_2(\gamma - \delta y_1) \end{cases}$$

onde y_1 representa a população da presa (coelho), e y_2 representa a população do predador (lobo). No instante inicial, $t = 0$, considere uma interação entre 300 coelhos e 12 lobos. Para cada conjunto de parâmetros, resolva usando o método de Euler $\triangle t = 0.05$, PLOTE as populações no intervalo $t \in [0, t_{max}]$, e descreva o resultado. Normalmente, é também instrutivo plotar y_1 versus y_2.

α	β	γ	δ	t_{max}	resultado
$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	180	
$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{-7}	180	
$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-6}	180	

Map0003P - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Oitava Lista de Exercícios

1. Resolva computacionalmente o problema de difusão

$$v_t = \nu v_{xx}\ ,\ x \in (0,1)\ ,\ t > 0 \tag{1}$$
$$v(x,0) = f(x)\ ,\ x \in [0,1] \tag{2}$$
$$v(0,t) = a(t)\ ,\ v(1,t) = b(t), t \geq 0 \tag{3}$$

onde $t \leq T = 1$, $\nu = 1/6$ e $f(x) = 1 + sen(2\pi x^2)$, $a(t) = b(t) \equiv 1$ usando:
(A) $\triangle x = 1/20, \triangle t = 1/200$
(B) $\triangle x = 1/20$, e $\triangle t$ que maximiza a ordem do erro de truncamento.
usando o **esquema de Euler**. Plote sua solução computacional usando **mesh**.

2. No contexto do exercício 1, usando o **esquema Leapfrog**, use a aproximação de primeira ordem vista em aula para a correta inicialização do esquema. Use:
(A) $\triangle x = 1/10, \triangle t = 1/200$
(B) $\triangle x = 1/20, \triangle t = 1/200$
Qual a diferença (qualitativa) entre as soluções de (A) e (B) ??

3. Resolva computacionalmente o problema de difusão

$$v_t = \nu v_{xx}\ ,\ x \in (0,1)\ ,\ t > 0 \tag{4}$$
$$v(x,0) = f(x)\ ,\ x \in [0,1] \tag{5}$$
$$v(0,t) = a(t)\ ,\ v(1,t) = b(t), t \geq 0 \tag{6}$$

onde $t \leq T = 1$, $\nu = 1/6$ e $f(x) = 1 + x(1-x)$, $a(t) = b(t) = \frac{1}{1+t}$, usando:
(A) $\triangle x = 1/10, \triangle t = 1/100$
(B) $\triangle x = 1/20$, e $\triangle t$ que maximiza a ordem do erro de truncamento.
usando o **esquema de Euler**. Plote sua solução computacional usando **mesh**.

4. Considere o problema de difusão com termos de ordem mais baixa (conveccção-difusão)

$$v_t + \alpha v_x = \nu v_{xx}\ ,\ x \in (0,1)\ ,\ t > 0 \tag{7}$$
$$v(x,0) = f(x)\ ,\ x \in [0,1] \tag{8}$$
$$v(0,t) = a(t)\ ,\ v(1,t) = b(t), t \geq 0. \tag{9}$$

onde $\nu = 1.0, \alpha = 2, \triangle x = 1/20$, $f(x) = sen(4\pi x^2)$, $a \equiv 0$, e $b \equiv 0$.
(a) Apresente um esquema que use aproximação de primeira ordem para v_t e de segunda ordem para v_x e v_{xx}.
(b) Faça análise de consistência e ordem do erro de truncamento local para esse esquema.
(c) Faça análise de estabilidade de Von-Neumann para esse esquema.
(d) Encontre a solução nos instantes $t = 0.06, t = 0.1$ e $t = 0.9$ usando $\triangle t = 0.001$.

5. Usando $\triangle t$ adequado, resolva o exercício 4 (d) para $\nu = 1.0, \alpha = 2, \triangle x = 1/20$, $f(x) = 1 + sen(2\pi x^2)$, $a \equiv 1$, e $b \equiv 1$.

