

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Curvas e Superfícies Dianodais de Cayley-Halphen

por

Vitalino Cesca Filho

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Prof. Dr. Luís Gustavo Doninelli Mendes
Orientador

Porto Alegre, setembro de 2009

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Cesca Filho, Vitalino

Curvas e Superfícies Dianodais de Cayley-Halphen / Vitalino
Cesca Filho. — Porto Alegre:
PPGMAT da UFRGS, 2009.

101 p.: il.

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande
do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Ale-
gre, 2009.

Orientador: Mendes, Luís Gustavo Doninelli

Dissertação: Matemática
geometria, geometria algébrica

Curvas e Superfícies Dianodais de Cayley-Halphen

por

Vitalino Cesca Filho¹

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática
do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do
Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Linha de Pesquisa: Geometria Algébrica

Orientador: Prof. Dr. Luís Gustavo Doninelli Mendes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ivan Edgardo Pan Perez
IM/UFRGS-RS

Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha
IM/UFRGS-RS

Prof. Dr. Paulo Roberto Grossi Sad
IMPA-RJ

Dissertação apresentada
04 de Setembro de 2009.

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll
Coordenador

¹Bolsista da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por uma oportunidade deste tamanho. Pela família acolhedora, pela esposa carinhosa e pelos amigos companheiros. Agradeço a Deus por me dar uma vida com tantas alegrias e conquistas. Espero um dia fazer por merecer este tão grande presente.

Agradeço aos meus pais pela educação, que recebi tanto em casa como na escola. Agradeço a eles pelo constante incentivo e compreensão em três anos de mestrado. Agradeço a eles por acreditarem em mim e no meu potencial, muitas vezes mais do que eu mesmo acreditei. Agradeço pelo apoio, pelos conselhos, pela paciência.

Agradeço ao amor da minha vida, à minha esposa, à minha melhor amiga. Agradeço à Rafaela por ser estas três pessoas ao mesmo tempo. Agradeço a ela pela força nos momentos difíceis e por ouvir meus desabafos. Agradeço por insistir que eu pense em mim, e não só nos outros. Agradeço pela compreensão e pelo companheirismo nas horas de estudo. Agradeço pelo carinho e por cuidar tanto de mim.

Agradeço ao meu orientador, Professor Luís Gustavo Mendes, por acreditar em mim e pela sábia escolha de um tema rico e profundo. Agradeço a ele por dedicar mais tempo a mim do que o planejado e por não limitar a pesquisa a esta dissertação. Agradeço por intercalar em sua fala trabalho, bobagens e conselhos pessoais. Agradeço por ser meu principal modelo de pesquisador e por abrir as portas do mundo da pesquisa matemática. Agradeço pelo apoio na busca de um doutorado de qualidade. Agradeço à bolsa-alimentação e à bolsa-taxi.

Agradeço à UFRGS, ao PPGMAT e a todos os professores que tive, mo-

delos no ensino e na pesquisa. Agradeço à banca pela participação nesta dissertação. Pelas inúmeras correções e sugestões. Agradeço por dedicar seu precioso tempo a este trabalho. Agradeço pelo esforço para entender as explicações mal escritas e para corrigir as demonstrações muitas vezes erradas. Agradeço ao apoio financeiro da CAPES. É muito gratificante saber da existência de órgãos que acreditam neste país e que apóiam a pesquisa científica.

Agradeço aos meus colegas da UFRGS, mostrando o valor do estudo em grupo. Agradeço a eles por também acreditarem no meu potencial. Agradeço pelos momentos de descontração e pelo companheirismo. Agradeço pelas dúvidas que tiraram, pelas conversas no cafezinho, pela festa surpresa de aniversário, pela amizade de todos. Agradeço a todos os amigos colegas, que me apoiaram, aconselharam e ouviram.

Agradeço ao meu filho canino Theo e às minhas filhas felinas Mel e Lira. Eles não entendem muito o que eu tanto fazia no computador, mas ficavam sempre do meu lado, carinhosos e atenciosos. Algumas vezes tentaram contribuir na redação, caminhando sobre o teclado. Agradeço à minha nova família: Mário, Joanita e Bruno; que me acompanharam nesta caminhada. Agradeço a eles pelo apoio, por acreditarem em mim e por também proporcionar um bom ambiente de estudo.

Um muito obrigado a todos!

RESUMO

Um pencil de Halphen é uma família a um parâmetro de curvas sêxticas planas com nove pontos duplos pré-fixados. Estes nove pontos não podem ser escolhidos ao acaso: fixados oito em posição geral, o nono deve pertencer à curva dianodal de Cayley. Neste trabalho abordamos diferentes métodos de construção da curva dianodal. Estudamos também a superfície dianodal, lugar geométrico de um oitavo ponto duplo isolado de superfícies quárticas de $\mathbb{C}P^3$. Estes assuntos são relacionados com as involuções de Bertini e Kantor.

ABSTRACT

A Halphen pencil is a one parameter family of plane sextic curves with nine fixed double points. These nine points can't be chosen arbitrarily: fixed eight in general position, the ninth must lie on Cayley's dianodal curve. In this work we approach different methods to obtain the dianodal curve. We also study the dianodal surface, the locus of an eighth isolated triple point of quartic surfaces in $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$. These subjects are related with Bertini and Kantor involutions.

Sumário

Introdução	1
1 O Método de Halphen	6
1.1 Divisores e toros complexos	6
1.1.1 Divisores principais e o Teorema de Abel	6
1.1.2 Toros complexos de dimensão um e cúbicas planas como variedades abelianas	7
1.1.3 Funções meromorfas em toros complexos de dimensão um	10
1.2 O Teorema de Abel em Toros de dimensão um	13
1.2.1 O Teorema de Abel para toros visto sobre as cúbicas planas lisas	16
1.3 As ideias de Halphen	17
1.3.1 A Construção de Halphen	19
1.4 A involução de Bertini	27
1.4.1 A involução de Bertini em cúbicas lisas	30
1.5 Uma fórmula geral para sêxticas elípticas	31
2 O Método de Cremona-Sturm-Hilton	36
2.1 A cúbica de Del Pezzo	36
2.1.1 A involução de Bertini segundo L. Cremona	40
2.2 O teorema de Hilton	43
2.2.1 Aspecto algorítmico	50
3 O Método de Cayley-Hodgkinson	51

3.1	A curva dianodal	51
3.1.1	Primeiras propriedades da dianodal	54
3.2	A superfície dianodal	59
3.2.1	Curvas contidas na superfície dianodal e pontos triplos	62
3.3	A involução de Kantor	66
4	A dianodal vista como curva algébrica e como espaço de parâmetros	71
4.1	Preliminares	71
4.1.1	Os Teoremas de Bertini	71
4.1.2	Sistemas lineares sobre curvas	73
4.2	Centros Críticos	74
4.3	Mais propriedades da curva dianodal	75
4.4	Pontos que produzem pencils irreduzíveis	77
4.5	Sêxticas racionais em pencils de Halphen	81
4.5.1	Sobre o número de centros críticos no pencil de cúbicas	83
	Apêndice B: Curvas racionais nos pencils elípticos	85
	Apêndice A: Dimensão de sistemas lineares	93
	Agradecimentos	97
	Referências Bibliográficas	99

Introdução

Um ponto que diferencia a análise complexa da real é a dificuldade da construção de objetos especiais. Por diversas vezes, a imposição de certas restrições a uma função holomorfa já é suficiente para determiná-la. Como consequência, há restrições no número máximo de condições que podem ser impostas a uma certa família de curvas (ou superfícies), por exemplo, existência de singularidades.

Por exemplo, dados nove pontos de \mathbb{CP}^2 em “posição geral”, existe uma única curva de grau três por estes pontos. Da mesma forma, existe uma única curva de grau seis em que estes pontos sejam duplos. Naturalmente, aquela cúbica tomada duplamente é uma sêxtica preenchendo este requisito e, portanto, é a única.

Esta observação mostra que a contagem de condições pode, por vezes, produzir casos artificiais, não interessantes, por exemplo, curvas redutíveis. Relacionado a isto, há um problema clássico da geometria em dimensão dois:

(i) construção de curvas planas de grau seis, irredutíveis e com nove pontos duplos, dados oito pontos duplos em posição geral

Classicamente, a solução deste problema está associada a Halphen. Em seu artigo [19], publicado em 1882, Halphen expõe uma relação geométrica entre os nove pontos. Também observa que, fixados oito pontos em posição geral, o nono ponto deve ser escolhido em uma curva de grau nove determinada por estes. Na mesma exposição, exhibe a equação geral das curvas de (i) e observa a existência de sêxticas irredutíveis com dez pontos duplos. Por fim, generaliza seus resultados para curvas de grau $3k$ com nove pontos

k -uplos.

A sêxtica irreduzível com nove pontos duplos pode ser combinada com uma cúbica por estes pontos tomada duplamente, formando uma família de soluções de (i), que foi chamada de *pencil de Halphen*.

Menos conhecida é a solução dada treze anos antes por A. Cayley. Em 1869, ele escreveu duas Memórias sobre superfícies quárticas, onde estudou condições para que estas possuam um certo número de singularidades. Um dos problemas estudados por Cayley em sua primeira Memória [7] foi:

(ii) construção de superfícies em \mathbb{P}^3 de grau quatro, irreduzíveis, com oito pontos duplos isolados.

Se os oito pontos estão em posição geral, a contagem de dimensão implica que as superfícies quárticas desse tipo são todas da forma:

$$\alpha_1 Q_1^2 + \alpha_2 Q_1 Q_2 + \alpha_3 Q_2^2 = 0 \quad (1)$$

onde Q, Q_2 são duas superfícies quádricas distintas pelos oito pontos. Neste caso, a curva $Q_1 \cap Q_2$ é uma curva dupla (cada um de seus pontos é um ponto duplo) das superfícies quárticas em (1). Como esta curva contém os oito pontos, eles serão *singularidades não isoladas*. Então para termos uma solução com singularidades isoladas, precisamos considerar um oitavo ponto em posição especial, dados sete em posição geral.

Fixados estes sete pontos em posição geral, Cayley encontra um determinante jacobiano que define a equação da superfície onde deve ser tomado o oitavo ponto, denominada por ele de *superfície dianodal dos sete pontos*. O nome *dianodal* tem origem do grego, significando *através dos nodos*.

Em sua segunda Memória, [8] ele dedica um pequeno parágrafo para mostrar que o mesmo método resolve também o problema (i). Dessa forma, Cayley encontra a curva de grau nove, a que chamou de *curva dianodal*.

Foi observado por H. Bateman, em [2], a participação independente de Cayley e Halphen. Aparentemente Bateman foi o único a citar a solução de Cayley para (i). Antes de Halphen também E. Valentiner² estudou o

²Só tivemos acesso ao *review* do artigo

pencil de sêxticas nodais. Em [28], ele descobre a curva dianodal de grau nove pelos oitos pontos.

Mais recentemente, em 1917, Hodgkinson [21] apresentou uma solução para (i), sem fazer menção aos trabalhos de Halphen e Cayley. Curiosamente desenvolveu um argumento idêntico ao de Halphen e outro idêntico ao de Cayley. Este último lhe serviu para obter as propriedades da curva dianodal. No mesmo artigo seguiu o caminho de Halphen e generalizou o resultado para curvas de grau $3k$. Apesar de repetir as construções, o artigo de Hodgkinson foi muito útil nesta dissertação por desenvolver mais detalhadamente algumas seções dos trabalhos de Halphen e Cayley.

Apesar de várias referências clássicas, o tema de superfícies com singularidades isoladas prescritas é atual. No ano de 2008, Endrass, Persson e Stevens classificaram em [16] as superfícies de grau seis com pontos triplos. Ao analisar singularidades triplas repetiram o método de Cayley, visto que a superfície dianodal tem grau seis e sete pontos triplos. A partir desta superfície, os autores obtiveram superfícies sêxticas com oito pontos triplos.

