

Ajuste múltiplo simultâneo de autovalores de sistemas de segunda ordem

João Batista da Paz Carvalho

Depto. de Matemática Pura e Aplicada, IM, UFRGS,

91509-900, Porto Alegre, RS

E-mail: carvalho@mat.ufrgs.br

Resumo

Através da representação de um sistema vibratório usando de variáveis de estado, normalmente obtida pelo método de elementos finitos, muitas de suas frequências naturais e modos de vibração podem ser calculados. Entretanto, muito frequentemente alguns desses valores calculados (autovalores e autovetores) não predizem satisfatoriamente os valores reais dessas quantidades, que podem ser obtidos através de testes em laboratórios de vibração. Uma possível solução é o ajuste das matrizes M , D e K que representam o modelo, no caso de sistemas de vibração de segunda ordem, de tal maneira que a informação obtida no teste de vibração seja incorporada em uma nova representação mais realística (\tilde{M} , \tilde{D} , \tilde{K}). Essa estratégia é chamada *ajuste de modelo de elementos finitos* (Finite Element Model Updating).

O presente trabalho apresenta resultados recentes para um caso particular da estratégia do parágrafo anterior, quando considera-se medição e ajuste apenas de algumas frequências naturais de vibração, ou autovalores do modelo. Além disso, a implementação computacional de uma estratégia de ajuste simultâneo de um conjunto de frequências é apresentada, no contexto de modelos reais de vibração, disponíveis em [4].

Palavras-chave

ajuste, autovalores, segunda ordem, vibratórios

Introdução

No contexto de um sistema representado por

$$\begin{aligned} M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) &= Bu(t) \\ y(t) &= C_1q(t) + C_2\dot{q}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

onde

- M , D e K são as chamadas matrizes de *massa*, *amortecimento*, e *rigidez*;
- B é a chamada matriz de controle;
- C_1 e C_2 são as chamadas matrizes de realimentação;

- $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e $\ddot{q}(t)$ são chamados, respectivamente, vetores de deslocamento, velocidade e aceleração,

muito frequentemente algumas frequências naturais e modas de vibração correspondentes (autovalores e autovetores) de um modelo de elementos finitos (M, D, K) não correspondem com as informações obtidas de uma estrutura real de vibração. Então, o engenheiro de vibrações precisa ajustar o modelo teórico para garantir sua validade em usos futuros.

Resultados Básicos

Lema da Ortogonalidade: É bem conhecido que sempre podemos construir uma família ortonormal de autovetores de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Similarmente, autovetores de uma forma simétrica definida $Q(\lambda) = \lambda K - M$ (isto é, quando $M = M^T > 0$ e $K = K^T$) podem ser escritos como combinações lineares de uma família $x_i, i = 1, \dots, n$ escolhida de maneira a satisfazer

$$x_i^T M x_j = \delta_{ij}, \quad x_i^T K x_j = \delta_{ij} \lambda_i \quad (2)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, n$; aqui δ_{ij} é a delta de Kronecker. \square

O resultado seguinte, extraído de [2], nos diz como definir matrizes atualizadas \tilde{M} , \tilde{D} e \tilde{K} , tais que uma determinada frequência medida μ_1 é inserida em um novo modelo ($\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K}$), no lugar de uma frequência isolada λ_1 .

Teorema A: *Ajuste de uma autovalor real μ_1*

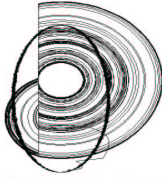
Seja (λ_1, x_1) , $\lambda_1 \neq 0$ um par real isolado autovalor-autovetor e seja (M, D, K) um modelo simétrico positivo semidefinido. Supõe que queremos substituir λ_1 por um número real μ_1 no modelo atualizado. Assumimos que μ_1 é tal que $x_1^T K x_1 - \lambda_1 \mu_1 x_1^T M x_1 \neq 0$.

Então o modelo atualizado ($\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K}$) definido por

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= M - \epsilon_1 \lambda_1 M x_1 x_1^T M \\ \tilde{D} &= D + \epsilon_1 (M x_1 x_1^T K + K x_1 x_1^T M) \\ \tilde{K} &= K - \frac{\epsilon_1}{\lambda_1} K x_1 x_1^T K \end{aligned} \quad (3)$$

onde

$$\epsilon_1 = \frac{\lambda_1 - \mu_1}{x_1^T K x_1 - \lambda_1 \mu_1 x_1^T M x_1} \quad (4)$$



é claramente simétrico e exibe as seguintes propriedades:

- (i) O número μ_1 é um autovalor de $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$ correspondente ao autovetor x_1
- (ii) se $(\lambda_k, x_k), k = 2, \dots, 2n$ são pares autovalor-autovetor de (M, D, K) e $\lambda_k \neq \lambda_1, k = 2, \dots, n$, então eles são também pares autovalor-autovetor do modelo atualizado $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$.

Demonstração :

Seja i um número inteiro satisfazendo $1 \leq i \leq 2n$. Então, uma vez que (λ_i, x_i) é um par autovalor-autovetor de $P(\lambda)$, temos

$$P(\lambda_i)x_i = \lambda_i^2 Mx_i + \lambda_i Dx_i + Kx_i = 0 \quad (5)$$

o que implica

$$P(\lambda)x_i = \lambda^2 Mx_i + \lambda Dx_i - \lambda_i^2 Mx_i - \lambda_i Dx_i = (Mx_i(\lambda + \lambda_i) + Dx_i)(\lambda - \lambda_i). \quad (6)$$

Definindo

$$\tilde{P}(\lambda) = \lambda^2 \tilde{M} + \lambda \tilde{D} + \tilde{K} \quad (7)$$

com a escolha $\nu_1 = \epsilon_1/\lambda_1$ temos, como consequência de (3),

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\lambda)x_i &= (\lambda^2 M + \lambda D + K)x_i - \lambda^2 \lambda_1^2 \nu_1 Mx_1 x_1^T Mx_i + \lambda \lambda_1 \nu_1 (Mx_1 x_1^T K + Kx_1 x_1^T M)x_i - \nu_1 Kx_1 x_1^T Kx_i = \\ &= P(\lambda)x_i - \lambda(\lambda \lambda_1^2 \nu_1 Mx_1 - \lambda_1 \nu_1 Kx_1)x_1^T Mx_i + (\lambda \lambda_1 \nu_1 Mx_1 - \nu_1 Kx_1)x_1^T Kx_i = \\ &= P(\lambda)x_i - \lambda \lambda_1 \nu_1 (\lambda \lambda_1 Mx_1 - Kx_1)x_1^T Mx_i + \nu_1 (\lambda \lambda_1 Mx_1 - Kx_1)x_1^T Kx_i = \\ &= P(\lambda)x_i + (\lambda \lambda_1 Mx_1 - Kx_1)\nu_1 [x_1^T Kx_i - \lambda \lambda_1 x_1^T Mx_i]. \end{aligned}$$

Usando (5), temos então

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\lambda)x_i &= P(\lambda)x_i + (\lambda \lambda_1 Mx_1 + \lambda_1^2 Mx_1 + \lambda_1 Dx_1)\nu_1 [x_1^T Kx_i - \lambda \lambda_1 x_1^T Mx_i] = P(\lambda)x_i + ((\lambda + \lambda_1)Mx_1 + Dx_1)\lambda_1 \nu_1 [x_1^T Kx_i - \lambda \lambda_1 x_1^T Mx_i]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\lambda)x_i &= P(\lambda)x_i + ((\lambda + \lambda_1)Mx_1 + Dx_1)\epsilon_1 [x_1^T Kx_i - \lambda \lambda_1 x_1^T Mx_i]. \end{aligned} \quad (8)$$

Encaminhamento of (i): Se fixarmos $i = 1$, então (6) e (8) implicam

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\lambda)x_1 &= ((\lambda + \lambda_1)Mx_1 + Dx_1)(\lambda - \lambda_1) + ((\lambda + \lambda_1)Mx_1 + Dx_1)\epsilon_1 (x_1^T Kx_1 - \lambda \lambda_1 x_1^T Mx_1) = \\ &= (\lambda + \lambda_1)Mx_1 + Dx_1 [(\lambda - \lambda_1) + \epsilon_1 (x_1^T Kx_1 - \lambda \lambda_1 x_1^T Mx_1)] \end{aligned}$$

e para $\lambda = \mu_1$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\mu_1)x_1 &= (\mu_1 + \lambda_1)Mx_1 + Dx_1 [(\mu_1 - \lambda_1) + \epsilon_1 (x_1^T Kx_1 - \mu_1 \lambda_1 x_1^T Mx_1)] = 0 \end{aligned}$$

uma vez que o termo em colchetes anula-se pela definição de ϵ_1 dada na equação (4).