Map0003p - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Nona Lista de Exercícios

1.(3pt) Considere o **problema de difusão não -homogêneo**

$$v_t = \nu v_{xx} + F(x,t)\ ,\ x \in (0,1)\ ,\ t > 0 \tag{10}$$
$$v(x,0) = f(x)\ ,\ x \in [0,1] \tag{11}$$
$$v(0,t) = a(t)\ ,\ v(1,t) = b(t), t \geq 0. \tag{12}$$

Com pequenas modificações , os esquemas numéricos já estudados para o caso homogêneo podem ser usados. Por exemplo, depois de definirmos $F_k^n = F(x_k, t_n)$, o esquema FTCS fica:

$$v_k^{n+1} = v_k^n + r\delta^2(v_k^n) + \triangle t F_k^n$$

onde $r = \nu\triangle t/(\triangle x)^2$.

Encontre a solução numérica para o problema de difusão não-homogêneo, usando o método de Euler (FTCS) com escolha inteligente de parâmetros, e imprimindo a solução numérica encontrada para $t = 1$:

(A) $\triangle x = 1/30, \nu = 10, F(x,t) = e^{-t(1-x^2)}, f(x) = 0, a(t) = sen(4\pi t), b(t) = 0$

(B) $\triangle x = 1/30, \nu = 10^2, F(x,t) = \dfrac{x(1-x)}{1+t}, f(x) = sen(2\pi x), a(t) = sen(4\pi t), b(t) = 0$

(C) $\triangle x = 1/20, \nu = 10^2, F(x,t) = sen(2\pi x)sen(4\pi t), f(x) = x(1-x), a(t) = b(t) = 0$

2. (2pt) Resolva computacionalmente o problema de difusão com **condições de Neumann**

$$v_t = \nu v_{xx}\ ,\ x \in (0,1)\ ,\ t > 0 \tag{13}$$
$$v(x,0) = f(x)\ ,\ x \in [0,1] \tag{14}$$
$$v_x(0,t) = a(t)\ ,\ v_x(1,t) = b(t), t \geq 0 \tag{15}$$

onde $t \leq T = 1$, $\nu = 1/6$ e $f(x) = 1 + \text{sen}\,(\pi x^2)/(2\pi)$, $a(t) \equiv 0, b(t) \equiv -1$, aproximando

$$v_x(0,t_n) \approx \frac{v_1^n - v_0^n}{\triangle x}\ ,\ v_x(1,t_n) \approx \frac{v_K^n - v_{K-1}^n}{\triangle x}$$

e usando:

(A) $\triangle x = 1/20, \triangle t = 1/200$

(B) $\triangle x = 1/20$, e $\triangle t$ que maximiza a ordem do erro de truncamento.

usando o **esquema de Euler** (FTCS). Imprima sua solução computacional para $t = 1$.

3. (2pt) Mostre que o esquema de Crank-Nicolson (notação: $\delta^2(u_k) = u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}$)

$$v_k^{n+1} - \frac{r}{2}\delta^2\left(v_k^{n+1}\right) = v_k^n + \frac{r}{2}\delta^2\left(v_k^n\right)$$

para a equação de difusão $v_t = \nu v_{xx}$ é consistente; encontre a ordem de seu erro de truncamento. Por conveniência, defina o erro de truncamento usando um ponto $(k\triangle x, (n+1/2)\triangle t)$ ao invés de $(k\triangle x, n\triangle t)$.

4. (3pt) Considere o esquema numérico

$$v_k^{n+1} = v_k^n + r\left(-\frac{1}{6}v_{k-2}^n + \frac{5}{3}v_{k-1}^n - 3v_k^n + \frac{5}{3}v_{k+1}^n - \frac{1}{6}v_{k+2}^n\right)$$

onde $r = \nu\triangle t/(\triangle x)^2$.

(a) Mostre que este esquema produz uma aproximação consistente de $v_t = \nu v_{xx}$ de primeira ordem no tempo e segunda no espaço;

(b) Resolva o problema de difusão não-homogêneo com $\triangle x = 1/20, \nu = 10, F(x,t) = e^{-t(1-x^2)}, f(x) = 0, a(t) = sen(4\pi t), b(t) = 0$. Imprima sua solução computacional para $t = 1$.