Uma forma alternativa para encontrar a solução de (i) foi considerada por L. Cremona, R. Sturm, H. Hudson, A. Coble, L. Godeaux, B. Gambier e H. Hilton, em ordem cronológica. Trata-se de considerar curvas que são intersecções entre superfícies de \mathbb{P}^3 e usar uma transformação birracional para mapeá-las em \mathbb{P}^2 . Este método transforma o problema de singularidades de curvas planas em um problema de contato de superfícies de \mathbb{P}^3 .

Esta ideia acaba por fazer uma conexão entre a curva / superfície dianodal e as involuções de Bertini e Kantor: estas curvas / superfícies vão estar contidas no lugar de pontos fixos destas involuções. No caso da involução de Bertini, esta conexão remonta ao próprio Cremona, cujo trecho de uma carta aparece como um nota de rodapé no artigo original de Bertini [4], de 1877.

O objetivo da dissertação é de entender, clarificar e comparar as soluções de Cayley, Halphen e Cremona-Sturm-Hilton, assim como as relações entre

elas.

Inicialmente, no Capítulo 1, exponho a solução dada por Halphen, que envolve funções elípticas sobre cúbicas planas. Para elucidar seus argumentos, foi feito um estudo via superfícies de Riemann e Teorema de Abel, que demonstro aqui apenas no caso específico de cúbicas planas lisas.

De fato, foi o estudo do Teorema de Abel geral, feito em seminários sobre o livro [25], que motivou o estudo do trabalho de Halphen. A partir da descoberta do trabalho pioneiro de Cayley, uma a uma certas conexões conceituais foram aparecendo e produziram a dissertação.

Ainda no Capítulo 1 é estudada a involução de Bertini, que está ligada à construção de Halphen.

Em seguida no Capítulo 2 é estudado o método birracional de Cremona-Sturm-Hilton, onde apresento com um certo detalhe as *superfícies cúbicas de Del Pezzo*.

O Capítulo 3 desenvolve a solução de Cayley, utilizada para resolver tanto (i) quanto (ii). Também a involução de Kantor é apresentada neste capítulo.

O Capítulo 4 trata tanto da curva dianodal como curva algébrica (suas singularidades, irreduzibilidade e seu gênero geométrico) como um conjunto que parametriza pencils de Halphen (que tipo de pencil se obtém tomando um ponto genérico da dianodal, ou um ponto especial). Aqui se usa bem as hipóteses de posição geral dos oito pontos, pois se sabe que em posições especiais a dianodal correspondente pode se fatorar, adquirindo mais singularidades. Também se discute a existência de elementos especiais dentro de um pencil de Halphen (curvas racionais), o número destes elementos e suas propriedades.

No Apêndice A foi incluída a ideia da prova original de Halphen para a existência de 12 curvas racionais em um pencil de Halphen, que se adapta facilmente a um contexto mais geral de folheações holomorfas, complementando a discussão do Capítulo 4.

No Apêndice B incluímos resultados recentes sobre o problema (em ge-

ral, em aberto) da dimensão de sistemas lineares de curvas e superfícies com multiplicidades pré-fixadas em pontos.

Capítulo 1

O Método de Halphen

Halphen encontrou o lugar geométrico do nono ponto duplo de sêxticas fazendo uso de funções elípticas. Neste capítulo, a sua construção será explicada e detalhada.

Na primeira seção, será feito um breve estudo sobre divisores e toros complexos para, na segunda seção, demonstrar o teorema de Abel visto sobre toros complexos. Em ambas seções, seguiremos o livro de R. Miranda, [25]. Na terceira seção, este teorema será utilizado no estudo do método geométrico de Halphen, desenvolvido em [19].

Daremos sequência ao trabalho de Halphen na quarta seção, relacionando sua construção com a involução de Bertini. Na quinta seção, apresentamos uma fórmula geral para as sêxticas com nove pontos duplos, também de autoria de Halphen.

1.1 Divisores e toros complexos

1.1.1 Divisores principais e o Teorema de Abel

Um *divisor* é uma combinação linear formal com coeficientes inteiros de pontos de uma curva (ou superfície de Riemann) $C \subset \mathbb{P}^k$. Em outras palavras, um divisor é uma soma formal finita:

$$D = \sum_{i=1}^n r_i \cdot p_i \quad ; \quad r_i \in \mathbb{Z}, p_i \in C$$

O *grau* de um divisor é a soma de seus coeficientes (em \mathbb{Z}), isto é:

$$\deg(D) = \sum_{i=1}^n r_i$$

A intersecção de duas curvas pode ser escrita na forma de um divisor, utilizando coeficientes para denotar multiplicidades. Por exemplo, se uma reta l é tangente a uma cúbica lisa C_3 em p_0 e transversal em p_1 , podemos escrever:

$$l \cdot C_3 = 2p_0 + p_1$$

Se f é uma função meromorfa em C , pode-se construir o *divisor de f* :

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^n \operatorname{ord}_{p_i}(f) \cdot p_i$$

onde $\operatorname{ord}_{p_i}(f)$ é a ordem da função f no ponto p_i , isto é:

- $\operatorname{ord}_{p_i}(f) = r_i$, se p_i é um zero de ordem r_i de f ;
- $\operatorname{ord}_{p_i}(f) = -r_i$, se p_i é um pólo de ordem r_i de f ;
- $\operatorname{ord}_{p_i}(f) = 0$, se p_i não é zero nem pólo de f .

Quando um divisor D é o divisor de uma função meromorfa, dizemos que D é *principal*. Como a curva C é compacta ($C \subset \mathbb{P}^k$), a soma de zeros e pólos de f (contando ordem) é zero (aplicação do teorema de Cauchy).

Logo *todo divisor principal tem grau zero*. A recíproca deste fato em geral não é válida. O *Teorema de Abel* estabelece uma condição para a recíproca e será estudado na Seção 1.2.

1.1.2 Toros complexos de dimensão um e cúbicas planas como variedades abelianas

Seja τ um número complexo de dimensão um com parte imaginária positiva. Defina o látice:

$$L = \{m + n\tau ; m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Um *toro complexo* é um quociente \mathbb{C}/L . Como \mathbb{C} é um grupo abeliano aditivo, o toro complexo \mathbb{C}/L herda de \mathbb{C} uma estrutura de grupo abeliano. Também herda a estrutura complexa de \mathbb{C} : uma função é holomorfa em um aberto U do toro se a sua composta com a aplicação quociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$ for holomorfa na pré-imagem de U em \mathbb{C} . Portanto toros complexos são variedades complexas 1-dimensionais. Por serem conexos, são *superfícies de Riemann*. Ambas estruturas são compatíveis, o que torna toros complexos *variedades abelianas*.

Para qualquer $z \in \mathbb{C}$, considere o *paralelograma fundamental*:

$$P_z = \{z + \lambda_1 + \lambda_2\tau; \lambda_i \in [0, 1]\}$$

Os pontos do toro complexo estão em correspondência um-a-um com este paralelograma com as arestas opostas identificadas.

Curvas planas lisas também possuem estrutura complexa. O fato de a curva ser lisa nos permite utilizar a versão holomorfa do teorema da função implícita e escrever, localmente, uma coordenada afim como função holomorfa das outras. A projeção na outra coordenada afim define as *cartas locais* da estrutura complexa, assim como o faz a aplicação quociente π em toros complexos. Ou seja, curvas planas lisas também são superfícies de Riemann.

Fazendo uso de suas estruturas complexas, definimos aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann: basta compor adequadamente as cartas com certas funções holomorfas de \mathbb{C} .

O resultado clássico é:

Teorema 1.1. *Seja C uma curva projetiva lisa de gênero 1. Então dado um ponto $p_0 \in C$, existe uma aplicação biholomorfa de C em um toro $X = \mathbb{C}/L$ de modo que a imagem do ponto p_0 é o ponto $\pi(0) \in X$, onde π é a aplicação quociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L = X$.*

Para a prova referimos ao livro de Brieskorn-Knörrer [5], 7.4 e ao livro de H. Cartan [6] V, §2, 5 e VI, §5, 3.

Lembremos que a fórmula do gênero da normalização de uma curva plana singular de grau d com r pontos duplos ordinários é:

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - r$$

Desta fórmula segue que cúbicas lisas e que as normalizações das sêxticas com nove pontos duplos ordinários possuem gênero 1, isto é, são *elípticas*.

Assim como toros complexos, as cúbicas planas lisas são equipadas com uma estrutura de grupo abeliano. Eis a definição geométrica da operação que as torna grupos abelianos (a comutatividade é óbvia, mas a associatividade não, ver Brieskorn-Knörrer [5] p. 308):

Definição 1.2. *Fixe p_0 um ponto de uma cúbica plana lisa C . Para dois pontos p e q de C , a soma $p + q$ é definida da seguinte forma: seja r' o terceiro ponto de intersecção de C com a reta por p e q e seja r o terceiro ponto de intersecção de C com a reta por r' e p_0 . Então:*

$$p + q = r$$

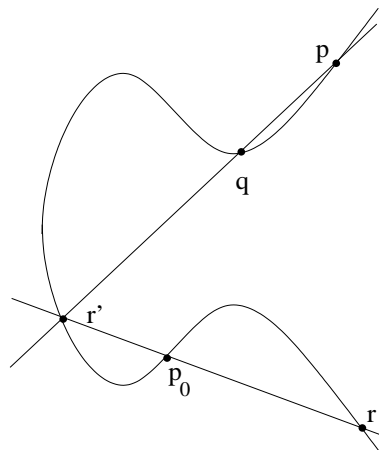


Figura: soma no grupo de cúbica

Na definição acima, caso $q = p$ então se toma a tangente.

1.1.3 Funções meromorfas em toros complexos de dimensão um

Seja τ um número complexo com parte imaginária positiva. Considere o látice $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ e forme o toro complexo \mathbb{C}/L .

Queremos descrever as funções meromorfas em \mathbb{C}/L , o que equivale a descrever funções meromorfas f em \mathbb{C} tais que:

- f não tem zeros nem pólos em L
- $f(z + 1) = f(z)$
- $f(z + \tau) = f(z)$

Inicialmente consideremos a série

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}.$$

Um Exercício de variável complexa mostra que ela converge absolutamente e uniformemente nas partes compactas de \mathbb{C} e portanto é uma função holomorfa, chamada *função teta*. Ademais operações elementares com séries mostram que:

$$\begin{aligned} (a) : \theta(z + 1) &= \theta(z) & (b) : \theta(z + \tau) &= e^{-\pi i(\tau + 2z)}\theta(z) \\ (c) : \theta\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Também se mostra que:

(d) : $\forall t \in \mathbb{C}$, θ possui apenas um zero no interior de P_t , isto é, do paralelograma fundamental com vértices t , $t + 1$, $t + 1 + \tau$, $t + \tau$ (supondo que θ não possua zeros na fronteira de P_t)

Para isso, basta utilizar o teorema dos resíduos: de fato, como θ é analítica, o número de zeros em questão é:

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz$$

onde C percorre as arestas do paralelograma do enunciado. Usando (a) e (b), conclui-se que o número de zeros é 1.