Encaminhamento de (ii): Se $2 \leq i \leq 2n$ e $\lambda = \lambda_i$, então o termo em colchetes de (8) claramente anula-se pelas relações de ortogonalidade expressas em 2, e uma vez que $P(\lambda_i)x_i = 0$ por hipótese, a parte (ii) segue. \square

Observações :

- Lamentavelmente, mas com muito pouca probabilidade, a característica positiva semi-definida do modelo (M, D, K) pode não ser preservada pelas fórmulas (3) acima.
- Se K é simétrica positiva definida, então podemos assumir que o autovetor x_1 foi normalizado tal que $x_1^T Kx_1 = 1$. Após definirmos $\theta_1 = x_1^T Mx_1$, observamos que as fórmulas apresentadas em [2] são um caso particular de (3).

Exemplo 1: Consideramos matrizes M, D , e K :

$$M = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2. & -1. & 0. \\ -1. & 2. & -1. \\ 0. & -1. & 2. \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1. & -1. & 0. \\ -1. & 3. & 1. \\ 0. & 1. & 4. \end{bmatrix}.$$

Numericamente, calculamos $\lambda_1 = -0.6922$ e

$$x_1 = [-1. \quad -0.3078 \quad 0.1991]^T.$$

Queremos substituir λ_1 por $\mu_1 = -0.5$.

Aplicando (4), temos $\epsilon_1 = -0.5899$, e de (3) temos:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \begin{bmatrix} 0.5917 & -0.1257 & 0. \\ -0.1257 & 0.9613 & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \\ \tilde{D} &= \begin{bmatrix} 1.1833 & -0.9631 & 0.2883 \\ -0.9631 & 2.1001 & -0.9112 \\ 0.2883 & -0.9112 & 2. \end{bmatrix} \\ \tilde{K} &= \begin{bmatrix} 0.5917 & -0.8374 & 0.2883 \\ -0.8374 & 2.9352 & 0.8852 \\ 0.2883 & 0.8852 & 3.7964 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificação :

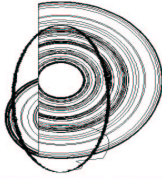
$$\|\mu_1^2 \tilde{M}x_1 + \mu_1 \tilde{D}x_1 + \tilde{K}x_1\| = 3.0657 \times 10^{-16}$$

e, sendo Λ_2 e X_2 matrizes contendo autovalores e autovetores restantes, apropriadamente, verifica-se

$$\|\tilde{M}X_2\Lambda_2^2 + \tilde{D}X_2\Lambda_2 + \tilde{K}X_2\|_F = 5.0114 \times 10^{-15}.$$

Portanto, concluímos que

- o número μ_1 foi ajustado com sucesso no novo modelo, e seu autovetor x_1 foi preservado.
- Os autovalores e autovetores remanescentes não foram alterados.



Ajuste Simultâneo de frequências de jam dadas por:

Trataremos agora o problema de ajustar, simultaneamente, um grupo de r frequências ou autovalores. Especificamente, consideraremos o seguinte problema:

Seja $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{2n}\}$ um conjunto de frequências naturais de um modelo simétrico positivo semi-definido (M, D, K) de ordem n , isto é, com n variáveis de estado, no caso onde as frequências naturais $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ e seus modos correspondentes $\{x_1, \dots, x_r\}$ são reais.

Dado um conjunto de frequências medidas $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$, queremos construir uma representação ajustada $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$ cujas frequências naturais sejam $\{\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{2n}\}$.

Primeiramente, observamos que sucessivas aplicações de (3) fornecem

$$\begin{aligned} M_s &= M_{s-1} - \epsilon_s \lambda_s M_{s-1} x_s x_s^T M_{s-1} \\ D_s &= D_{s-1} + \epsilon_s [M_{s-1} x_s x_s^T K_{s-1} + K_{s-1} x_s x_s^T M_{s-1}] \\ K_k &= K_{s-1} - \frac{\epsilon_s}{\lambda_s} K_{s-1} x_s x_s^T K_{s-1} \end{aligned} \quad (9)$$

onde as quantidades ϵ_s são dadas por

$$\epsilon_s = \frac{\lambda_s - \mu_s}{x_s^T K_{s-1} x_s - \lambda_s \mu_s \theta_s} \quad (10)$$

onde

$$\theta_s = x_s^T M_{s-1} x_s \quad (11)$$

e os vetores x_s quase sempre podem ser normalizados de forma que $|x_s^T K_{s-1} x_s| = 1$.

Na equação (9) acima, $M_0 = M, D_0 = D, K_0 = K$, e $M_r = \tilde{M}, D_r = \tilde{D}, K_r = \tilde{K}$ são as matrizes finais do ajuste.

Essas fórmulas podem ser usadas para sucessivamente ajustarmos frequências uma-a-uma, lembrando que as matrizes que representam o modelo devem ser atualizadas em cada ajuste.

A estratégia proposta é, observando que as quantidades escalares θ_s e ϵ_s , $s = 1, 2, \dots, r$, podem ser calculadas recursivamente usando apenas outras quantidades escalares, esperar que todos os parâmetros esses parâmetros sejam calculados para então realizar um único ajuste múltiplo, mais precisamente, através de uma matriz de posto r (*rank-r update*). Essa estratégia traz computação matricial densa (em blocos) ao problema, e assim procedimentos computacionais de alta-performance, implementados nas rotinas de nível 3 da biblioteca BLAS, podem ser usados em sua solução.

Almejamos então calcular matrizes W e Z , juntamente com matrizes diagonais E_m, E_d , e E_k , tais que as matrizes do modelo simétrico $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$, se-

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= M - W E_m W^T \\ \tilde{D} &= D + Z E_d W^T + W E_d Z^T \\ \tilde{K} &= K - Z E_k Z^T \end{aligned} \quad (12)$$

Para obtermos a relação (12), observamos que, usando (9), escrevemos

$$\tilde{M} = M_0 - \sum_{k=1}^r \epsilon_k \lambda_k M_{k-1} x_k x_k^T M_{k-1} \quad (13)$$

que claramente pode ser escrita no formato da equação (12), desde que

$$W = [M_0 x_1 \quad M_1 x_2 \quad \dots \quad M_r x_r] \quad (14)$$

e $E_m = \text{diag}(\epsilon_1 \lambda_1 \quad \dots \quad \epsilon_r \lambda_r)$.

Também observamos que, para $s = 1, \dots, r$,

$$\begin{aligned} \theta_s &= x_s^T [M_{s-2} - \epsilon_{s-1} \lambda_{s-1} M_{s-2} x_{s-1} x_{s-1}^T M_{s-2}] x_s \\ &= x_s^T M_{s-2} x_s - \epsilon_{s-1} \lambda_{s-1} (x_s^T M_{s-2} x_{s-1}) (x_{s-1}^T M_{s-2} x_s) \end{aligned} \quad (15)$$

e

$$\begin{aligned} M_{s-1} x_s &= [M_{s-2} - \epsilon_{s-1} \lambda_{s-1} M_{s-2} x_{s-1} x_{s-1}^T M_{s-2}] x_s = \\ &= M_{s-2} x_s - \epsilon_{s-1} \lambda_{s-1} (x_{s-1} M_{s-2} x_s) M_{s-2} x_{s-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

A última equação acima permite um cálculo recursivo das colunas da matriz W . Equação (15) permite um cálculo recursivo dos parâmetros reais θ_s e ϵ_s . Similarmente, as expressões para \tilde{D} e \tilde{K} podem ser obtidas através de matrizes Z, E_k , e E_d apropriadamente definidas.