Matp06 - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Decima Lista de Exercícios - 2012/1

Notação: Diferenças finitas na variável espacial x serão denotadas pela função $\delta(\cdot)$, da seguinte forma:

$$\delta_+(v_k^n) = v_{k+1}^n - v_k^n \ , \ \delta_-(v_k^n) = v_k^n - v_{k-1}^n$$
$$\delta^1(v_k^n) = (v_{k+1}^n - v_{k-1}^n)/2 \ , \ \delta^2(v_k^n) = v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n$$

1. Estude consistencia, ordem do erro de truncamento, e estabilidade do esquema Du Fort-Frankel

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\triangle t} = \nu \frac{u_{k+1}^n - (u_k^{n+1} + u_k^{n-1}) + u_{k-1}^n}{(\triangle x)^2} + F_k^n$$

para solução numérica de $v_t = \nu v_{xx} + F(x,t)$.

2. Resolva computacionalmente o problema de difusão com **condições de Neumann**

$$v_t = \nu v_{xx} \ , \ x \in (0,1) \ , \ t > 0 \tag{16}$$
$$v(x,0) = f(x) \ , \ x \in [0,1] \tag{17}$$
$$v_x(0,t) = a(t) \ , \ v_x(1,t) = b(t), t \geq 0 \tag{18}$$

onde $t \leq T = 1$, $\nu = 1/6$ e $f(x) = 1 + \text{sen}\,(\pi x^2)/(2\pi)$, $a(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv -1$, usando o esquema de Crank-Nicholson, e aproximando as condições de contorno segundo:

$$v_x(0,t_n) \approx \frac{-v_2^n + 4v_1^n - 3v_0^n}{2\triangle x} \ , \ v_x(1,t_n) \approx \frac{3v_K^n - 4v_{K-1}^n + v_{K-2}^n}{2\triangle x}$$

(mostre que estas têm erro de truncamento de ordem 2), para $\triangle x = 1/20$ e $\triangle t$ que julgares adequado.

3. Considere o esquema em diferenças

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R\delta^1(u_k^n) + r\delta^2(u_k^n),$$

com o objetivo de aproximar a solução da equação de difusão -convecção $v_t + av_x = \nu v_{xx}$ onde $R = a\triangle t/\triangle x$ e $r = \nu\triangle t/(\triangle x)^2$.

(a) Mostre que o símbolo $\rho(\xi)$ desse esquema numérico satisfaz
$$\rho(\xi) = (1-2r) + 2r\cos(\xi) - iR\text{sen}\,(\xi)$$
para $\xi \in [-\pi,\pi]$.

(b) Mostre que a função $|\rho(\xi)|^2$ tem possíveis máximos em $\xi = 0, \xi = \pm\pi$ ou em algum ξ_0 satisfazendo $\cos(\xi_0) = -\dfrac{2r(1-2r)}{4r^2 - R^2}$, se existir[1].

(c) Usando (b), mostre que $r \leq 1/2$ é uma condição necessária para a estabilidade do esquema numérico.

(d) Mostre que se $r \leq 1/2$ e $r \geq |R|/2$ (a parte parabólica é dominante) então o esquema é estável[2].

(e) Mostre que se $R^2/2 \leq r \leq |R|/2$ e $r \leq 1/2$ então o esquema também é estável.

(f) Mostre que se $r < R^2/2$ então o esquema numérico é instável.

4. Estude a estabilidade dos esquemas numéricos abaixo para $v_t + av_x = \nu v_{xx}$:

(a) $u_k^{n+1} + R\delta^1(u_k^{n+1}) - r\delta^2(u_k^{n+1}) = u_k^n$

(b) $u_k^{n+1} + \dfrac{R}{2}\delta^1(u_k^{n+1}) - \dfrac{r}{2}\delta^2(u_k^{n+1}) = u_k^n - \dfrac{R}{2}\delta^1(u_k^n) + \dfrac{r}{2}\delta^2(u_k^n)$

(c) $u_k^{n+1} + R\delta_+(u_k^{n+1}) - r\delta^2(u_k^{n+1}) = u_k^n$.

---

[1] tal ξ_0 existe se e somente se $|\cos(\xi_0)| \leq 1$ nessa expressão !! Equacione as duas situações e considere em (d), (e) e (f).

[2] também em (d), (e) e (f): encontre a derivada segunda de $|\rho(\cdot)|^2$ em ξ_0 e discuta seu sinal para caracterizar o ponto estacionário ξ_0.

Map003p - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Décima Primeira Lista de Exercícios

1. Discuta consistência e estabilidade para o esquema implícito de Euler

$$(1 - r_x\delta_x^2 - r_y\delta_y^2)u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n$$

proposto para a solução de $v_t = \nu(v_{xx} + v_{yy})$.

