Map15 - Introdução à Análise Real
Primeira Lista de Exercícios Sugeridos

1. Use indução matemática para mostrar

$$(a)\ 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$
$$(b)\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Supõe que $P(n)$ denota a seguinte propriedade:

$$1+2+\ldots+n=\frac{(2n+1)^2}{8}$$

(a) Mostre que se $P(k)$ for verdadeira então $P(k+1)$ é verdadeira.
(b) Podemos então concluir que $P(n)$ é verdadeiro para todo n positivo ? Que princípio usamos ?

3. Observe que

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

e assim por diante. Estabeleça e prove a regra geral.

4. Mostre que se u é um número real satisfazendo $u^4=1$ então necessariamente $u^2=1$.

5. Dado um número real v não -negativo, denotamos $u=\sqrt{v}$ (raiz quadrada de v) como um número real não -negativo tal que $u^2=v$.
(i) Mostre que cada número real não -negativo possui uma única raiz quadrada.
(ii) Sejam a e b dois números racionais positivos. Mostre que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é racional se e somente se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais.

Dica para esta questão : $w^2-z^2=(w-z)(w+z)$.

6. Considere a associação $x\mapsto y$ tal que $y^3+y=x$. Mostre que essa associação é única (unívoca).

Map15 - Introdução à Análise Real
Segunda Lista de Exercícios Sugeridos

1. Sejam $Y \subseteq B$ e $Z \subseteq B$ e seja $f : A \to B$ uma função . Mostre que

$$Y \subseteq Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)\ .$$

2. Prove ou indique contra-exemplo
(i) $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$.
(ii) $f^{-1}(C \bigcup D) = f^{-1}(C) \bigcup f^{-1}(D)$.
(iii) $f(f^{-1}(C)) = C$.
(iv) $f^{-1}(f(A)) = A$.

3. Mostre que se $E_n \subseteq \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função real então

(i) $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f\left(E_n\right)$

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(E_n\right)$

(iii) $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f\left(E_n\right)$ se f é bijetora

4. Provar ou dar contra-exemplo:
(i) Se A e B são conjuntos fechados então $A \bigcap B$ é um conjunto fechado.
(ii) Se A e B são conjuntos fechados então $A \bigcup B$ é um conjunto fechado.
(iii) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos fechados então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ é um conjunto fechado.}$$

(iv) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos fechados então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ é um conjunto fechado.}$$

(v) Se $A_1, A_2, \ldots$ são conjuntos fechados então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ é um conjunto fechado.}$$

(vi) Se $A_1, A_2, \ldots$ são conjuntos fechados então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ é um conjunto fechado.}$$

5. Exercício #6, pág 148, *Análise I*, Djairo Figueiredo.
6. Exercício # 8 L, pág 82, *The Elements of Real Analysis*, R. Bartle. Assumir $p = 1$ (isto é, que os conjuntos estão em $\mathbb{R}$)