Algoritmo : ajuste simultâneo

Entrada: conjunto de números reais (autovalores medidos) $\{\mu_i\}, i = 1, \dots, r$; conjunto de frequências reais medidas $\{\lambda_i\}, i = 1, \dots, r$ com correspondentes modos $\{x_i\}, i = 1, \dots, r$; matrizes simétricas M, D , e K tais que $M, K \geq 0$.

Saída: Matrizes \tilde{M}, \tilde{D} , and \tilde{K} tais que o modelo $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$ tem autovalores $\{\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{2n}\}$.

Passo 1: Calcule $m_i = M x_i, k_i = K x_i, i = 1, \dots, r$.

Passo 2: Calcule $\alpha_{ij} = x_i^T m_j, \beta_{ij} = x_i^T k_j, j = i, \dots, r; i = 1, \dots, r$.

Step 3: Calcule $\eta_1 = \sqrt{|x_1^T K x_1|}$ e faça as atualizações

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &\leftarrow \alpha_{11}/\eta_1, \beta_{11} \leftarrow \beta_{11}/\eta_1 \\ \alpha_{1j} &\leftarrow \alpha_{1j}/\eta_1, \beta_{1j} \leftarrow \beta_{1j}/\eta_1, j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

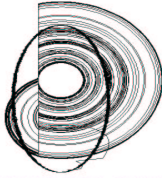
Passo 4: Calcule $\epsilon_1 = \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\beta_{11} - \lambda_1 \mu_1 \alpha_{11}}$.

Passo 5: Para $s = 2, \dots, r$, faça passos 6, 7, 8, e 9

Passo 6: Para $i = s, \dots, r$ and $j = i, \dots, r$ faça:

$$\text{Faça } \alpha_{ij} \leftarrow \alpha_{ij} - \epsilon_{s-1} \lambda_{s-1} \alpha_{s-1,i} \alpha_{s-1,j}$$

$$\text{Faça } \beta_{ij} \leftarrow \beta_{ij} - \frac{\epsilon_{s-1}}{\lambda_{s-1}} \beta_{s-1,i} \beta_{s-1,j}$$



Passo 7: Calcule $\eta_s = \sqrt{|\beta_{ss}|}$.

Passo 8: Se $\eta_s > 0$, então

faça $\alpha_{i,s} \leftarrow \alpha_{i,s}/\eta_s$ e $\beta_{i,s} \leftarrow \beta_{i,s}/\eta_s$, $i = 1, \dots, s$.

faça $\alpha_{s,j} \leftarrow \alpha_{s,j}/\eta_s$ e $\beta_{s,j} \leftarrow \alpha_{s,j}/\eta_s$, $j = s, \dots, r$.

Passo 9: Calcule $\epsilon_s = \frac{\lambda_s - \mu_s}{\beta_{ss} - \lambda_s \mu_s \alpha_{ss}}$.

Passo 10: Faça $m_i \leftarrow m_i/\eta_i$, $k_i \leftarrow k_i/\eta_i$, $i = 1, \dots, r$.

Passo 11: Para $s = 2, \dots, r$ and $i = s, \dots, r$:

Faça $m_i \leftarrow m_i - \epsilon_{s-1} \lambda_{s-1} \alpha_{s-1,i} m_{s-1}$

Faça $k_i \leftarrow k_i - \frac{\epsilon_{s-1}}{\lambda_{s-1}} \beta_{s-1,i} k_{s-1}$.

Passo 12: Construa as matrizes $W = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_r \end{bmatrix}$ e $Z = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{bmatrix}$.

Passo 13: Construa as matrizes diagonais

$$\begin{aligned} E_m &= \text{diag}(\epsilon_1 \lambda_1 \quad \epsilon_2 \lambda_2 \quad \dots \quad \epsilon_r \lambda_r) \\ E_d &= \text{diag}(\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \dots \quad \epsilon_r) \\ E_k &= \text{diag}(\epsilon_1/\lambda_1 \quad \epsilon_2/\lambda_2 \quad \dots \quad \epsilon_r/\lambda_r). \end{aligned}$$

Passo 13: Calcule \tilde{M} , \tilde{D} , e \tilde{K} usando (12) (rotinas de alta-performance).

$$\begin{aligned} E_m &= \text{diag} (0.6697 \quad -0.9138 \quad 3.6368 \quad -2.4231 \\ &\quad 2.6340 \quad -2.6111 \quad 17.3927 \quad -197.1462) \\ E_d &= \text{diag} (-0.1934 \quad 0.2559 \quad -0.6787 \quad 0.2612 \\ &\quad -0.1996 \quad 0.1942 \quad -0.6312 \quad 4.4299) \\ E_k &= \text{diag} (0.0558 \quad -0.0717 \quad 0.1267 \quad -0.0282 \\ &\quad 0.0151 \quad -0.0144 \quad 0.0229 \quad -0.0995). \end{aligned}$$

As matrizes W e Z são mostradas, por razões de limitação de espaço, no Apêndice 2.

As matrizes \tilde{M} , \tilde{D} , e \tilde{K} são então calculadas, usando as fórmulas apresentadas anteriormente. Além disso, a matriz X é decomposta em duas partes para fins de impressão:

$$X = \begin{bmatrix} X_e & X_d \end{bmatrix}$$

onde X_e e X_d são mostradas no Apêndice 1.

Verificação: Matrizes diagonais Λ , $\tilde{\Lambda}$, são montadas usando $\lambda_1, \dots, \lambda_8$; μ_1, \dots, μ_8 , respectivamente, bem como, em ambos os casos, usando info sobre os demais autovalores. Temos então

$$\|\tilde{M}X\tilde{\Lambda}^2 + \tilde{D}X\tilde{\Lambda} + \tilde{K}X\|_F = 1.7709 \times 10^{-7}$$

que nos mostra que o ajuste múltiplo foi bem-sucedido e não alterou os demais pares autovalor-autovetor (em outras palavras, não ocorreu *spill-over*).

Figuras 1, 2 e 3 mostram os gráficos de barra das magnitudes das componentes das matrizes $M - \tilde{M}$, $D - \tilde{D}$, e $K - \tilde{K}$, respectivamente. Essas gráficos nos dão uma idéia sobre as áreas (nas matrizes) que sofreram maiores atualizações.

De posse de plotagens desse tipo, conjectura-se que um engenheiro com bom conhecimento do modelo possa identificar áreas da planta (componentes do modelo) que poderiam ser melhor modeladas de forma que a representação matricial concordasse com a estrutura real de vibrações. Tal estratégia ainda não foi estudada.

Exemplo Numérico

Considere o modelo artificialmente amortecido (M, D, K) onde

- as matrizes $M \in \mathbb{R}^{66 \times 66}$ e $K \in \mathbb{R}^{66 \times 66}$ são originárias de um modelo estaticamente condensado de uma plataforma de petróleo, do conjunto *BCSSTRC1* do diretório *Harwell-Boeing* [4]. A matriz M é simétrica positiva definida, ao passo que K é simétrica positiva semidefinida.
- A matriz de amortecimento D é definida por $D = \rho I_{66}$, onde $\rho = 1.55$.

Este modelo possui oito autovalores reais $\{\lambda_1, \dots, \lambda_8\}$, onde

$$\begin{aligned} \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \} &= \\ \{ -3.4628 \quad -3.5709 \quad -5.3584 \quad -9.2761 \} & \\ \{ \lambda_5 \quad \lambda_6 \quad \lambda_7 \quad \lambda_8 \} &= \\ \{ -13.1972 \quad -13.4480 \quad -27.5536 \quad -44.5031 \} & \end{aligned}$$

além de 62 pares autovalores complexos conjugados, não mostrados aqui por limitação de espaço.

O conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_8\}$ é mudada para $\{\mu_1, \dots, \mu_8\}$, onde

$$\begin{aligned} \{ \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4 \} &= \\ \{ -3.32 \quad -3.75 \quad -5.05 \quad -9.07 \} & \\ \{ \mu_5 \quad \mu_6 \quad \mu_7 \quad \mu_8 \} &= \\ \{ -13.59 \quad -13.04 \quad -27.31 \quad -42.11 \}. & \end{aligned}$$

O algoritmo anterior é aplicado; ele produz matrizes E_m , E_d , and E_k como a seguir:

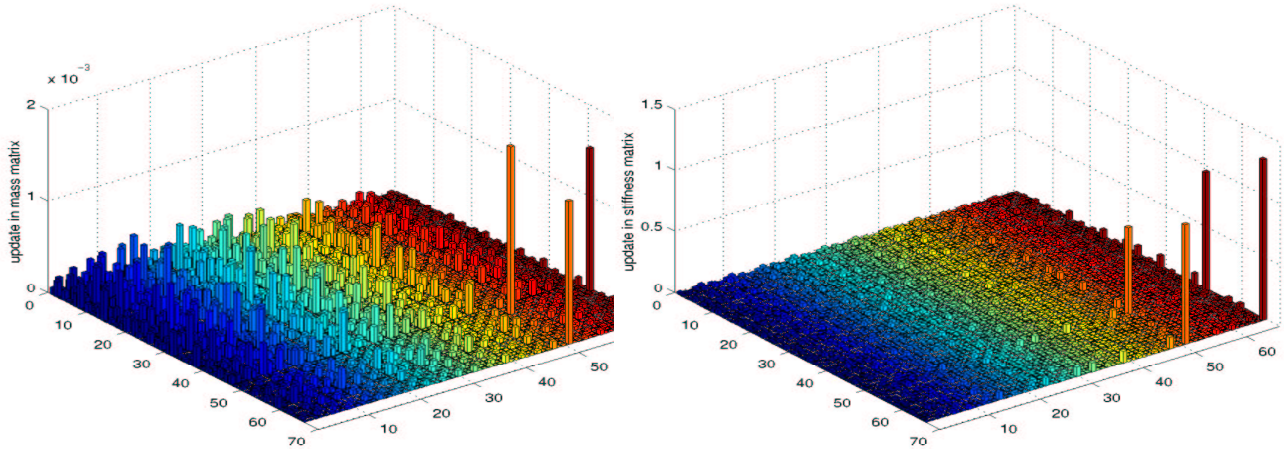
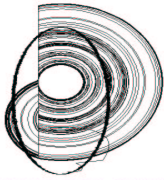


Figura 1: Magnitudes das Componentes de $M - \tilde{M}$. Figura 3: Magnitudes das Componentes de $K - \tilde{K}$.

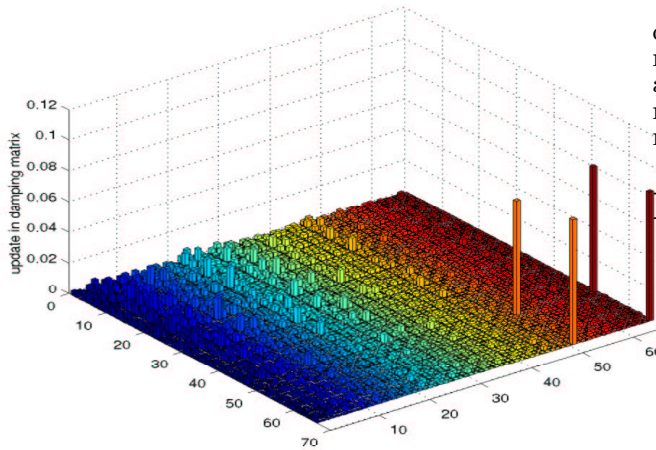


Figura 2: Magnitudes das Componentes de $D - \tilde{D}$.

Conclusão

Um algoritmo para ajuste simultâneo de autovalores (frequências naturais) de sistemas matriciais de segunda ordem foi apresentado. Tal algoritmo usa fórmulas de ajuste apresentadas em publicação anterior do autor.

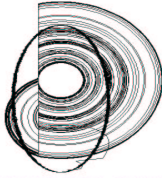
O algoritmo proposto permite trazer computação de alta-performance ao problema de ajuste de autovalores, uma vez que combina tarefas de m ajustes sequenciais, em um único ajuste das matrizes. Computação matricial de blocos podem então ser feita, por intermédio da biblioteca BLAS.

A estratégia apresentada foi aplicada com sucesso ao problema de ajuste de frequências em uma estrutura real conhecida (modelo de uma plataforma de petróleo encontrado em conhecido repositório da internet) para a qual foi criado um amortecimento fictício (hipotético), a fim de estabelecer um modelo

com frequências reais a serem atualizadas. Enfatizamos que a técnica apresentada garantidamente não altera as demais frequências e modos de vibração do modelo sendo atualizado, conforme pôde ser confirmada no exemplo numérico apresentado.

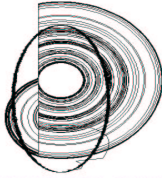
Referências

- [1] J. Carvalho, State Estimation and Finite Element Model Updating for Vibrating Systems. *em Ph.D. Diss.*, Northern Ill. Univ., Dec 2002.
- [2] J. Carvalho, B. Datta, W. Lin and C. Wang, Eigenvalue Embedding in a Quadratic Pencil Using Symmetric Low Rank Updates. *Proc. Fourth SIAM Conference on Linear Algebra in Signals, Systems and Control*, Boston, USA, Aug 13-17, 2001.
- [3] E. Anderson et al. *LAPACK User's Guide*, Third Edition. SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- [4] The Matrix Market Directory. Repositório e referência em math.nist.gov/MatrixMarket.