Agora, para $x \in \mathbb{C}$, considere a seguinte *translação* da função teta:

$$\theta^{(x)}(z) = \theta\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x\right)$$

Esta função continua tendo boas propriedades:

Lema 1.3. *Se $x \in \mathbb{C}$, então:*

- (a) $\theta^{(x)}(z + 1) = \theta^{(x)}(z)$
- (b) $\theta^{(x)}(z + \tau) = -e^{-2\pi i(z-x)}\theta^{(x)}(z)$
- (c) $\theta^{(x)}(z_0) = 0 \Leftrightarrow z_0 = x + l \quad ; \quad l \in L$

DEMONSTRAÇÃO. Demonstraremos utilizando as propriedades acima.

$$(a) \quad \theta^{(x)}(z + 1) = \theta\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x + 1\right) = \theta\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x\right) = \theta^{(x)}(z)$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \theta^{(x)}(z + \tau) &= \theta\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x + \tau\right) = e^{-\pi i(\tau + 2z - 1 - \tau - 2x)}\theta\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x\right) = \\ &= e^{-2\pi i(z-x)}e^{\pi i}\theta\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x\right) = -e^{-2\pi i(z-x)}\theta^{(x)}(z) \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} \theta^{(x)}(x) &= \theta\left(-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right) = \theta\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = 0 \\ \theta^{(x)}(x + 1) &= \theta^{(x)}(x) = 0 \\ \theta^{(x)}(x + \tau) &= -e^{-2\pi i(x-x)}\theta^{(x)}(x) = 0 \end{aligned}$$

Como, além disso, no interior de cada paralelograma fundamental a função θ possui um único zero,

$$\theta^{(x)}(z_0) = 0 \Leftrightarrow z_0 = x + L$$

□

Como estas funções não são τ -periódicas, serão considerados então os *quocientes* de funções teta transladadas. Para certos conjuntos finitos de

números complexos $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$, defina:

$$R(z) := \frac{\prod_{i=1}^m \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{j=1}^n \theta^{(y_j)}(z)}$$

Esta função segue satisfazendo $R(z+1) = R(z)$ e, ainda:

$$\begin{aligned} R(z+\tau) &= \frac{\prod_{i=1}^m \theta^{(x_i)}(z+\tau)}{\prod_{j=1}^n \theta^{(y_j)}(z+\tau)} \\ &= (-1)^{m-n} \frac{\prod_{i=1}^m e^{-2\pi i(z-x_i)} \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{j=1}^n e^{-2\pi i(z-y_j)} \theta^{(y_j)}(z)} \\ &= (-1)^{m-n} \cdot e^{-2\pi i[(m-n)z + \sum_j y_j - \sum_i x_i]} \cdot R(z) \end{aligned}$$

Impondo as condições $m = n$ e $\sum_j y_j - \sum_i x_i \in \mathbb{Z}$, segue que $R(z+\tau) = R(z)$, como desejado. Isto prova a proposição:

Proposição 1.4. *Fixe um inteiro $d > 0$ e considere dois subconjuntos de \mathbb{C} com d elementos $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$ tais que $\sum_j y_j - \sum_i x_i \in \mathbb{Z}$. Então a função $R(z)$ acima induz uma função meromorfa em \mathbb{C}/L . Os zeros de $R(z)$ são os pontos $x_i + L$ e seus pólos são os pontos $y_j + L$.*

O interessante é que estas são as únicas funções meromorfas em \mathbb{C}/L . A prova desta afirmação pode ser encontrada em [25], Capítulo II, Proposição 4.13.

Já vimos no Teorema 1.1 que estes toros são mergulhados em \mathbb{P}^2 como cúbicas planas. Por um resultado geral (Teorema de Chow), funções meromorfas em variedades algébricas são funções racionais. Logo estes quocientes de funções teta são mergulhados como restrições de funções racionais do plano projetivo (as funções racionais da subvariedade algébrica são restrições de funções racionais da variedade algébrica ambiente). Mais detalhes podem ser encontrados em [26], I, Cap. 1, 6.5.

1.2 O Teorema de Abel em Toros de dimensão um

Considere o toro $X = \mathbb{C}/L$, onde $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Como já vimos, ao mesmo tempo em que X é uma superfície de Riemann, também tem uma estrutura de grupo abeliano, dada pela aplicação quociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$, cujo elemento neutro é o ponto $\pi(0)$.

Então, se $\text{Div}(X)$ é o conjunto dos divisores em X , considere a aplicação natural

$$A : \text{Div}(X) \rightarrow X,$$

na qual a imagem de uma soma formal de pontos de X é a própria soma no grupo aditivo de X . Esta aplicação chama-se *aplicação de Abel-Jacobi* para toros e é claramente um homomorfismo de grupos.

Esta aplicação é um caso muito particular da *aplicação de Abel-Jacobi*, que em geral é definida de um modo bem diferente e está relacionada ao Teorema de Abel geral.

Mas nesta dissertação somente usamos o teorema de Abel para toros. Ele será demonstrado, e para isso precisaremos de um lema de integração em \mathbb{C} :

Lema 1.5. *Seja $\tau \in \mathbb{C}$ e h uma função meromorfa em \mathbb{C} tal que $h(z+1) = h(z+\tau) = h(z)$ para todo z . Dado $p \in \mathbb{C}$, seja γ_p o caminho fechado que percorre no sentido anti-horário as arestas do paralelograma com vértices em $p, p+1, p+1+\tau, p+\tau$. Suponha que h não tem zeros nem polos em γ_p . Então a integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

é um elemento do látice $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro note que, pela definição de h' , a periodicidade de h implica na periodicidade da derivada h' , isto é, $h'(z+1) = h'(z+\tau) = h'(z)$ para todo z . Então:

$$\int_{\gamma_p} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_p^{p+1} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{p+1}^{p+1+\tau} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{p+1+\tau}^{p+\tau} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{p+\tau}^p z \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_p^{p+1} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_p^{p+\tau} (z+1) \frac{h'(z+1)}{h(z+1)} dz + \int_{p+1}^p (z+\tau) \frac{h'(z+\tau)}{h(z+\tau)} dz + \int_{p+\tau}^p z \frac{h'(z)}{h(z)} dz \\
&= \int_p^{p+1} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_p^{p+\tau} (z+1) \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{p+1}^p (z+\tau) \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{p+\tau}^p z \frac{h'(z)}{h(z)} dz \\
&= \int_p^{p+\tau} \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{p+1}^p \tau \frac{h'(z)}{h(z)} dz \\
&= \int_p^{p+\tau} d(\log h) + \tau \int_{p+1}^p d(\log h)
\end{aligned}$$

$$= (\log(h(p+\tau)) - \log(h(p))) + \tau(\log(h(p)) - \log(h(p+1))) = 2m\pi i + \tau \cdot 2n\pi i$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$, pois $h(z+1) = h(z+\tau) = h(z)$. Portanto:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz = m + n\tau \in L$$

□

Teorema 1.6 (Teorema de Abel para toros). *Seja D um divisor no toro complexo X . Então D é um divisor principal se e somente se*

$$\deg(D) = 0 \quad e \quad A(D) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO.

(\Rightarrow) Seja D um divisor principal em X , isto é, $D = \text{div } f$ para f meromorfa em X . Então $\deg(D) = 0$, pois X é compacto.

Seja $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L = X$ a aplicação quociente e seja $h = f \circ \pi$. Como o conjunto de zeros e polos de h é discreto, seja $p \in \mathbb{C}$ tal que o caminho γ_p descrito no Lema 1.5 acima não contém zeros nem polos de h . Dessa forma, γ_p percorre as arestas de um paralelograma fundamental de X em \mathbb{C} e os zeros e pólos de f em X estão em correspondência um-a-um com os zeros e pólos de h no interior de γ_p .

Considere a função meromorfa em \mathbb{C} :

$$H := z \frac{h'(z)}{h(z)}$$

e seja U o interior de γ_p . Pelo teorema dos resíduos:

$$\sum_{z_o \in U} \text{Res}_{z_o} H = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} H dz$$

e portanto, pelo Lema 1.5 precedente:

$$\sum_{z_o \in U} \text{Res}_{z_o} H \in L.$$

Mas vejamos agora o que é resíduo de H em $z_0 \in \mathbb{C}$.

Se $\text{ord}_{z_0} h = n \in \mathbb{Z}$, escreva $h(z) = C(z - z_0)^n + \dots$ e portanto:

$$h'(z) = nC(z - z_0)^{n-1} + \dots \quad \text{e} \quad (h(z))^{-1} = C^{-1}(z - z_0)^{-n} + \dots$$

Pondo $z = z_0 + (z - z_0)$ obtemos:

$$\begin{aligned} H &= (z_0 + (z - z_0)) (nC(z - z_0)^{n-1} + \dots) (C^{-1}(z - z_0)^{-n} + \dots) \\ &= z_0 n (z - z_0)^{-1} + \dots \end{aligned}$$

Logo

$$\text{Res}_{z_0} H = z_0 n = \text{ord}_{z_0} h \cdot z_0.$$

Conluímos então que:

$$\sum_{z_o \in U} \text{ord}_{z_o} h \cdot z_o \in L$$

Donde segue que:

$$\sum_{x \in X} \text{ord}_x f \cdot x = 0$$

no grupo aditivo de X . Logo $A(D) = A(\text{div } f) = 0$.

(\Leftarrow) Suponha que $\text{deg}(D) = 0$ e $A(D) = 0$. Como $\text{deg}(D) = 0$, D pode ser escrito como $\sum_i (p_i - q_i)$, com $p_i \neq q_j$, para todo i, j .

Para cada p_i, q_i escolha $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ tais que

$$\pi(z_i) = p_i \quad \text{e} \quad \pi(w_i) = q_i.$$

Como $A(D) = 0$, a soma $\sum_i (z_i - w_i)$ é um elemento do látice L . Alterando

a escolha de z_1 , se for preciso, podemos supor que $\sum_i (z_i - w_i) = 0$ em \mathbb{C} .

Considere então o quociente de funções teta transladadas:

$$h(z) = \frac{\prod_i \theta^{(z_i)}(z)}{\prod_i \theta^{(w_i)}(z)}$$

Como $\deg(D) = 0$, o número de fatores dos produtos é igual. Além disso, $\sum_i z_i - \sum_i w_i = 0 \in \mathbb{Z}$. Portanto, pela Proposição 1.4, h é L -periódica e induz uma função meromorfa em X cujo divisor é D . Logo D é um divisor principal. \square

1.2.1 O Teorema de Abel para toros visto sobre as cúbicas planas lisas

Considere agora uma cúbica lisa C e tome nela um ponto p_0 .

De acordo com o Teorema 1.1, C é biholomorficamente equivalente a um toro $X = \mathbb{C}/L$ tal que $\pi(0)$ corresponde a p_0 . Então X induz uma estrutura de grupo em C com elemento neutro p_0 . Denote por \oplus a soma deste grupo de C (\ominus o inverso).

Seja $p, q \in C$. Vamos calcular $p \oplus q$.

Considere r' o terceiro ponto de intersecção da reta pq com C e seja r o terceiro ponto de intersecção da reta $r'p_0$ com C . Considere os divisores:

$$D_1 = p + q + r', \quad D_2 = p_0 + r' + r$$

$$D = D_1 - D_2 = p + q - p_0 - r$$

Se a equação da reta pq é $f_1 = 0$ e a da reta $r'p_0$ é $f_2 = 0$, então $f = \frac{f_1}{f_2}$ é uma função meromorfa em C e vemos que $D = \text{div } f$, isto é, D é principal.

Como D é principal, o teorema de Abel para o toro X (biholomorfo a C) implica que:

$$0 = A(D)$$

ou seja

$$0 = A(p + q - p_0 - r) = p \oplus q \ominus p_0 \ominus r = p \oplus q \ominus r.$$

Logo $r = p \oplus q$, isto é, o grupo em C induzido por X é exatamente o mesmo grupo da cúbica com elemento neutro p_0 , definido geometricamente na Seção 1.1.

1.3 As ideias de Halphen

A seguinte proposição é essencial para a compreensão do método de Halphen. Vamos usá-la principalmente para $n = 6$, mas eventualmente precisaremos dela para outros valores de n .

Proposição 1.7. *Seja C uma cúbica lisa e p_1, \dots, p_{3n} pontos de C (não necessariamente distintos, alguns podem estar sendo repetidos), com $n > 0$ inteiro. Fixe um ponto de inflexão de C e represente por \oplus a soma no grupo de C com este ponto como elemento neutro.*

Então $p_1 \oplus \dots \oplus p_{3n} = 0$ se e somente se existe uma curva C' de grau n cuja intersecção com C é dada exatamente pelos pontos p_1, \dots, p_{3n} (onde repetições representam as multiplicidades de intersecção de C e C' em cada ponto).