2. O esquema numérico

$$\begin{aligned}(1 - r_x\delta_x^2)u_{jk}^{n+1/2} &= u_{jk}^n \\ (1 - r_y\delta_y^2)u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^{n+1/2},\end{aligned}$$

que é chamado de **localmente unidimensional**, é proposto para a solução de $v_t = \nu(v_{xx} + v_{yy})$. Discuta consistência [3] e estabilidade para esse esquema.

3. Discuta consistência [4] e estabilidade para o esquema de Peaceman-Rachford

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{r_x\delta_x^2}{2}\right) u_{jk}^{n+1/2} &= \left(1 + \frac{r_y\delta_y^2}{2}\right) u_{jk}^n \\ \left(1 - \frac{r_y\delta_y^2}{2}\right) u_{jk}^{n+1} &= \left(1 + \frac{r_x\delta_x^2}{2}\right) u_{jk}^{n+1/2},\end{aligned}$$

para $v_t = \nu(v_{xx} + v_{yy})$.

4. Discuta consistência e estabilidade para o esquema de Douglas-Rachford

$$\begin{aligned}\left(1 - r_x\delta_x^2\right) u_{jk}^{n+1/2} &= \left(1 + r_y\delta_y^2\right) u_{jk}^n \\ \left(1 - r_y\delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^{n+1/2} - r_y\delta_y^2 u_{jk}^n\end{aligned}$$

para $v_t = \nu(v_{xx} + v_{yy})$. Sug: mostre que satisfaz $\left(1 - r_x\delta_x^2\right)\left(1 - r_y\delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1} = (1 + r_x r_y \delta_x^2\delta_y^2)u_{jk}^n$; compare com a consistência do esquema do Ex.2.

5. Discuta estabilidade para o esquema

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{r_x\delta_x^2}{2}\right) u_{jk}^* &= \left(1 + \frac{r_x\delta_x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{r_y\delta_y^2}{2}\right) u_{jk}^n \\ \left(1 - \frac{r_y\delta_y^2}{2}\right) u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^*,\end{aligned}$$

chamado **esquema de D'Yakonov**.

[3] mostre que difere do esquema implícito de Euler por um termo misto em x e y, estime a ordem desse termo e aproveite análise daquele esquema;

[4] mostre que difere do esquema de Crank-Nicholson por um termo misto em x e y, estime a ordem desse termo, e aproveite análise daquele esquema;

Map003p - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Décima Segunda Lista de Exercícios

Considere o problema-teste

$$\begin{aligned} v_t + av_x = 0, &\quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v(x,0) = f(x), &\quad 0 \leq x \leq 1 \\ v(0,t) = g(t), &\quad t \geq 0 \end{aligned}$$

onde $f(x) = 1 + \text{sen}\,(3\pi x)$, $g(t) \equiv 1$.

1. Estude consistência, ordem do erro de truncamento e estabilidade numérica para o esquema FTFS

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n)$$

proposto para $v_t + av_x = 0$, onde $R = a\triangle t/\triangle x$.

2. Estude consistência, ordem do erro de truncamento e estabilidade numérica para o esquema FTBS

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_k^n - u_{k-1}^n)$$

proposto para $v_t + av_x = 0$. Implemente esse esquema e imprima os valores de sua solução numérica para o problema-teste em $t = 2$ usando $a = 1/6$, $\triangle x = 1/20$ e $\triangle t$ adequado (indique-o).

3. Estude consistência, ordem do erro de truncamento e estabilidade numérica para o esquema FTCS

$$u_k^{n+1} = u_k^n - (R/2)(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)$$

proposto para $v_t + av_x = 0$.

4. Estude consistência, ordem do erro de truncamento e estabilidade numérica para o esquema BTFS

$$(1 - R)u_k^{n+1} + Ru_{k+1}^{n+1} = u_k^n$$

proposto para $v_t + av_x = 0$. Implemente esse esquema e imprima os valores de sua solução numérica para o problema-teste em $t = 2$ usando $a = 1/6$, $\triangle x = 1/20$ e $\triangle t$ adequado (indique-o).