Apêndice 1

$X_e =$	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>-0.9890</td><td>-0.9893</td><td>-0.9897</td><td>-0.9902</td></tr> <tr><td>-0.9890</td><td>0.9893</td><td>0.9897</td><td>0.9902</td></tr> <tr><td>0.1665</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>-1.</td><td>-1.</td><td>-1.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>1.</td><td>-1.</td><td>-1.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.1688</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>-1.</td><td>1.</td><td>1.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>1.</td><td>1.</td><td>1.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.1688</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9890</td><td>-0.9893</td><td>0.9897</td><td>0.9902</td></tr> <tr><td>-0.9890</td><td>0.9893</td><td>-0.9897</td><td>-0.9902</td></tr> <tr><td>-0.1665</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>-0.9246</td><td>-0.9045</td><td>-0.9055</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>0.9246</td><td>0.9045</td><td>0.9055</td></tr> <tr><td>0.1278</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>-0.9309</td><td>-0.9113</td><td>-0.9130</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>0.9309</td><td>-0.9113</td><td>-0.9130</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.1376</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>-0.9309</td><td>0.9113</td><td>0.9130</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>0.9309</td><td>0.9113</td><td>0.9130</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.1376</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>-0.9246</td><td>0.9045</td><td>0.9055</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>0.9246</td><td>-0.9045</td><td>-0.9055</td></tr> <tr><td>-0.1278</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>-0.8571</td><td>-0.7931</td><td>-0.7991</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>0.8571</td><td>0.7931</td><td>0.7991</td></tr> <tr><td>0.1016</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>-0.8549</td><td>-0.7897</td><td>-0.7939</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>0.8549</td><td>-0.7897</td><td>-0.7939</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.1043</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>-0.8549</td><td>0.7897</td><td>0.7939</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>0.8549</td><td>0.7897</td><td>0.7939</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.1043</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>-0.8571</td><td>0.7931</td><td>0.7991</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>0.8571</td><td>-0.7931</td><td>-0.7991</td></tr> <tr><td>-0.1016</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>-0.7817</td><td>-0.6696</td><td>-0.6768</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>0.7817</td><td>0.6696</td><td>0.6768</td></tr> <tr><td>0.0773</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>-0.7862</td><td>-0.6731</td><td>-0.6818</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>0.7862</td><td>-0.6731</td><td>-0.6818</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.0863</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>-0.7862</td><td>0.6731</td><td>0.6818</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>0.7862</td><td>0.6731</td><td>0.6818</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.0863</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>-0.7817</td><td>0.6696</td><td>0.6768</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>0.7817</td><td>-0.6696</td><td>-0.6768</td></tr> <tr><td>-0.0773</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8066</td><td>-0.7873</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8066</td><td>0.7873</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>-0.7108</td><td>-0.5449</td><td>-0.5556</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>0.7108</td><td>0.5449</td><td>0.5556</td></tr> <tr><td>0.0642</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>-0.7084</td><td>-0.5423</td><td>-0.5513</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>0.7084</td><td>-0.5423</td><td>-0.5513</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.0663</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>-0.7084</td><td>0.5423</td><td>0.5513</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>0.7084</td><td>0.5423</td><td>0.5513</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.0663</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>-0.7108</td><td>0.5449</td><td>0.5556</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>0.7108</td><td>-0.5449</td><td>-0.5556</td></tr> <tr><td>-0.0642</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7406</td><td>-0.7093</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7406</td><td>0.7093</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> </table>	-0.9890	-0.9893	-0.9897	-0.9902	-0.9890	0.9893	0.9897	0.9902	0.1665	0.	0.	0.	-1.	-1.	-1.	-1.	-1.	1.	-1.	-1.	0.	-0.1688	0.	0.	-1.	-1.	1.	1.	-1.	1.	1.	1.	0.	0.1688	0.	0.	-0.9890	-0.9893	0.9897	0.9902	-0.9890	0.9893	-0.9897	-0.9902	-0.1665	0.	0.	0.	-0.9427	-0.9246	-0.9045	-0.9055	-0.9427	0.9246	0.9045	0.9055	0.1278	0.	0.	0.	-0.9488	-0.9309	-0.9113	-0.9130	-0.9488	0.9309	-0.9113	-0.9130	0.	-0.1376	0.	0.	-0.9488	-0.9309	0.9113	0.9130	-0.9488	0.9309	0.9113	0.9130	0.	0.1376	0.	0.	-0.9427	-0.9246	0.9045	0.9055	-0.9427	0.9246	-0.9045	-0.9055	-0.1278	0.	0.	0.	-0.8692	-0.8571	-0.7931	-0.7991	-0.8692	0.8571	0.7931	0.7991	0.1016	0.	0.	0.	-0.8666	-0.8549	-0.7897	-0.7939	-0.8666	0.8549	-0.7897	-0.7939	0.	-0.1043	0.	0.	-0.8666	-0.8549	0.7897	0.7939	-0.8666	0.8549	0.7897	0.7939	0.	0.1043	0.	0.	-0.8692	-0.8571	0.7931	0.7991	-0.8692	0.8571	-0.7931	-0.7991	-0.1016	0.	0.	0.	-0.8056	-0.7817	-0.6696	-0.6768	-0.8056	0.7817	0.6696	0.6768	0.0773	0.	0.	0.	-0.8085	-0.7862	-0.6731	-0.6818	-0.8085	0.7862	-0.6731	-0.6818	0.	-0.0863	0.	0.	-0.8085	-0.7862	0.6731	0.6818	-0.8085	0.7862	0.6731	0.6818	0.	0.0863	0.	0.	-0.8056	-0.7817	0.6696	0.6768	-0.8056	0.7817	-0.6696	-0.6768	-0.0773	0.	0.	0.	-0.8066	-0.7873	0.	0.	-0.8066	0.7873	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-0.7398	-0.7108	-0.5449	-0.5556	-0.7398	0.7108	0.5449	0.5556	0.0642	0.	0.	0.	-0.7361	-0.7084	-0.5423	-0.5513	-0.7361	0.7084	-0.5423	-0.5513	0.	-0.0663	0.	0.	-0.7361	-0.7084	0.5423	0.5513	-0.7361	0.7084	0.5423	0.5513	0.	0.0663	0.	0.	-0.7398	-0.7108	0.5449	0.5556	-0.7398	0.7108	-0.5449	-0.5556	-0.0642	0.	0.	0.	-0.7406	-0.7093	0.	0.	-0.7406	0.7093	0.	0.	0.	0.	0.	0.	$X_d =$	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>-0.9890</td><td>-0.9893</td><td>-0.9897</td><td>-0.9902</td></tr> <tr><td>-0.9890</td><td>0.9893</td><td>0.9897</td><td>0.9902</td></tr> <tr><td>0.1665</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>-1.</td><td>-1.</td><td>-1.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>1.</td><td>-1.</td><td>-1.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.1688</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>-1.</td><td>1.</td><td>1.</td></tr> <tr><td>-1.</td><td>1.</td><td>1.</td><td>1.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.1688</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9890</td><td>-0.9893</td><td>0.9897</td><td>0.9902</td></tr> <tr><td>-0.9890</td><td>0.9893</td><td>-0.9897</td><td>-0.9902</td></tr> <tr><td>-0.1665</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>-0.9246</td><td>-0.9045</td><td>-0.9055</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>0.9246</td><td>0.9045</td><td>0.9055</td></tr> <tr><td>0.1278</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>-0.9309</td><td>-0.9113</td><td>-0.9130</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>0.9309</td><td>-0.9113</td><td>-0.9130</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.1376</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>-0.9309</td><td>0.9113</td><td>0.9130</td></tr> <tr><td>-0.9488</td><td>0.9309</td><td>0.9113</td><td>0.9130</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.1376</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>-0.9246</td><td>0.9045</td><td>0.9055</td></tr> <tr><td>-0.9427</td><td>0.9246</td><td>-0.9045</td><td>-0.9055</td></tr> <tr><td>-0.1278</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>-0.8571</td><td>-0.7931</td><td>-0.7991</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>0.8571</td><td>0.7931</td><td>0.7991</td></tr> <tr><td>0.1016</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>-0.8549</td><td>-0.7897</td><td>-0.7939</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>0.8549</td><td>-0.7897</td><td>-0.7939</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.1043</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>-0.8549</td><td>0.7897</td><td>0.7939</td></tr> <tr><td>-0.8666</td><td>0.8549</td><td>0.7897</td><td>0.7939</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.1043</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>-0.8571</td><td>0.7931</td><td>0.7991</td></tr> <tr><td>-0.8692</td><td>0.8571</td><td>-0.7931</td><td>-0.7991</td></tr> <tr><td>-0.1016</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>-0.7817</td><td>-0.6696</td><td>-0.6768</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>0.7817</td><td>0.6696</td><td>0.6768</td></tr> <tr><td>0.0773</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>-0.7862</td><td>-0.6731</td><td>-0.6818</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>0.7862</td><td>-0.6731</td><td>-0.6818</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.0863</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>-0.7862</td><td>0.6731</td><td>0.6818</td></tr> <tr><td>-0.8085</td><td>0.7862</td><td>0.6731</td><td>0.6818</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.0863</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>-0.7817</td><td>0.6696</td><td>0.6768</td></tr> <tr><td>-0.8056</td><td>0.7817</td><td>-0.6696</td><td>-0.6768</td></tr> <tr><td>-0.0773</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8066</td><td>-0.7873</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.8066</td><td>0.7873</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>-0.7108</td><td>-0.5449</td><td>-0.5556</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>0.7108</td><td>0.5449</td><td>0.5556</td></tr> <tr><td>0.0642</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>-0.7084</td><td>-0.5423</td><td>-0.5513</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>0.7084</td><td>-0.5423</td><td>-0.5513</td></tr> <tr><td>0.