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que exista uma curva C' de grau n tal que:

$$C' \cdot C = p_1 + \dots + p_{3n}$$

Fixe r_1, r_2, r_3 três pontos colineares de C distintos dos $3n$ pontos dados. O ponto agora é observar que $r_1 \oplus r_2 \oplus r_3 = 0$. De fato, pela associatividade $r_1 \oplus r_2 \oplus r_3 = (r_1 \oplus r_2) \oplus r_3$ e se $s := r_1 \oplus r_2$, então pela definição geométrica da soma, ao fazermos $s \oplus r_3$ determinamos p_0 primeiramente e depois temos de ligar p_0 a p_0 e intersectar com C , produzindo assim $s \oplus r_3$. Mas $p_0 p_0$ significa uma tangente e como p_0 foi escolhido ponto de inflexão, $s \oplus r_3 = p_0$, ou seja, $s \oplus r_3 = 0$.

Seja $F = 0$ a equação da curva C' e $G = 0$ a equação da reta por r_1, r_2, r_3 . Então $h = \frac{F}{G^n}$ é um quociente de polinômios homogêneos de mesmo grau e, portanto, define uma função meromorfa na cúbica C . Como r_1, r_2, r_3 são distintos dos $3n$ pontos, segue que:

$$\operatorname{div}(h) = p_1 + \cdots + p_{3n} - n(r_1 + r_2 + r_3) = D$$

isto é, o divisor D é principal.

Pelo Teorema de Abel para toros visto na cúbica C (Seção 1.2.1), segue que:

$$p_1 \oplus \cdots \oplus p_{3n} \ominus n(r_1 \oplus r_2 \oplus r_3) = 0$$

Como $r_1 \oplus r_2 \oplus r_3 = 0$, o resultado segue.

Reciprocamente, suponha que $p_1 \oplus \cdots \oplus p_{3n} = 0$. Escolha $3n - 1$ dentre estes pontos. Se forem pontos distintos, a dimensão do sistema linear de curvas de grau n por estes $3n - 1$ pontos é:

$$N \geq \frac{n(n+3)}{2} - (3n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} \geq 0 \quad ; \quad \text{se } n \in \mathbb{N}$$

Agora se, por exemplo, $p := p_1 = p_2 = \cdots = p_k$ para $k \leq 3n - 1$, precisamos encontrar uma curva C' tal que $I_p(C, C') = k$. Veremos a quantas condições lineares sobre C' isso corresponde.

Escolha uma carta afim centrada em p e seja $ax + by = 0$ a equação da reta tangente a C em p (suponha $a \neq 0$). Substituindo $x = b/a \cdot y$ na equação afim de C' , obtemos um polinômio em y . Pela definição de índice de intersecção, é necessário que este polinômio tenha os termos de ordem menor que k nulos.

Como os coeficientes de uma equação afim de C' são combinações lineares de coeficientes de seu polinômio homogêneo, segue que a condição $I_p(C, C') = k$ implica pedir a anulação de (no máximo) k relações entre os coeficientes de C' . Portanto o número de condições para k pontos distintos é maior ou igual do que o número para k pontos iguais.

Em ambos os casos a dimensão do sistema linear é $N \geq 0$ e, portanto,

existe uma curva C' de grau n tal que:

$$C \cdot C' = p_1 + \dots + p_{3n-1} + p$$

para um certo ponto p (sendo permitidas repetições). Pela primeira parte desta demonstração, segue que:

$$p_1 \oplus \dots \oplus p_{3n-1} \oplus p = 0$$

Da hipótese segue que $p = p_{3n}$ e C' é a curva procurada. \square

Esta proposição é a base do argumento de Halphen. Observe que nela utilizamos somente uma parte do Teorema de Abel. A outra parte não foi necessária, pois nesta proposição garantimos a existência da curva C' considerando a dimensão de um certo sistema linear.

Observe também que se C' é nodal e C é lisa em p , também temos $I_p(C, C') \geq 2$, porém o número de condições sobre C' neste caso é 3, e não 2. Mas esta situação não está excluída da proposição, ocorrendo em sistemas lineares de dimensão alta, isto é, quando o grau de curva C' é alto. Nesta dissertação, este grau n será seis, o que nos dará a possibilidade de pontos nodais na curva C' .

1.3.1 A Construção de Halphen

Iniciamos esta seção com uma aplicação da Proposição 1.7 ao problema de sêxticas com nove pontos duplos.

Lema 1.8. *Seja p_1, \dots, p_9 nove pontos de uma cúbica lisa $C \subset \mathbb{P}^2$. Fixando um ponto de inflexão de C , denotamos por \oplus a soma no grupo de C com este ponto como elemento neutro.*

Se existe uma sêxtica não contendo¹ C , que é nodal nestes pontos, então:

$$2p_1 \oplus \cdots \oplus 2p_9 = 0 \quad (1.1)$$

Reciprocamente, se (1.1) for satisfeita e, ainda mais:

$$p_1 \oplus \cdots \oplus p_9 \neq 0 \quad (1.2)$$

então existe uma sêxtica, não contendo C , com pontos duplos² em p_1, \dots, p_9 .

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação é uma consequência direta da Proposição 1.7. O obstáculo na demonstração da recíproca é o fato de a condição (1.1) poder significar que p_1, \dots, p_9 são pontos de contato entre a sêxtica obtida e C . Será mostrado então que podemos escolher uma sêxtica S de modo que estes pontos sejam *duplos*.

Primeiramente, escolha coordenadas de modo que o ponto p_9 seja $(0 : 0 : 1)$ e que a cúbica C seja transversal à reta $x_0 = 0$. Considere o sistema linear \mathcal{G} de sêxticas que tenham pontos duplos em p_1, \dots, p_8 , que passem por p_9 e que tenham derivada parcial em relação a x_1 nula em p_9 . A dimensão projetiva deste sistema é:

$$\dim \mathcal{G} \geq \frac{6(6+3)}{2} - 8 \cdot 3 - 1 - 1 = 1$$

Observe que³ $C^2 \in \mathcal{G}$. Como $\dim \mathcal{G} \geq 1$, segue que existe uma sêxtica $S \in \mathcal{G}$ distinta de C^2 . Pela fórmula de Euler:

$$0 = 6S(p_9) = 0 \cdot \frac{\partial S}{\partial x_0}(p_9) + 0 \cdot \frac{\partial S}{\partial x_1}(p_9) + 1 \cdot \frac{\partial S}{\partial x_2}(p_9)$$

e, portanto:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2}(p_9) = \frac{\partial S}{\partial x_1}(p_9) = 0 \quad (1.3)$$

¹o caso em que há uma sêxtica irredutível será tratado a seguir

²não se vê no artigo de Halphen nenhuma menção a este problema, pois poderia haver somente tangência entre as curvas. Já Hodgkinson discute este problema. A demonstração que fazemos de que os pontos são duplos, e não de tangência, foi encontrada em [24]

³Com um abuso de notação, representaremos a curva C contada duas vezes como C^2 , utilizando o símbolo C tanto para a curva quanto para um polinômio que a define.

Resta sabermos que $\frac{\partial S}{\partial x_0}(p_9)$. Mostraremos primeiro que a sêxtica S não contém C . Suponha o contrário e considere a cúbica $C' = S \setminus C$. Como S tem pontos duplos em p_1, \dots, p_8 e C é lisa, segue que C' passa por estes oito pontos. Se C' passa também por p_9 , este ponto completa a intersecção $C \cdot C'$, o que implica, pela Proposição 1.7, que:

$$p_1 \oplus \dots \oplus p_9 = 0$$

contradizendo (1.2). Por outro lado, se C' não passa por p_9 , então S é transversal à reta $x_0 = 0$ neste ponto: uma contradição com (1.3). Isso prova que S não contém C .

Dessa forma, a intersecção $S \cdot C = 18$ e, novamente pela Proposição 1.7:

$$2p_1 \oplus \dots \oplus 2p_8 \oplus p_9 \oplus p' = 0$$

para um certo ponto p' . Mas, por hipótese, a relação (1.1) é satisfeita, o que implica que $p_9 = p'$. Portanto:

$$S \cdot C = 2p_1 + \dots + 2p_9 \tag{1.4}$$

A sêxtica S já possui pontos duplos em p_1, \dots, p_8 . Resta verificar se p_9 é também um ponto duplo de S , ou se é liso. Mas se fosse liso, seguiria de (1.3) que a reta tangente a S é $x_0 = 0$. Mas por hipótese C é transversal a esta reta. Portanto, o ponto p_9 é um ponto duplo de S (a derivada $\frac{\partial S}{\partial x_0}$ sim se anula). \square

Quando estamos nas condições do Lema 1.8, podemos produzir não só uma, mas uma família de sêxticas com nove pontos duplos:

Definição 1.9. *Um Pencil de Halphen é um pencil da forma:*

$$\lambda S + \mu C^2 = 0$$

onde S é uma sêxtica com nove pontos duplos que não contém a cúbica C por estes pontos.

Analisaremos agora a hipótese (1.2) no Lema 1.8. A sua negação

$$p_1 \oplus \cdots \oplus p_9 = 0$$

implica que existe outra cúbica pelos nove pontos e, portanto, um pencil. A igualdade acima implica que é satisfeita a hipótese (1.1), então existirá uma sêxtica S nodal nestes nove pontos. Escolha um outro ponto $r \in S$ de modo que a cúbica C' deste pencil passando por r seja irredutível. Segue que:

$$C' \cdot S \geq 2 \cdot 9 + 1 = 19$$

(onde 1 é a contribuição de r) e portanto por Bézout $C' \subset S$. Portanto, *Se os nove pontos satisfazem (1.1), mas não satisfazem (1.2), então a sêxtica nodal nestes pontos é composta de duas cúbicas do pencil por eles.*

Pencils de Halphen genéricos e não genéricos

Naturalmente estamos interessados nos casos em que a sêxtica obtida no Lema 1.8 é *irredutível*. Para entender em que situação isto ocorre, recorde que se S é a sêxtica produzida, então:

$$S \cdot C = 2p_1 + \cdots + 2p_9$$

Portanto, se S for redutível, as suas componentes criam, através da intersecção com C , relações entre os nove pontos, do tipo:

$$n_1 p_1 \oplus \cdots \oplus n_9 p_9 = 0 \tag{1.5}$$

com $n_i \in \mathbb{N}$. Observe que, neste caso, a soma dos coeficientes será no máximo nove, visto que se S fosse redutível, conteria pelo menos uma reta, uma cônica ou uma cúbica.

Como os pontos são fixados e esta soma de coeficientes é limitada por nove, temos uma lista pequena de relações. Diremos:

Definição 1.10. *Um pencil de Halphen de sêxticas é genérico se os nove pontos base estiverem em uma cúbica lisa em cujo grupo são satisfeitas*

(1.1) e (1.2), mas não é satisfeita nenhuma relação do tipo (1.5), com $\sum n_i \leq 9$.

É fácil determinar as sêxticas redutíveis de um pencil de Halphen genérico. De fato, se tal sêxtica não contém C , então uma relação do tipo (1.5) é criada, contradizendo a definição. Mas, por (1.2), C é a única cúbica pelos nove pontos. Logo a única sêxtica redutível de um pencil de Halphen genérico é C^2 .

Quando admitimos (1.1) e, por exemplo, que três destes pontos sejam colineares, isto é, $p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 = 0$, estamos criando um pencil de Halphen de sêxticas que se pode mostrar que não é birracionalmente equivalente a um pencil genérico. É um problema em aberto determinar todas as classes birracionalmente equivalentes de pencils de sêxticas⁴.

Nesta seção, seguiremos considerando sêxticas não contendo uma cúbica do pencil. Em seguida, consideraremos apenas sêxticas irredutíveis, limitando o trabalho a pencils de Halphen genéricos.

Semi-períodos

Chamaremos a soma $p_1 \oplus \cdots \oplus p_9$ de um *semi-período não trivial* quando são satisfeitas (1.1) e (1.2). Como foi observado, esta é a condição necessária e suficiente para a existência de uma sêxtica nodal nestes pontos que não contenha nenhuma cúbica por eles.