5. Estude consistência, ordem do erro de truncamento e estabilidade numérica para o esquema de Crank-Nicholson

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\triangle t} + a\left(\frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{4\triangle x} + \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{4\triangle x}\right) = 0$$

proposto para $v_t + av_x = 0$. Implemente esse esquema e imprima os valores de sua solução numérica para o problema-teste em $t = 2$ usando $a = 1/6$, $\triangle x = 1/20$ e $\triangle t$ adequado (indique-o). Sugestão: complete o esquema com equação que use uma diferença atrasada ($\delta^-(v_k^n)$) no espaço, sobre a fronteira $x = 1$, isto é, sobre v_K^n.

6. Mostre que o esquema numérico

$$v_k^{n+1} = v_k^{n-1} - 2R\delta^1(v_k^n) + \frac{R}{3}\delta^2(\delta^1(v_k^n))$$

produz uma aproximação consistente de $v_t + av_x = 0$, onde $R = a\triangle t/\triangle x$; encontre a ordem desta aproximação . Implemente esse esquema e imprima os valores de sua solução numérica para o problema-teste em $t = 2$ usando $a = 1/6$, $\triangle x = 1/20$ e $\triangle t$ adequado (por tentativa). Use outros métodos para inicialização desse esquema; considere, também, a sugestão da questão 5.

Map003p - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais
Décima Terceira Lista de Exercícios

1. Resolva computacionalmente [5] o problema estático (Laplace)

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 & ,(x,y) \in [-1,1] \times [-2,2] \\ v = 1 - x^2y^2/4 & ,(x,y) \in \partial([-1,1] \times [-2,2]) \end{cases}$$

usando $-\delta_x^2(v_{jk}) - \delta_y^2(v_{jk}) = 0$ com $\triangle x = \triangle y = 1/20$. Apresente os valores da solução para $y = 0$. Plote a solução usando *mesh* ou equivalente.

2. Resolva computacionalmente o problema estático (Laplace)

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 & ,(x,y) \in [-1,1] \times [-2,2] \\ v(x,y) = 2 + \cos(\pi x) & ,|y| = 2 \\ v(x,y) = 2 + \cos(\pi y/2) & ,|x| = 1 \end{cases}$$

usando $-\delta_x^2(v_{jk}) - \delta_y^2(v_{jk}) = 0$ com $\triangle x = \triangle y = 1/20$. Apresente os valores da solução para $y = 0$. Plote a solução usando *mesh* ou equivalente.

3. (valor dobrado) Considere o problema estacionário

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 & ,(x,y) \in [0,R] \times [0,2\pi] \\ v(x,y) = 0 & ,y = 0 \text{ ou } y = 2\pi \text{ ou } x = 0 \\ v(x,y) = \pi^2 - (\pi - y)^2 & ,x = R \end{cases}$$

(a) encontre solução numérica para $R = 10$ usando $-\delta_x^2(v_{jk}) - \delta_y^2(v_{jk}) = 0$ com $\triangle x = \triangle y = 1/20$. Apresente os valores da solução para $y = \pi$. Plote a solução usando *mesh* ou equivalente.

(b) Determine a solução exata desse problema[6], avalie-a numericamente (você pode usar[7] **intg** em Scilab e **quad** em Matlab para integração numérica no cálculo dos coeficientes de Fourier) acrescentando termos (na somatória infinita) até encontrar o que represente acréscimo menor do que 1% ao valor já acumulado. Encontre o valor absoluto da maior diferença entre a solução computacional da parte (a) e a solução exata (que na verdade também é aproximada...).

4. Resolva computacionalmente o problema estático de Poisson

$$\begin{cases} \nabla^2 v = F(x,y) & ,(x,y) \in [0,1] \times [0,2\pi] \\ v \equiv 1 & ,(x,y) \in \partial([0,1] \times [0,2\pi]) \end{cases}$$

usando $\rho = (\triangle x/\triangle y)^2$

$$-\delta_x^2(v_{jk}) - \rho\delta_y^2(v_{jk}) = -(\triangle x)^2 F_{jk}$$
$$F(x,y) = \frac{1}{1 + (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \pi)^2}$$

com $\triangle x = 1/10$, $\triangle y = 1/20$. Apresente os valores da solução para $y = \pi$. Plote a solução usando *mesh* ou equivalente.

[5] $\partial(\cdot)$ denota a fronteira de um conjunto dado

[6] você pode seguir os passos em http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/LaplacesEqn.aspx, Exemplo 2

[7] descubra como trabalhar com uma função-integrando que depende de um parâmetro, no caso, a ordem do coeficiente