</td><td>-0.0663</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>-0.7084</td><td>0.5423</td><td>0.5513</td></tr> <tr><td>-0.7361</td><td>0.7084</td><td>0.5423</td><td>0.5513</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.0663</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>-0.7108</td><td>0.5449</td><td>0.5556</td></tr> <tr><td>-0.7398</td><td>0.7108</td><td>-0.5449</td><td>-0.5556</td></tr> <tr><td>-0.0642</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7406</td><td>-0.7093</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>-0.7406</td><td>0.7093</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> <tr><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td><td>0.</td></tr> </table>	-0.9890	-0.9893	-0.9897	-0.9902	-0.9890	0.9893	0.9897	0.9902	0.1665	0.	0.	0.	-1.	-1.	-1.	-1.	-1.	1.	-1.	-1.	0.	-0.1688	0.	0.	-1.	-1.	1.	1.	-1.	1.	1.	1.	0.	0.1688	0.	0.	-0.9890	-0.9893	0.9897	0.9902	-0.9890	0.9893	-0.9897	-0.9902	-0.1665	0.	0.	0.	-0.9427	-0.9246	-0.9045	-0.9055	-0.9427	0.9246	0.9045	0.9055	0.1278	0.	0.	0.	-0.9488	-0.9309	-0.9113	-0.9130	-0.9488	0.9309	-0.9113	-0.9130	0.	-0.1376	0.	0.	-0.9488	-0.9309	0.9113	0.9130	-0.9488	0.9309	0.9113	0.9130	0.	0.1376	0.	0.	-0.9427	-0.9246	0.9045	0.9055	-0.9427	0.9246	-0.9045	-0.9055	-0.1278	0.	0.	0.	-0.8692	-0.8571	-0.7931	-0.7991	-0.8692	0.8571	0.7931	0.7991	0.1016	0.	0.	0.	-0.8666	-0.8549	-0.7897	-0.7939	-0.8666	0.8549	-0.7897	-0.7939	0.	-0.1043	0.	0.	-0.8666	-0.8549	0.7897	0.7939	-0.8666	0.8549	0.7897	0.7939	0.	0.1043	0.	0.	-0.8692	-0.8571	0.7931	0.7991	-0.8692	0.8571	-0.7931	-0.7991	-0.1016	0.	0.	0.	-0.8056	-0.7817	-0.6696	-0.6768	-0.8056	0.7817	0.6696	0.6768	0.0773	0.	0.	0.	-0.8085	-0.7862	-0.6731	-0.6818	-0.8085	0.7862	-0.6731	-0.6818	0.	-0.0863	0.	0.	-0.8085	-0.7862	0.6731	0.6818	-0.8085	0.7862	0.6731	0.6818	0.	0.0863	0.	0.	-0.8056	-0.7817	0.6696	0.6768	-0.8056	0.7817	-0.6696	-0.6768	-0.0773	0.	0.	0.	-0.8066	-0.7873	0.	0.	-0.8066	0.7873	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-0.7398	-0.7108	-0.5449	-0.5556	-0.7398	0.7108	0.5449	0.5556	0.0642	0.	0.	0.	-0.7361	-0.7084	-0.5423	-0.5513	-0.7361	0.7084	-0.5423	-0.5513	0.	-0.0663	0.	0.	-0.7361	-0.7084	0.5423	0.5513	-0.7361	0.7084	0.5423	0.5513	0.	0.0663	0.	0.	-0.7398	-0.7108	0.5449	0.5556	-0.7398	0.7108	-0.5449	-0.5556	-0.0642	0.	0.	0.	-0.7406	-0.7093	0.	0.	-0.7406	0.7093	0.	0.	0.	0.	0.	0.
-0.9890	-0.9893	-0.9897	-0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9890	0.9893	0.9897	0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.1665	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	-1.	-1.	-1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	1.	-1.	-1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.1688	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	-1.	1.	1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	1.	1.	1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.1688	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9890	-0.9893	0.9897	0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9890	0.9893	-0.9897	-0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.1665	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	-0.9246	-0.9045	-0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	0.9246	0.9045	0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.1278	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	-0.9309	-0.9113	-0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	0.9309	-0.9113	-0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.1376	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	-0.9309	0.9113	0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	0.9309	0.9113	0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.1376	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	-0.9246	0.9045	0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	0.9246	-0.9045	-0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.1278	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	-0.8571	-0.7931	-0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	0.8571	0.7931	0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.1016	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	-0.8549	-0.7897	-0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	0.8549	-0.7897	-0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.1043	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	-0.8549	0.7897	0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	0.8549	0.7897	0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.1043	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	-0.8571	0.7931	0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	0.8571	-0.7931	-0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.1016	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	-0.7817	-0.6696	-0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	0.7817	0.6696	0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.0773	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	-0.7862	-0.6731	-0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	0.7862	-0.6731	-0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.0863	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	-0.7862	0.6731	0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	0.7862	0.6731	0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.0863	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	-0.7817	0.6696	0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	0.7817	-0.6696	-0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.0773	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8066	-0.7873	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8066	0.7873	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	-0.7108	-0.5449	-0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	0.7108	0.5449	0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.0642	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	-0.7084	-0.5423	-0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	0.7084	-0.5423	-0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.0663	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	-0.7084	0.5423	0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	0.7084	0.5423	0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.0663	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	-0.7108	0.5449	0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	0.7108	-0.5449	-0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.0642	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7406	-0.7093	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7406	0.7093	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9890	-0.9893	-0.9897	-0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9890	0.9893	0.9897	0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.1665	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	-1.	-1.	-1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	1.	-1.	-1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.1688	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	-1.	1.	1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-1.	1.	1.	1.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.1688	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9890	-0.9893	0.9897	0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9890	0.9893	-0.9897	-0.9902																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.1665	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	-0.9246	-0.9045	-0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	0.9246	0.9045	0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.1278	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	-0.9309	-0.9113	-0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	0.9309	-0.9113	-0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.1376	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	-0.9309	0.9113	0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9488	0.9309	0.9113	0.9130																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.1376	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	-0.9246	0.9045	0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.9427	0.9246	-0.9045	-0.9055																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.1278	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	-0.8571	-0.7931	-0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	0.8571	0.7931	0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.1016	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	-0.8549	-0.7897	-0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	0.8549	-0.7897	-0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.1043	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	-0.8549	0.7897	0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8666	0.8549	0.7897	0.7939																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.1043	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	-0.8571	0.7931	0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8692	0.8571	-0.7931	-0.7991																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.1016	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	-0.7817	-0.6696	-0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	0.7817	0.6696	0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.0773	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	-0.7862	-0.6731	-0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	0.7862	-0.6731	-0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.0863	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	-0.7862	0.6731	0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8085	0.7862	0.6731	0.6818																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.0863	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	-0.7817	0.6696	0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8056	0.7817	-0.6696	-0.6768																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.0773	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8066	-0.7873	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.8066	0.7873	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	-0.7108	-0.5449	-0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	0.7108	0.5449	0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.0642	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	-0.7084	-0.5423	-0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	0.7084	-0.5423	-0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	-0.0663	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	-0.7084	0.5423	0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7361	0.7084	0.5423	0.5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.0663	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	-0.7108	0.5449	0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7398	0.7108	-0.5449	-0.5556																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.0642	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7406	-0.7093	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
-0.7406	0.7093	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0.	0.	0.	0.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																