Lema 1.11. *Fixe oito pontos p_1, \dots, p_8 de uma cúbica plana lisa C e seja \oplus a operação no grupo desta cúbica com um ponto de inflexão escolhido como elemento neutro. Então há exatamente três pontos distintos p', p'', p''' de C tais que:*

$$\omega_1 := p_1 \oplus \cdots \oplus p_8 \oplus p' \quad , \quad \omega_2 := p_1 \oplus \cdots \oplus p_8 \oplus p'' \quad , \quad \omega_3 := p_1 \oplus \cdots \oplus p_8 \oplus p'''$$

são semi-períodos não triviais.

DEMONSTRAÇÃO. Seja ω um semi-período de C e seja $p_0 \in C$ ponto de inflexão, que é tomado como elemento neutro da soma no grupo.

⁴segundo Dolgachev, comunicação pessoal

Traçamos a tangente a C em ω . Esta tangente corta C em um certo ponto p . Ligamos p_0 a p . Como $\omega \oplus \omega = 0$, a reta p_0p deve cortar C novamente em p_0 , logo é tangente em p_0 . Como p_0 é ponto de inflexão, a reta não corta a cúbica C em outro ponto. Portanto $p = 0 = p_0$

Logo, a reta tangente a C em ω corta C novamente no ponto p_0 . Portanto o número de pontos que são semi-períodos é o número de retas por p_0 que são tangentes a C .

Identificando as retas por p_0 com \mathbb{P}^1 , definimos a aplicação:

$$F : C \rightarrow \mathbb{P}^1$$

$$p \mapsto L(p_0, p)$$

onde naturalmente a reta $L(p_0, p_0)$ é a tangente a C em p_0 . A pré-imagem de uma reta L consiste exatamente nos dois pontos de C de intersecção com L afora p_0 . O número de pontos de ramificação desta aplicação é o número desejado de tangências entre retas por p_0 e C .

Para descobrir o número de pontos de ramificação m de F , aplicamos a fórmula de Riemann-Hurwitz (cf. [25], seção II.4):

$$2 \cdot 1 - 2 = 2(2 \cdot 0 - 2) + m \quad \Rightarrow \quad m = 4.$$

pois o gênero de C é 1 e o grau de F é 2. Portanto há quatro pontos distintos de ramificação, já que uma aplicação de grau 2 não possui pontos de ramificação de ordem superior.

Se p_0 fosse um ponto qualquer de C , a reta tangente a C em p_0 cortaria C transversalmente em um outro ponto. Mas no nosso caso, em que p_0 é um ponto de inflexão,

$$T_{p_0}C \cdot C = 3p_0 = p_0 + 2p_0$$

então p_0 é um ponto de ramificação de F . Como p_0 é o semi-período trivial, sobram apenas três semi-períodos não triviais distintos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e, portanto, três pontos p, p', p'' distintos. \square

Este Lema e as observações anteriores já provam um resultado enunciado por Hodgkinson, em [21]:

Proposição 1.12 (Hodgkinson). *Considere 8 pontos de uma cúbica lisa C , tais que sua soma no grupo de C é não nula. Então existem exatamente 3 pontos de C que podem ser tomados como um nono ponto duplo de uma sêxtica (não contendo C) nodal nos oito dados.*

Com este resultado, Hodgkinson inicialmente deduziu que se o *lugar geométrico* no plano deste possível nono ponto duplo, quando variamos a cúbica C no pencil de cúbicas pelos oito pontos dados, fosse uma curva irreduzível então seria ou de grau 1 (não passando pelos oito pontos), ou de grau 9 (passando triplamente pelos oito) ou de grau 17 (passando com multiplicidade 6 em cada ponto).

Halphen, por sua vez, elaborou uma construção geométrica:

Teorema 1.13 (Halphen). *Sejam p_1, \dots, p_8, p'_9 pontos base de um pencil de cúbicas e C uma cúbica lisa deste pencil. Escolha $p_9 \in C$, distinto destes pontos.*

Então existe uma sêxtica, não contendo C , com pontos duplos em p_1, \dots, p_9 se e somente se as tangentes a C por p_9 e p'_9 encontram C no mesmo ponto.

DEMONSTRAÇÃO. Como foi visto, tal sêxtica existe se e somente se existir um semi-período não trivial ω tal que:

$$p_1 \oplus \dots \oplus p_9 = \omega \tag{1.6}$$

Como p_1, \dots, p_8, p'_9 são pontos base do pencil de cúbicas, então:

$$p_1 \oplus \dots \oplus p_8 \oplus p'_9 = 0 \tag{1.7}$$

Aplicando 1.6 em 1.7, segue:

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \oplus \cdots \oplus p_8 \oplus p'_9 = \omega \ominus p_9 \oplus p'_9 \\ \Rightarrow p_9 &= p'_9 \oplus \omega \\ \Rightarrow p_9 \oplus p_9 &= p'_9 \oplus p'_9 \oplus \omega \oplus \omega = p'_9 \oplus p'_9 \end{aligned}$$

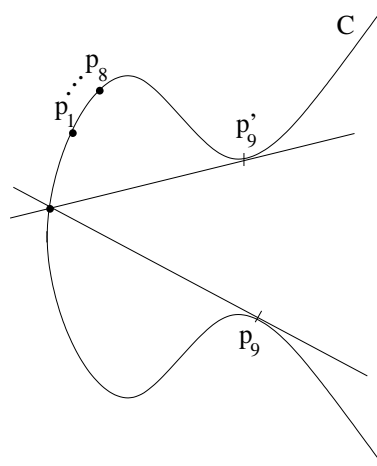
pois ω é um semi-período. E esta última igualdade:

$$p_9 \oplus p_9 = p'_9 \oplus p'_9$$

significa, com a definição geométrica da soma, que as retas tangentes a C por p_9 e por p'_9 intersectam a cúbica no mesmo ponto.

Reciprocamente, se $p_9 \oplus p_9 = p'_9 \oplus p'_9$, concluímos, seguindo o caminho inverso, que $\omega \ominus p_9 \oplus p'_9 = 0$. Aplicando 1.7, obtemos 1.6, isto é, que existe a sêxtica desejada. \square

A figura abaixo representa um ponto p_9 com a propriedade do teorema:



Se p_1, \dots, p_8 estão em posição geral⁵, denotaremos por \mathcal{C} o pencil de cúbicas por estes oito pontos. Nenhuma cúbica deste pencil é redutível, já que isto faria com que três destes pontos estivessem em uma reta ou seis

⁵aqui, posição geral quer dizer apenas que são oito pontos distintos e dentre eles não há três pontos colineares e nem seis em uma cônica

deles em uma cônica.

Mais ainda, se C é uma cúbica genérica de \mathcal{C} , então C deve ser lisa: caso contrário pelo Primeiro Teorema de Bertini (Teorema 4.2, que será tratado na Seção 4.1.1), todos elementos de \mathcal{C} seriam singulares em algum ponto base dentre os pontos p_1, \dots, p_8, p'_9 . Dois elementos de \mathcal{C} têm pelo menos contato quatro neste ponto base e pelo menos mais sete como soma de contato ao longo dos outros pontos base (p'_9 poderia coincidir com algum dos outros oito pontos base). Então temos soma de contato pelo menos $11 > 9$, violando Bezout. Segue que C é lisa.

Vamos supor que o pencil \mathcal{C} é *genérico*, no sentido de que possui nove pontos base *distintos*. No nosso caso, isso significa que o nono ponto base p'_9 de \mathcal{C} é distinto de p_1, \dots, p_8 . Como todo elemento de \mathcal{C} é irredutível, duas cúbicas do pencil se intersectam transversalmente nestes nove pontos. Em particular, um possível ponto singular de algum elemento de \mathcal{C} está fora dos seus pontos base.

A seguir vamos conectar o estudo deste lugar geométrico com a involução de Bertini.

1.4 A involução de Bertini

Como na seção anterior, nesta seção o pencil de cúbicas \mathcal{C} tem nove pontos base distintos, dentre os quais oito estão em posição geral, e o elemento genérico de \mathcal{C} é liso.

O lugar geométrico construído por Halphen (estudado na seção anterior) está intimamente ligado a uma aplicação birracional involutiva de \mathbb{P}^2 chamada *involução de Bertini*, denotada σ .

Sua definição original é geométrica e simples, porém quando a queremos expressar como transformação birracional:

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (F_0(x_0 : x_1 : x_2) : F_1(x_0 : x_1 : x_2) : F_2(x_0 : x_1 : x_2)),$$

com polinômios homogêneos F_0, F_1, F_2 , temos que empregar polinômios de

grau 17 (conforme será visto a seguir).

Há várias formas de definir a involução de Bertini. A seguinte definição é utilizada em [13].

Definição 1.14. *Fixe oito pontos p_1, \dots, p_8 de \mathbb{P}^2 em posição geral. Considere o pencil \mathcal{C} de cúbicas por estes pontos e seja p'_9 o nono ponto base de \mathcal{C} . Considere o web \mathcal{S} de sêxticas com pontos duplos em p_1, \dots, p_8 .*

Por um ponto $p \in \mathbb{P}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_8, p'_9\}$ passa uma única cúbica $C_p \in \mathcal{C}$. Escolha qualquer sêxtica $S \in \mathcal{S}$ que não contém C_p e que passe por p . Então:

$$C_p \cdot S = 2(p_1 + \dots + p_8) + p + p'$$

Defina uma:

$$\sigma : \mathbb{P}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_8, p'_9\} \rightarrow \mathbb{P}^2$$

onde $\sigma(p) = p'$.

Precisamos mostrar que esta definição independe da sêxtica particular $S \in \mathcal{S}$ escolhida. Seja C_p a cúbica por p e C' uma outra cúbica de \mathcal{C} . As sêxticas com pontos duplos em p_1, \dots, p_8 que passam por p formam um net e, portanto, têm forma geral:

$$\lambda_0 C_p^2 + \lambda_1 C_p C' + \lambda_2 S = 0$$

onde S é a sêxtica não contendo C_p que foi escolhida acima. Portanto a intersecção de C_p com qualquer sêxtica deste net está unicamente determinada pela intersecção com S . Logo σ está bem definida.

Observamos que σ pode ser estendida para p'_9 . Escolhendo qualquer cúbica $C_{p'_9}$ por p'_9 , formamos a sêxtica $S = C'^2 \in \mathcal{S}$, onde C' é outra cúbica de \mathcal{C} . Segue que:

$$C_{p'_9} \cdot S = 2(p_1 + \dots + p_8 + p'_9), \quad \text{com} \quad S = C'^2$$

e, portanto, devemos estender como $\sigma(p'_9) = p'_9$.

A conexão com a construção de Halphen se dá no seguinte corolário:

Corolário 1.15. *Fixe oito pontos p_1, \dots, p_8 de \mathbb{P}^2 em posição geral. O lugar geométrico dos pontos fixos da involução de Bertini determinada por p_1, \dots, p_8 é $\{p'_9\}$ unido com o lugar geométrico dos pontos p_9 tais que p_1, \dots, p_8, p_9 são pontos nodais de uma sêxtica que não contém a cúbica por estes nove pontos.*

DEMONSTRAÇÃO. Existe uma sêxtica S com estes pontos duplos se e somente se:

$$C_{p_9} \cdot S = 2(p_1 + \dots + p_8 + p_9)$$

Isto é, $\sigma(p_9) = p_9$. O ponto p'_9 é um ponto isolado do lugar de pontos fixos de σ e, como visto, produz uma sêxtica redutível. Portanto, excluimos este ponto do lugar geométrico. \square

Algumas curvas especiais serão colapsadas pela involução σ . Para $i = 1, \dots, 8$, seja S_i a sêxtica *racional* ($g = \frac{(6-1)(6-2)}{2} - 3 - 7 = 0$) que tenha ponto triplo em p_i e pontos duplos nos demais sete pontos fixados (o sistema de tais sêxticas tem dimensão projetiva $27 - 3 \cdot 7 - 6 \geq 0$, logo existe pelo menos uma). Seja $p \in S_i \setminus \{p_1, \dots, p_8\}$ e $C_p \in \mathcal{C}$ passando por p . Então

$$C_p \cdot S_i = 2(p_1 + \dots + p_8) + p + p_i$$

Portanto $\sigma(p) = p_i$, para todo ponto p de S_i , isto é, σ colapsa cada curva S_i no ponto p_i .