Apêndice 2

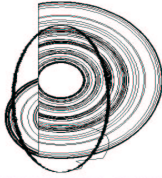
Para mais clara impressão , matriz W é decomposta em duas partes:

$$W = [W_e \quad W_d]$$

onde

$$10^{-1} \begin{bmatrix} W_e = \\ -0.0770 & -0.0777 & -0.0787 & -0.0776 \\ -0.0770 & 0.0777 & 0.0787 & 0.0776 \\ 0.0130 & 0. & 0. & 0. \\ -0.1166 & -0.1176 & -0.1192 & -0.1173 \\ -0.1166 & 0.1176 & -0.1192 & -0.1173 \\ 0. & -0.0199 & 0. & 0. \\ -0.1166 & -0.1176 & 0.1192 & 0.1173 \\ -0.1166 & 0.1176 & 0.1192 & 0.1173 \\ 0. & 0.0199 & 0. & 0. \\ -0.0770 & -0.0777 & 0.0787 & 0.0776 \\ -0.0770 & 0.0777 & -0.0787 & -0.0776 \\ -0.0130 & 0. & 0. & 0. \\ -0.1377 & -0.1362 & -0.1350 & -0.1331 \\ -0.1377 & 0.1362 & 0.1350 & 0.1331 \\ 0.0187 & 0. & 0. & 0. \\ -0.0684 & -0.0676 & -0.0671 & -0.0662 \\ -0.0684 & 0.0676 & -0.0671 & -0.0662 \\ 0. & -0.0100 & 0. & 0. \\ -0.0684 & -0.0676 & 0.0671 & 0.0662 \\ -0.0684 & 0.0676 & 0.0671 & 0.0662 \\ 0. & 0.0100 & 0. & 0. \\ -0.1377 & -0.1362 & 0.1350 & 0.1331 \\ -0.1377 & 0.1362 & -0.1350 & -0.1331 \\ -0.0187 & 0. & 0. & 0. \\ -0.0454 & -0.0451 & -0.0423 & -0.0420 \\ -0.0454 & 0.0451 & 0.0423 & 0.0420 \\ 0.0053 & 0. & 0. & 0. \\ -0.1035 & -0.1029 & -0.0964 & -0.0954 \\ -0.1035 & 0.1029 & -0.0964 & -0.0954 \\ 0. & -0.0126 & 0. & 0. \\ -0.1035 & -0.1029 & 0.0964 & 0.0954 \\ -0.1035 & 0.1029 & 0.0964 & 0.0954 \\ 0. & 0.0126 & 0. & 0. \\ -0.0454 & -0.0451 & 0.0423 & 0.0420 \\ -0.0454 & 0.0451 & -0.0423 & -0.0420 \\ -0.0053 & 0. & 0. & 0. \\ -0.0854 & -0.0835 & -0.0725 & -0.0722 \\ -0.0854 & 0.0835 & 0.0725 & 0.0722 \\ 0.0082 & 0. & 0. & 0. \\ -0.0364 & -0.0357 & -0.0310 & -0.0309 \\ -0.0364 & 0.0357 & -0.0310 & -0.0309 \\ 0. & -0.0039 & 0. & 0. \\ -0.0364 & -0.0357 & 0.0310 & 0.0309 \\ -0.0364 & 0.0357 & 0.0310 & 0.0309 \\ 0. & 0.0039 & 0. & 0. \\ -0.0854 & -0.0835 & 0.0725 & 0.0722 \\ -0.0854 & 0.0835 & -0.0725 & -0.0722 \\ -0.0082 & 0. & 0. & 0. \\ -0.0158 & -0.0155 & 0. & 0. \\ -0.0158 & 0.0155 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ -0.0191 & -0.0185 & -0.0144 & -0.0145 \\ -0.0191 & 0.0185 & 0.0144 & 0.0145 \\ 0.0017 & 0. & 0. & 0. \\ -0.0404 & -0.0392 & -0.0304 & -0.0304 \\ -0.0404 & 0.0392 & -0.0304 & -0.0304 \\ 0. & -0.0037 & 0. & 0. \\ -0.0404 & -0.0392 & 0.0304 & 0.0304 \\ -0.0404 & 0.0392 & 0.0304 & 0.0304 \\ 0. & 0.0037 & 0. & 0. \\ -0.0191 & -0.0185 & 0.0144 & 0.0145 \\ -0.0191 & 0.0185 & -0.0144 & -0.0145 \\ -0.0017 & 0. & 0. & 0. \\ -0.0124 & -0.0119 & 0. & 0. \\ -0.0124 & 0.0119 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$10^{-1} \begin{bmatrix} W_d = \\ 0.0606 & -0.0594 & 0. & 0. \\ -0.0606 & -0.0594 & 0. & 0. \\ 0. & 0.0076 & 0.0004 & 0.0003 \\ 0.0918 & -0.0899 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0918 & -0.0899 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0122 & 0. & 0.0006 & 0.0005 \\ 0.0918 & -0.0899 & 0.0001 & 0.0001 \\ -0.0918 & -0.0899 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0122 & 0. & 0.0006 & 0.0005 \\ 0.0606 & -0.0594 & 0. & 0. \\ -0.0606 & -0.0594 & 0. & 0. \\ 0. & -0.0076 & 0.0004 & 0.0003 \\ 0.1096 & -0.1125 & 0.0001 & 0.0001 \\ -0.1096 & -0.1125 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0. & 0.0066 & 0.0014 & 0.0011 \\ 0.0545 & -0.0558 & 0. & 0. \\ -0.0545 & -0.0558 & 0. & 0. \\ 0.0042 & 0. & 0.0007 & 0.0006 \\ 0.0545 & -0.0558 & 0. & 0. \\ -0.0545 & -0.0558 & 0. & 0. \\ -0.0042 & 0. & 0.0007 & 0.0006 \\ 0.1096 & -0.1125 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.1096 & -0.1125 & -0.0001 & -0.0001 \\ 0. & -0.0066 & 0.0014 & 0.0011 \\ 0.0401 & -0.0402 & 0. & 0. \\ -0.0401 & -0.0402 & 0. & 0. \\ 0. & 0.0008 & 0.0008 & 0.0006 \\ 0.0911 & -0.0913 & -0.0002 & -0.0002 \\ -0.0911 & -0.0913 & 0.0002 & 0.0002 \\ 0.0024 & 0. & 0.0017 & 0.0014 \\ 0.0911 & -0.0913 & 0.0002 & 0.0002 \\ -0.0911 & -0.0913 & -0.0002 & -0.0002 \\ -0.0024 & 0. & 0.0017 & 0.0014 \\ 0.0401 & -0.0402 & 0. & 0. \\ -0.0401 & -0.0402 & 0. & 0. \\ 0. & -0.0008 & 0.0008 & 0.0006 \\ 0.0822 & -0.0857 & 0.0002 & 0.0002 \\ -0.0822 & -0.0857 & 0.0002 & 0.0002 \\ 0. & -0.0008 & 0.0021 & 0.0018 \\ 0.0355 & -0.0368 & 0. & 0. \\ -0.0355 & -0.0368 & 0. & 0. \\ 0.0005 & 0. & 0.0009 & 0.0007 \\ 0.0355 & -0.0368 & 0. & 0. \\ -0.0355 & -0.0368 & 0. & 0. \\ -0.0005 & 0. & 0.0009 & 0.0007 \\ 0.0822 & -0.0857 & -0.0002 & -0.0002 \\ -0.0822 & -0.0857 & -0.0002 & -0.0002 \\ 0. & 0.0008 & 0.0021 & 0.0018 \\ 0.0155 & -0.0159 & 0. & 0. \\ -0.0155 & -0.0159 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.0320 & 0.0318 \\ 0.0210 & -0.0221 & 0. & 0. \\ -0.0210 & -0.0221 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.0006 & 0.0005 \\ 0.0440 & -0.0461 & 0. & 0. \\ -0.0440 & -0.0461 & 0. & 0. \\ 0.0001 & 0. & 0.0012 & 0.0011 \\ 0.0440 & -0.0461 & 0. & 0. \\ -0.0440 & -0.0461 & 0. & 0. \\ -0.0001 & 0. & 0.0012 & 0.0011 \\ 0.0210 & -0.0221 & 0. & 0. \\ -0.0210 & -0.0221 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.0006 & 0.0005 \\ 0.0134 & -0.0143 & 0. & 0. \\ -0.0134 & -0.0143 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.0271 & 0.0271 \end{bmatrix}$$



Para mais clara impressão, matriz Z é decomposta em duas partes:

$$Z = [Z_e \quad Z_d]$$

onde

$$Z_e = \begin{bmatrix} -0.3563 & -0.3676 & -0.4837 & -0.5207 \\ -0.3563 & 0.3676 & 0.4837 & 0.5207 \\ 0.0600 & 0. & 0. & 0. \\ -0.3138 & -0.3217 & -0.3751 & -0.1790 \\ -0.3138 & 0.3217 & -0.3751 & -0.1790 \\ 0. & -0.0543 & 0. & 0. \\ -0.3138 & -0.3217 & 0.3751 & 0.1790 \\ -0.3138 & 0.3217 & 0.3751 & 0.1790 \\ 0. & 0.0543 & 0. & 0. \\ -0.3563 & -0.3676 & 0.4837 & 0.5207 \\ -0.3563 & 0.3676 & -0.4837 & -0.5207 \\ -0.0600 & 0. & 0. & 0. \\ -0.2625 & -0.2625 & -0.2611 & 0.0763 \\ -0.2625 & 0.2625 & 0.2611 & -0.0763 \\ 0.0356 & 0. & 0. & 0. \\ -0.3485 & -0.3528 & -0.4610 & -0.5278 \\ -0.3485 & 0.3528 & -0.4610 & -0.5278 \\ 0. & -0.0521 & 0. & 0. \\ -0.3485 & -0.3528 & 0.4610 & 0.5278 \\ -0.3485 & 0.3528 & 0.4610 & 0.5278 \\ 0. & 0.0521 & 0. & 0. \\ -0.2625 & -0.2625 & 0.2611 & -0.0763 \\ -0.2625 & 0.2625 & -0.2611 & 0.0763 \\ -0.0356 & 0. & 0. & 0. \\ -0.3400 & -0.3468 & -0.4474 & -0.6043 \\ -0.3400 & 0.3468 & 0.4474 & 0.6043 \\ 0.0397 & 0. & 0. & 0. \\ -0.2690 & -0.2720 & -0.2897 & -0.1225 \\ -0.2690 & 0.2720 & -0.2897 & -0.1225 \\ 0. & -0.0332 & 0. & 0. \\ -0.2690 & -0.2720 & 0.2897 & 0.1225 \\ -0.2690 & 0.2720 & 0.2897 & 0.1225 \\ 0. & 0.0332 & 0. & 0. \\ -0.3400 & -0.3468 & 0.4474 & 0.6043 \\ -0.3400 & 0.3468 & -0.4474 & -0.6043 \\ -0.0397 & 0. & 0. & 0. \\ -0.2631 & -0.2622 & -0.2720 & -0.1859 \\ -0.2631 & 0.2622 & 0.2720 & 0.1859 \\ 0.0252 & 0. & 0. & 0. \\ -0.3231 & -0.3253 & -0.3938 & -0.5593 \\ -0.3231 & 0.3253 & -0.3938 & -0.5593 \\ 0. & -0.0357 & 0. & 0. \\ -0.3231 & -0.3253 & 0.3938 & 0.5593 \\ -0.3231 & 0.3253 & 0.3938 & 0.5593 \\ 0. & 0.0357 & 0. & 0. \\ -0.2631 & -0.2622 & 0.2720 & 0.1859 \\ -0.2631 & 0.2622 & -0.2720 & -0.1859 \\ -0.0252 & 0. & 0. & 0. \\ -0.3470 & -0.3515 & 0. & 0. \\ -0.3470 & 0.3515 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ -0.3127 & -0.3116 & -0.3495 & -0.5516 \\ -0.3127 & 0.3116 & 0.3495 & 0.5516 \\ 0.0271 & 0. & 0. & 0. \\ -0.2856 & -0.2842 & -0.3017 & -0.4043 \\ -0.2856 & 0.2842 & -0.3017 & -0.4043 \\ 0. & -0.0266 & 0. & 0. \\ -0.2856 & -0.2842 & 0.3017 & 0.4043 \\ -0.2856 & 0.2842 & 0.3017 & 0.4043 \\ 0. & 0.0266 & 0. & 0. \\ -0.3127 & -0.3116 & 0.3495 & 0.5516 \\ -0.3127 & 0.3116 & -0.3495 & -0.5516 \\ -0.0271 & 0. & 0. & 0. \\ -0.3212 & -0.3193 & 0. & 0. \\ -0.3212 & 0.3193 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$Z_d = \begin{bmatrix} 0.3071 & -0.2555 & 0.0005 & 0.0015 \\ -0.3071 & -0.2555 & 0.0005 & 0.0015 \\ 0. & 0.0321 & -0.0115 & -0.0377 \\ -0.2121 & 0.2888 & 0.0029 & 0.0077 \\ 0.2121 & 0.2888 & -0.0029 & -0.0077 \\ -0.0273 & 0. & -0.0270 & -0.0698 \\ -0.2121 & 0.2888 & -0.0029 & -0.0077 \\ 0.2121 & 0.2888 & 0.0029 & 0.0077 \\ 0.0273 & 0. & -0.0270 & -0.0698 \\ 0.3071 & -0.2555 & -0.0005 & -0.0015 \\ -0.3071 & -0.2555 & -0.0005 & -0.0015 \\ 0. & -0.0321 & -0.0115 & -0.0377 \\ -0.5818 & 0.7022 & -0.0069 & -0.0171 \\ 0.5818 & 0.7022 & -0.0069 & -0.0171 \\ 0. & -0.0434 & -0.0729 & -0.1789 \\ 0.3733 & -0.3433 & -0.0007 & -0.0025 \\ -0.3733 & -0.3433 & 0.0007 & 0.0025 \\ 0.0301 & 0. & -0.0188 & -0.0681 \\ 0.3733 & -0.3433 & 0.0007 & 0.0025 \\ -0.3733 & -0.3433 & -0.0007 & -0.0025 \\ -0.0301 & 0. & -0.0188 & -0.0681 \\ -0.5818 & 0.7022 & 0.0069 & 0.0171 \\ 0.5818 & 0.7022 & 0.0069 & 0.0171 \\ 0. & 0.0434 & -0.0729 & -0.1789 \\ 0.6400 & -0.6224 & 0.0002 & 0.0016 \\ -0.6400 & -0.6224 & 0.0002 & 0.0016 \\ 0. & 0.0114 & -0.0054 & -0.0569 \\ -0.2454 & 0.3231 & 0.0085 & 0.0244 \\ 0.2454 & 0.3231 & -0.0085 & -0.0244 \\ -0.0043 & 0. & -0.0793 & -0.2102 \\ -0.2454 & 0.3231 & -0.0085 & -0.0244 \\ 0.2454 & 0.3231 & 0.0085 & 0.0244 \\ 0.0043 & 0. & -0.0793 & -0.2102 \\ 0.6400 & -0.6224 & -0.0002 & -0.0016 \\ -0.6400 & -0.6224 & -0.0002 & -0.0016 \\ 0. & -0.0114 & -0.0054 & -0.0569 \\ -0.0727 & 0.1411 & -0.0084 & -0.0273 \\ 0.0727 & 0.1411 & -0.0084 & -0.0273 \\ 0. & -0.0003 & -0.0892 & -0.2565 \\ 0.7508 & -0.7655 & 0. & -0.0005 \\ -0.7508 & -0.7655 & 0. & 0.0005 \\ 0.0118 & 0. & 0.0037 & -0.0516 \\ 0.7508 & -0.7655 & 0. & 0.0005 \\ -0.7508 & -0.7655 & 0. & -0.0005 \\ -0.0118 & 0. & 0.0037 & -0.0516 \\ -0.0727 & 0.1411 & 0.0084 & 0.0273 \\ 0.0727 & 0.1411 & 0.0084 & 0.0273 \\ 0. & 0.0003 & -0.0892 & -0.2565 \\ 1.1003 & -1.1407 & 0. & 0. \\ -1.1003 & -1.1407 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 3.4654 & 3.1389 \\ 1.0402 & -1.1029 & -0.0019 & -0.0008 \\ -1.0402 & -1.1029 & -0.0019 & -0.0008 \\ 0. & 0.0016 & 0.0403 & 0.0142 \\ 0.6298 & -0.6409 & -0.0003 & -0.0031 \\ -0.6298 & -0.6409 & 0.0003 & 0.0031 \\ 0.0019 & 0. & -0.0125 & -0.0978 \\ 0.6298 & -0.6409 & 0.0003 & 0.0031 \\ -0.6298 & -0.6409 & -0.0003 & -0.0031 \\ -0.0019 & 0. & -0.0125 & -0.0978 \\ 1.0402 & -1.1029 & 0.0019 & 0.0008 \\ -1.0402 & -1.1029 & 0.0019 & 0.0008 \\ 0. & -0.0016 & 0.0403 & 0.0142 \\ 1.1608 & -1.2504 & 0. & 0. \\ -1.1608 & -1.2504 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 3.8053 & 4.0625 \end{bmatrix}$$