Também podemos descobrir o grau dos polinômios utilizados para definir σ , que coincide com o grau da curva imagem de uma reta genérica L . Esta curva imagem, $\sigma(L)$, tem pontos 6-uplos em cada p_i , já que $L \cdot S_i = 6$. Seu grau será denotado d . Vamos provar que $d = 17$.

Fatore σ como $\sigma = f_2 \circ f_1^{-1}$, onde $f_1 : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ é o morfismo de contração de oito excepcionais em p_1, \dots, p_8 e $f_2 : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ é o morfismo de contração dos transformados estritos das S_i por f_1^{-1} . Denote $\overline{\sigma(L)}$ o transformado estrito de $\sigma(L)$ por f_2^{-1} e \overline{L} o transformado estrito de uma reta genérica L por f_1^{-1} , ou seja, $\overline{L} = \overline{\sigma(L)}$.

Agora $\overline{\sigma(L)} = f_2^*(dR) - \sum_{j=1}^8 6E_j$, onde E_j são os excepcionais contraídos por f_2 . Então:

$$\begin{aligned} 1 = \overline{L} \cdot \overline{L} &= \left(f_2^*(dR) - \sum_{j=1}^8 6E_j \right) \cdot \left(f_2^*(dR) - \sum_{j=1}^8 6E_j \right) = \\ &= d^2 - 8 \cdot 6^2, \end{aligned}$$

o que implica $d = 17$.

Um outro modo de se ver que que as oito sêxticas racionais S_i acima descritas são as únicas curvas colapsadas a pontos pela Bertini, decorre do fato geral de que numa transformação de Cremona do plano a curva (reduzível) que se colapsa a pontos é dado como zero do determinante Jacobiano da aplicação. No caso, como

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (F_0(x_0 : x_1 : x_2) : F_1(x_0 : x_1 : x_2) : F_2(x_0 : x_1 : x_2)),$$

é dada por F_0, F_1, F_2 de grau 17, seu determinante Jacobiano tem grau $3 \cdot 16 = 48$ e é a união das oito sexticas racionais S_i .

1.4.1 A involução de Bertini em cúbricas lisas

O método de Halphen pode ser utilizado para entender a involução de Bertini em pontos p tais que a cúbrica $C_p \in \mathcal{C}$ por p seja lisa.

Proposição 1.16. *Seja $p \in \mathbb{P}^2$ um ponto tal que a cúbrica $C_p \in \mathcal{C}$ passando por p seja lisa. Trace a reta tangente a C_p em p'_9 e seja q o outro ponto de intersecção desta reta com C_p . Então a reta qp corta C_p em $\sigma(p)$.⁶*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $C_p \in \mathcal{C}$ por p e $S \in \mathcal{S}$ por p , conforme a Definição 1.14. Então:

$$C_p \cdot S = 2(p_1 + \cdots + p_8) + p + \sigma(p)$$

Fixe um ponto de inflexão de C_p e considere o grupo de C_p com este ponto como elemento neutro, denotando por \oplus a soma neste grupo. Pelo

⁶Esta proposição é uma consequência da definição da involução de Bertini dada por dolgachev em [15].

teorema 1.7:

$$2(p_1 \oplus \cdots \oplus p_8) \oplus p \oplus \sigma(p) = 0$$

Como os pontos p_1, \dots, p_8, p'_9 são pontos base de \mathcal{C} , novamente pelo teorema 1.7, temos:

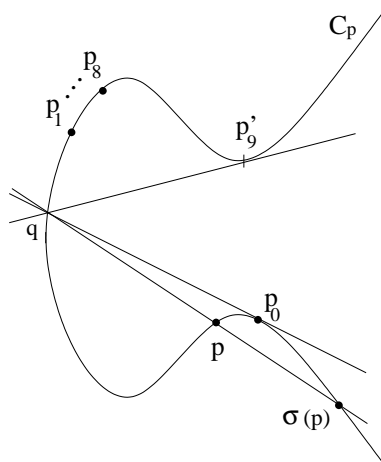
$$p_1 \oplus \cdots \oplus p_8 = \ominus p'_9$$

donde segue que:

$$p \oplus \sigma(p) = 2p'_9$$

Essa igualdade se traduz geometricamente no resultado de que a reta por p e $\sigma(p)$ e a reta tangente a C_p em p'_9 se intersectam em um ponto q da própria curva C_p , como queríamos. \square

A seguinte figura ilustra o que foi dito na proposição e mostra um ponto fixo p_0 da involução, produzindo a mesma construção de Halphen.



1.5 Uma fórmula geral para sêxticas elípticas

Em [19], Halphen encontra também uma expressão geral para sêxticas com nove pontos duplos. A primeira etapa é uma proposição com demonstração semelhante ao Teorema 1.13:

Proposição 1.17 (Halphen).

(i) *Seja p_1, \dots, p_9 pontos duplos de uma sêxtica irredutível e C a única cúbica por eles. Considere uma quártica passando por estes pontos que,*

portanto, corta C em mais outros três, digamos q_1, q_2, q_3 . Então existe uma cônica que toca C em q_1, q_2, q_3 .

(ii) Reciprocamente, suponha que uma cônica toque uma cúbica C em q_1, q_2, q_3 . Uma quártica por estes pontos corta C em outros nove, digamos p_1, \dots, p_9 . Então p_1, \dots, p_9 são pontos duplos de uma sêxtica irreduzível.

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 1.7, como os doze pontos $p_1, \dots, p_9, q_1, q_2, q_3$ são a intersecção de C com uma quártica, então:

$$p_1 \oplus \dots \oplus p_9 \oplus q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 = 0 \quad (1.8)$$

no grupo de C .

Os pontos p_1, \dots, p_9 são os pontos duplos de uma sêxtica irreduzível se e somente se $2(p_1 \oplus \dots \oplus p_9) = 0$ e $p_1 \oplus \dots \oplus p_9 \neq 0$. Utilizando (1.8), esta condição é equivalente a:

$$2(q_1 \oplus q_2 \oplus q_3) = 0 \quad \text{e} \quad q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \neq 0$$

Que por sua vez é equivalente a q_1, q_2, q_3 serem os pontos de contato de C com uma cônica (já que cônicas irreduzíveis são lisas).

□

Também se percebe que Halphen usa uma versão de segunda ordem do Teorema $AF + BG$ de Max Noether:

Teorema 1.18 (M. Noether). *Sejam $f = 0$ e $g = 0$ curvas de \mathbb{P}^2 tais que $V = (f = 0) \cap (g = 0)$ é transversal. Se $h = 0$ é uma curva com pontos duplos nesta intersecção, então existem polinômios a, b e c tais que:*

$$h = af^2 + bfg + cg^2$$

onde $\deg(h) = \deg(af^2) = \deg(bfg) = \deg(cg^2)$.

A única demonstração completa que encontramos deste teorema é uma prova analítica dada em [9].

O objetivo dele é escrever uma fórmula geral de sêxticas elípticas, isto é, uma fórmula dependendo de certos parâmetros que, quando fixados, produzem uma sêxtica elíptica. Isso pode ser feito utilizando a Proposição 1.17 e considerando uma cúbica C_3 tangente a uma cônica em três pontos. Após uma mudança de coordenadas, pode-se supor que estes pontos são $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$ e a cônica é $x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$. Esta cônica é tangente nos três pontos a uma cúbica C_3 se e somente se C_3 tem a forma:

$$C_3 = a_0x_0^2(x_1 + x_2) + a_1x_1^2(x_0 + x_2) + a_2x_2^2(x_0 + x_1) + a_3x_0x_1x_2$$

Seja C_6 a sêxtica procurada, nodal nos nove pontos restantes da intersecção de C_3 com uma quártica C_4 por estes três pontos. Então a curva redutível $x_0x_1x_2C_6$ teria pontos duplos em $C_3 \cap C_4$. Pelo Teorema 1.18, segue que:

$$x_0x_1x_2C_6 = \alpha C_4^2 - \beta C_4C_3 + \gamma C_3^2 \quad (1.9)$$

onde (para manter a notação de Halphen) α, β, γ são polinômios de graus um, dois e três respectivamente.

A equação da quártica C_4 não possui termos em x_0^4, x_1^4, x_2^4 , logo pode ser escrita na forma:

$$C_4 = x_1x_2P + x_0x_2Q + x_0x_1R$$

onde:

$$P = P_{00}x_0^2 + P_{01}x_0x_1 + P_{02}x_0x_2 + P_{11}x_1^2 + P_{12}x_1x_2 + P_{22}x_2^2$$

e analogamente para Q e R . Seja $f(x_0, x_1, x_2)$ o polinômio obtido pela substituição das equações de C_4 e de C_3 no segundo membro de (1.9). Podemos determinar os coeficientes de α, β e γ , através da resolução do

sistema:

$$f(0, x_1, x_2) \equiv 0$$

$$f(x_0, 0, x_2) \equiv 0$$

$$f(x_0, x_1, 0) \equiv 0$$

já que $f(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1x_2C_6$. O aplicativo Maple resolve este sistema e retorna uma solução, onde os coeficientes de α, β e γ são múltiplos de $\frac{\alpha_0}{a_0}$ (onde α_0 é o coeficiente de α em x_0). Portanto simplificamos a solução, pondo $\alpha_0 = a_0$.

Um dos coeficientes de γ fica livre, tornando-se um parâmetro λ do pencil de sêxticas. A solução do sistema é:

$$\alpha = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

$$\begin{aligned} \beta = & (Q_{00} + R_{00})x_0^2 + (R_{11} + P_{11})x_1^2 + (P_{22} + Q_{22})x_2^2 + \\ & + \left(2R_{01} + \frac{P_{11}a_0}{a_1} + \frac{Q_{00}a_1}{a_0}\right)x_0x_1 + \left(2Q_{02} + \frac{R_{00}a_2}{a_0} + \frac{P_{22}a_0}{a_2}\right)x_0x_2 + \\ & + \left(2P_{12} + \frac{Q_{22}a_1}{a_2} + \frac{R_{11}a_2}{a_1}\right)x_1x_2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \lambda x_0x_1x_2 + \frac{Q_{00}R_{00}}{a_0}x_0^3 + \frac{R_{11}P_{11}}{a_1}x_1^3 + \frac{P_{22}Q_{22}}{a_2}x_2^3 + \\ & + \left(2\frac{Q_{00}R_{01}}{a_0} + \frac{P_{11}R_{00}}{a_1}\right)x_0^2x_1 + \left(2\frac{R_{00}Q_{02}}{a_0} + \frac{P_{22}Q_{00}}{a_2}\right)x_0^2x_2 + \\ & + \left(2\frac{R_{11}P_{12}}{a_1} + \frac{Q_{22}P_{11}}{a_2}\right)x_1^2x_2 + \left(2\frac{P_{11}R_{01}}{a_1} + \frac{Q_{00}R_{11}}{a_0}\right)x_1^2x_0 + \\ & + \left(2\frac{P_{22}Q_{02}}{a_2} + \frac{R_{00}Q_{22}}{a_0}\right)x_2^2x_0 + \left(2\frac{Q_{22}P_{12}}{a_2} + \frac{R_{11}P_{22}}{a_1}\right)x_2^2x_1 \end{aligned}$$

A equação (1.9), com α, β, γ determinados por (1.10) produz, isolando C_6 , uma fórmula geral para sêxticas elípticas. Uma escolha de $P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}, a_i$ produz um pencil elíptico de sêxticas com parâmetro λ . Os nove pontos duplos do pencil são determinados pela escolha destas constantes.

Observe que em (1.9), λ multiplica a cúbica C_3 tomada ao quadrado, isto é, o pencil é da forma $S + \lambda C_3^2 = 0$.

Capítulo 2

O Método de Cremona-Sturm-Hilton

Este capítulo tratará de um outro método para descrever o lugar geométrico Δ do nono ponto duplo de uma sêxtica plana, com oito pontos duplos dados em posição geral. Fizeram essa construção Cremona (citado por Bertini) [4], Sturm [27] e Hilton [20], este último sendo a referência principal do capítulo. Esta ideia foi também usada por Godeaux [18] e Gambier [17].

Na primeira seção, será apresentada a *cúbica de Del Pezzo*, uma superfície lisa de \mathbb{P}^3 birracionalmente equivalente a \mathbb{P}^2 . Na segunda seção a construção de Cremona-Sturm-Hilton é reproduzida: surgem na cúbica de Del Pezzo curvas birracionalmente equivalentes às sêxticas de Halphen e a Δ em \mathbb{P}^2 .

2.1 A cúbica de Del Pezzo

A cúbica de Del Pezzo é construída a partir da explosão de seis pontos p_1, \dots, p_6 de \mathbb{P}^2 em posição geral. Seja $\epsilon : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ esta explosão e seja E_i a curva excepcional $\epsilon^{-1}(p_i)$, $i = 1, \dots, 6$, que é isomorfa a \mathbb{P}^1 . Denotaremos por \hat{C} a transformada estrita de uma curva C de \mathbb{P}^2 .

Considere o sistema de cúbicas \mathcal{C} pelos pontos p_1, \dots, p_6 . Por estarem em posição geral, este sistema tem dimensão projetiva $3 = \frac{3(3+3)}{2} - 6$ e, portanto, é gerado por quatro cúbicas C_0, C_1, C_2, C_3 . Definimos a aplicação

racional:

$$T : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (C_0(x_0, x_1, x_2) : \cdots : C_3(x_0, x_1, x_2))$$

Suas indeterminações são os pontos base de \mathcal{C} , isto é, os pontos p_1, \dots, p_6 . Como explicaremos, a explosão $\epsilon : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ destes pontos determina um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \epsilon \swarrow & & \searrow \phi \\ \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \xrightarrow{T} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

onde ϕ é um morfismo (i.e. bem definido em todo X) e $\phi(X)$ será lisa de grau três. A seguinte proposição é mais específica:

Proposição 2.1. *A aplicação $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^3$ é um mergulho e a variedade $S_3 = \phi(X)$ é uma superfície cúbica lisa, chamada cúbica de Del Pezzo.*

Remonta a Clebsch o teorema recíproco, que diz que toda superfície cúbica lisa de \mathbb{P}^3 é uma cúbica de del Pezzo para algum conjunto de seis pontos no plano em posição geral.

Pretendemos agora dar uma boa ideia da demonstração da Proposição 2.1 (para mais detalhes, o leitor pode consultar [3]).

As transformadas estritas das cúbicas do sistema \mathcal{C} formam, em X , um sistema $\hat{\mathcal{C}}$ livre de pontos base (pois os elementos genéricos de \mathcal{C} se separaram). Pelo diagrama acima, a aplicação ϕ fica determinada pelas curvas $\hat{C}_0, \dots, \hat{C}_3$.

Vamos provar agora que a aplicação ϕ é injetiva e é uma imersão (tem diferencial injetiva). Algebricamente essas condições são expressas com duas propriedades de $\hat{\mathcal{C}}$:

- O sistema $\hat{\mathcal{C}}$ *separa pontos* se para cada par $x \neq y$ de pontos de X , existe uma curva de $\hat{\mathcal{C}}$ que passa por x e não passa por y .
- O sistema $\hat{\mathcal{C}}$ *separa direções tangentes* se não ocorre que todas as curvas de $\hat{\mathcal{C}}$ tenham em algum ponto x a mesma direção tangente.

A condição de separar pontos implica que ϕ é injetiva. De fato, se ocorresse $\phi(x) = \phi(y)$, então $(\hat{C}_0(x) : \dots : \hat{C}_3(x)) = (\hat{C}_0(y) : \dots : \hat{C}_3(y))$, donde segue que $\hat{C}_i(x) = \mu \hat{C}_i(y)$, para $i = 0, \dots, 3$ e $\mu \neq 0$. Logo, para qualquer curva $\hat{C} = \sum \lambda_i \hat{C}_i$ de $\hat{\mathcal{C}}$ que passe por x , teríamos:

$$0 = \hat{C}(x) = \sum \lambda_i \hat{C}_i(x) = \sum \lambda_i \mu \hat{C}_i(y) = \mu \hat{C}(y)$$

e \hat{C} passaria por y .

Para o que segue lembre que $x \in \hat{C} \cap E_k$ quando C passa por $\epsilon(E_k) = p_k$ com reta tangente determinada pela direção x .

Para $x \in X \setminus (E_i \cup E_j)$, denote \hat{Q}_{ij}^x a curva passando por x que é o transformado estrito de uma cônica do plano que passa pelos quatro pontos p_k , onde $p_k \in \{p_1, \dots, p_6\} \setminus \{p_i, p_j\}$.

Para $i \neq j$, seja L_{ij} a reta por p_i e p_j . Se $k \neq i, j$, $\hat{L}_{ij} \cap \hat{L}_{ik} = \emptyset$

Vamos provar agora que o sistema \hat{P} separa pontos e direções tangentes.

$\hat{\mathcal{C}}$ separa pontos: Seja $x \neq y$ pontos de X . A ideia é construir uma curva

$$\hat{Q}_{ij}^x \cup \hat{L}_{ij} \in \hat{\mathcal{C}} \quad (2.1)$$

escolhendo $i, j \in \{p_1, \dots, p_6\}$ de modo que esta curva não passe por y (visto que já passa por x). Para $x \in X \setminus \{E_i, E_j, E_k\}$, estão definidas as curvas \hat{Q}_{ij}^x e \hat{Q}_{ik}^x . Como:

$$Q_{ij}^x \cap Q_{ik}^x = \{p_l; l \neq i, j, k\} \cup \{x\}$$

então $\hat{Q}_{ij}^x \cap \hat{Q}_{ik}^x = \{x\}$. Logo, no máximo uma das curvas \hat{Q}_{ij}^x passa por y . Por outro lado, como $\hat{L}_{ij} \cap \hat{L}_{ik} = \emptyset$, então $y \in \hat{L}_{ij}$ para no máximo um valor de j . Portanto existe escolha de i, j para que a cúbica (2.1) não passe por y .

$\hat{\mathcal{C}}$ separa direções tangentes: Seja $x \in X$. Se $x \notin \{E_1, \dots, E_6\}$, considere a cônica Q_i passando pelos pontos $\{p_k; k \neq i\}$. Como $Q_i \cap Q_j = \{p_k; k \neq i, j\}$ então as \hat{Q}_i são disjuntas e $x \in \hat{Q}_i$ para no máximo um va-

lor de i . Denotando por $L_{i_0}^x$ e $L_{i_1}^x$ as retas passando respectivamente por $p_{i_0}, \epsilon(x)$ e por $p_{i_1}, \epsilon(x)$, então as curvas:

$$\hat{Q}_{i_0} \cup \hat{L}_{i_0}^x \in \hat{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \hat{Q}_{i_1} \cup \hat{L}_{i_1}^x \in \hat{\mathcal{C}}$$

têm direções tangentes distintas em x .

Se $x \in E_1$, por exemplo, as cônicas Q_{23}^x e Q_{24}^x se intersectam em p_1, p_5 e p_6 . Logo a intersecção em p_1 tem multiplicidade no máximo 2. Portanto as curvas:

$$\hat{Q}_{23}^x \cap \hat{L}_{23} \quad \text{e} \quad \hat{Q}_{24}^x \cap \hat{L}_{24}$$

de $\hat{\mathcal{C}}$ separam direções tangentes em x .

Isso encerra a prova de que ϕ é um mergulho.

Claramente $S_3 = \phi(X)$ é uma superfície lisa de \mathbb{P}^3 , pois é a imagem por um mergulho de uma variedade lisa de dimensão dois. Para ver que S_3 é cúbica, faremos a intersecção dela com um plano genérico de \mathbb{P}^3 e em seguida com outro plano genérico. Vamos ver que esta intersecção consiste em três pontos.

Lembramos que se um plano tem equação $\sum \lambda_i y_i = 0$, seu *pullback* em \mathbb{P}^2 via T tem equação $\sum \lambda_i C_i = 0$. Portanto a intersecção de S_3 com os planos genéricos é birracional à intersecção em \mathbb{P}^2 de duas cúbicas genéricas do sistema \mathcal{C} em \mathbb{P}^2 . Esta intersecção consiste em nove pontos, sendo seis deles os pontos p_1, \dots, p_6 que foram explodidos. Estes pontos são associados a retas contidas em S_3 , identificadas com conjuntos de direções. Portanto um destes pontos fará parte da intersecção em $X \subset \mathbb{P}^3$ unicamente se as duas cúbicas tiverem as mesmas direções nele. Mas o fato dos planos serem genéricos produz cúbicas genéricas de \mathcal{C} , que são transversais em p_1, \dots, p_6 . Além disso, implica que os outros três pontos de intersecção são distintos de p_1, \dots, p_6 e, portanto, são isomorfos a três pontos de S_3 . Portanto S_3 é de fato uma cúbica.

2.1.1 A involução de Bertini segundo L. Cremona

No artigo original de Bertini de 1877 [4] descobrimos, na página 273, que Luigi Cremona já considerava essa involução, mas a via diretamente na cúbica de Del Pezzo $S_3 = T(\mathbb{P}^2)$, produzida por explosão de seis pontos p_1, \dots, p_6 em posição geral.

Esses pontos são tomados de um conjunto de oito pontos p_1, \dots, p_8 em posição geral, onde a imagem de p_7 e de p_8 na superfície cúbica será denotada a seguir por $T(p_7) = p'_7$ e $T(p_8) = p'_8$.

Para motivar o modo como Cremona considera essa involução, lembro que pares x, x' relacionados por uma involução da *reta* projetiva complexa ficam determinados pela intersecção dessa reta com um *pencil* de cônicas do plano. Como veremos, Cremona considera os pares de pontos x, x' do *plano* relacionados pela Bertini como resultado de intersectar a imagem birracional S_3 do plano com um certo *net* de cônicas do espaço projetivo.

Para ver isso, considere o sistema de superfícies quádricas em \mathbb{P}^3 com dois contatos com S_3 em p'_7 e p'_8 . Como o sistema completo de quádricas tem dimensão 9 e esses dois contatos contam como $2 \cdot 3 = 6$ condições lineares, existe um web de quádricas Q_2 tangente a S_3 nestes dois pontos. Considere as curvas de grau 4 produzidas intersectando duas a duas as quádricas deste web: cada uma destas curvas C'_4 possui dois pontos singulares em p'_7 e p'_8 (as tangências das quádricas nesses dois pontos com S_3 implicam que as quádricas são tangentes entre si e portanto suas curvas de intersecção não são lisas nesses pontos).

No que segue, nos fixaremos nas C'_4 que são intersecção de um par de elementos genéricos do web Q_2 , em particular, em que o par de elementos do web usado para formar C'_4 seja liso. Denote Q um deles. Sendo curva de Q , o *gênero aritmético* da C'_4 pode ser calculado como:

$$p_a(C'_4) = 1 + \frac{C'_4 \cdot (C'_4 + K_Q)}{2}.$$

Como Q é isomorfa ao produto de duas retas projetivas, nela uma curva não

tem um grau, mas sim um *bi-grau*. No caso de C'_4 seu bi-grau é $(2, 2)$. Por outro lado, o divisor canônico K_Q tem bi-grau $(-2, -2)$. Logo $p_a(C'_4) = 1$.

Mas as duas singularidades de C'_4 fazem que o seu *gênero geométrico* seja $p_a(C'_4) - 1 - 1 = -1$ e esse gênero negativo implica que C'_4 é uma curva redutível.

A princípio C'_4 pode ser tanto uma união de duas cônicas como uma cúbica unida a uma reta. No primeiro caso são duas curvas de bi-grau $(1, 1)$ de Q , que se intersectam em 2 pontos de Q ; no segundo caso a cúbica é uma curva de bi-grau $(2, 1)$ e a reta é uma reta de um dos rulings, no caso uma de bi-grau $(0, 1)$ (para que intersecte a cúbica em apenas dois pontos: p'_7, p'_8).

Mas, no primeiro caso, a reta $L \subset C'_4 \subset Q$ será tangente a S_3 em p'_7 e p'_8 . Logo Bézout implica que $L \subset S_3$. Ora, S_3 tem exatamente 27 retas e portanto p'_7 e p'_8 não estão em posição geral em S_3 : contradição.

Logo C'_4 se decompõe como duas cônicas $C'_4 = C_{2,1} \cup C_{2,2}$, cada uma delas tangente a S_3 em p'_7 e em p'_8 como ilustra a figura (onde os planos ilustram os planos tangentes de S_3):

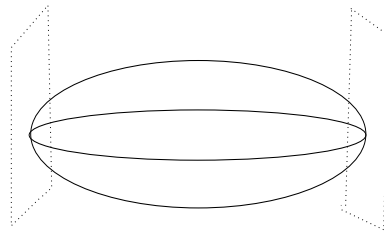


Figura: as cônicas $C_{2,1}$ e $C_{2,2}$

Por Bézout, genericamente as cônicas $C_{2,i}$ possuem duas intersecções extras com S_3 , denotadas no que segue X e X' , além de p'_7 e p'_8 . Note que o plano $\langle X, p'_7, p'_8 \rangle$ contém a $C_{2,i}$ que passa por X (por Bézout). Em particular $\langle X, p'_7, p'_8 \rangle$ contém o X' pertencente à mesma $C_{2,i}$.

Cônicas tangentes em dois pontos fixados a dois planos fixados em \mathbb{P}^3 formam um net: de fato, a reta ligando os dois pontos pertence a um pencil de planos e em cada um desses planos há um pencil de cônicas que são tangentes em dois pontos.

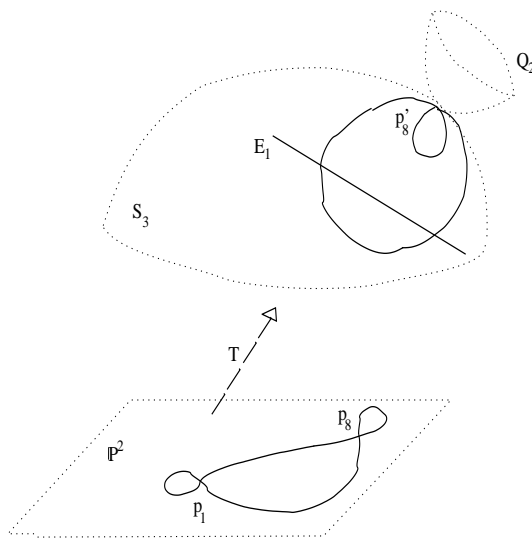
Variando as cônicas nesse net, os pontos X e X' cobrem S_3 , produzindo pares X, X' de S_3 em involução.

Vamos agora relacionar esses pares $X, X' \in S_3$ com pares em involução no plano projetivo.

As quádricas do web Q_2 , ao serem intersectadas com S_3 , dão origem a um web de curvas espaciais de grau seis $Q_2 \cap S_3$ com duas singularidades nodais em p'_7 e p'_8 (pela existência de tangências de superfícies nesses dois pontos). Após seis contrações de retas excepcionais produzimos o plano a partir de S_3 . Afirmamos que obtemos delas um web de sêxticas planas

$$C_6 = T_*^{-1}(Q_2 \cap S_3)$$

com pontos nodais nos oito pontos p_1, \dots, p_8 . Daremos mais detalhes sobre o efeito das contrações em curvas na próxima seção (Lema 2.2), justificando então que o grau no plano ainda é 6. Mas o fato de que as seis retas excepcionais em S_3 estão mergulhadas no espaço linearmente, e portanto cortando cada quádrica de Q_2 em dois pontos, já explica que as seis contrações geram mais seis pontos nodais de C_6 . Veja a seguinte figura ilustrando isso:



Agora note que cada quádrica de Q_2 que passa por $X \in C_{2,i} \setminus \{p'_7, p'_8\}$ contém toda $C_{2,i}$ (por Bézout, pois $1 + 2 + 2 = 5 > 4 = C_{2,i} \cdot Q_2$). Em particular, Q_2 passa pelo segundo $X' \in C_{2,i} \setminus \{p'_7, p'_8\}$. Ou seja, as sêxticas

do *net* de sexticas $C_6 = T_*^{-1}(Q_2 \cap S_3)$ que passam por $x = T^{-1}(X)$ passam também por $x' = T^{-1}(X')$.

Ademais, como $\langle X, p'_7, p'_8 \rangle$ contém o par X, X' de $C_{2,i}$, então a cúbica plana

$$T_*^{-1}(\langle X, p'_7, p'_8 \rangle \cap S_3)$$

contém $x = T^{-1}(X)$ e $x' = T^{-1}(X')$. Ora, foi assim que definimos anteriormente a Bertini no plano $x \mapsto x'$. Logo os pares X, X' podem ser vistos como levantamento da Bertini à Del Pezzo.

Cremona afirma que é *facile vedere* que o lugar de pontos fixos da involução na Del Pezzo (onde $X = X'$) é uma curva espacial de grau nove com pontos triplos em p'_7, p'_8 . O significado de *facile vedere* é o conteúdo da próxima seção e da Seção 3.1.1.

2.2 O teorema de Hilton

A construção das cúbricas de Del Pezzo permite encontrar uma curva em $S_3 = \phi(X) = T(\mathbb{P}^2)$ birracional à Δ . Dados $p_1, \dots, p_8 \in \mathbb{P}^2$ em posição geral, podemos considerar a cúbica de Del Pezzo criada pela explosão de seis destes pontos, por exemplo, os seis primeiros.

Seções quádricas da cúbica produzem curvas birracionalmente equivalentes a sêxticas planas. Hilton encontrou uma condição sobre estas curvas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ para que as sêxticas planas tenham nove pontos duplos. Em seguida traduziu esta condição para o plano projetivo e encontrou a curva Δ .

O seguinte lema explica como uma curva contida na cúbica de Del Pezzo é mapeada no plano (denoto $T_*^{-1}(C)$ o transformado estrito por T^{-1}):

Lema 2.2. *Seja $p_1, \dots, p_8 \in \mathbb{P}^2$ em posição geral. Seja S_3 a cúbica de Del Pezzo construída a partir da explosão de p_1, \dots, p_6 e seja T a aplicação birracional de \mathbb{P}^2 sobre S_3 , que é um isomorfismo em $S_3^* := S_3 \setminus \cup_{i=1}^6 E_i$. Então:*

(a) Seja a sêxtica espacial $C'_6 = S_3 \cap H_2$, onde H_2 é uma superfície quádrlica que não contém as retas E_i . Então $T_*^{-1}(C'_6)$ é uma sêxtica de \mathbb{P}^2 nodal em p_1, \dots, p_6 . Se $p' \in S_3 \setminus \cup_{i=1}^6 E_i$ for um ponto de contato entre H_2 e S_3 , então $T_*^{-1}(C'_6)$ será nodal também em $T^{-1}(p')$.

(b) Seja $C'_9 = S_3 \cap H_3$, onde H_3 é uma superfície cúbica que não contém as retas E_i . Então $T_*^{-1}(C'_9)$ é uma nônica de \mathbb{P}^2 com pontos triplos em p_1, \dots, p_6 . Se $p' \in S_3 \setminus \cup_{i=1}^6 E_i$ for um ponto de 2-contato entre H_3 e S_3 , então $T_*^{-1}(C'_9)$ terá um ponto triplo também em $T^{-1}(p')$.

DEMONSTRAÇÃO. Considere uma curva contida na cúbica S_3 . O grau desta curva em \mathbb{P}^3 é o número de pontos de sua intersecção com um plano genérico. O pullback deste plano será uma cúbica plana genérica passando pelos pontos p_1, \dots, p_6 . Faremos esta intersecção em \mathbb{P}^2 e consideraremos sua imagem birracional em S_3 . Denote por $T_*^{-1}(C')$ a transformada estrita em \mathbb{P}^3 de C' por T^{-1} .

No caso (a), a quádrlica H_2 intersecta cada reta excepcional E_i em dois pontos (contados com multiplicidade). Portanto a curva $T_*^{-1}(C'_6)$ é nodal em p_1, \dots, p_6 . Considere agora a intersecção desta curva com uma cúbica genérica de \mathbb{P}^2 . Como a cúbica é genérica, podemos supor que a sua direção tangente nos pontos p_1, \dots, p_6 é transversal às direções tangentes da curva nodal. Portanto o índice de intersecção nestes pontos é dois, isto é, os pontos p_1, \dots, p_6 contribuem com doze intersecções. Estas intersecções desaparecem em \mathbb{P}^3 com a explosão dos pontos.

A intersecção de C'_6 com um plano genérico de \mathbb{P}^3 produz seis pontos fora das retas excepcionais. Portanto o número de intersecção em \mathbb{P}^2 é $12 + 6 = 18$. Como a intersecção é feita com uma cúbica, o grau de $T_*^{-1}(C'_6)$ é seis.

Se p' é um ponto de contato entre H_2 e S_3 , a curva C'_6 será nodal neste ponto. Como $p' \notin E_i$, a sêxtica plana $T_*^{-1}(C'_6)$ será nodal em $T^{-1}(p')$.

No caso (b), a superfície cúbica H_3 intersecta cada reta E_i em três pontos (contados com multiplicidade), produzindo pontos triplos em p_1, \dots, p_6 . Es-

tes pontos contabilizam 18 intersecções com uma cúbica genérica, enquanto que o número de intersecção em \mathbb{P}^3 é nove. Portanto $T_*^{-1}(C'_9)$ intersecta a cúbica genérica em $18 + 9 = 27$ pontos e, portanto, tem grau nove.

Um contato de ordem dois entre H_2 e S_3 em p' produz, em C'_9 um ponto triplo. Como T é um isomorfismo próximo a este ponto, a nônica $T_*^{-1}(C'_9)$ terá um ponto triplo em $T^{-1}(p')$. \square

Considere então quádricas H_2 tangentes a S_3 em dois pontos $T(p_7), T(p_8)$. Note que elas formam um web. De fato, o espaço das quádricas em \mathbb{P}^3 tem dimensão projetiva 9 e estas duas tangências impõem 6 condições. Isso pode ser entendido assim: como estes dois pontos estão em posição geral, então as condições lineares impostas por estes contatos são independentes e, em cada um deles, somam 3 condições lineares. De fato, podemos pensar localmente, $S_3 : Z = Z(X, Y)$, e estamos fixando $Z(0, 0), Z_X(0, 0), Z_Y(0, 0)$.

Hilton encontrou o lugar geométrico de um terceiro ponto de contato entre H_2 e S_3 . Na demonstração do Teorema referente a este lugar geométrico, será feita uma mudança de coordenadas, que é explicada no seguinte lema:

Lema 2.3. *Sejam pontos genéricos p_7 e p_8 de \mathbb{P}^2 . Sejam $T(p_7)$ e $T(p_8)$ em \mathbb{P}^3 . Então existe uma transformação linear L de \mathbb{P}^3 que mande $T(p_7)$ em $(0 : 0 : 1 : 0)$ e $T(p_8)$ em $(0 : 0 : 0 : 1)$, de modo que os planos tangentes a $L(S_3)$ nestes pontos sejam, respectivamente, $X_3 = 0$ e $X_2 = 0$ nestas novas coordenadas.*

DEMONSTRAÇÃO. Tome inicialmente uma transformação linear L_1 de \mathbb{P}^3 que mande $T(p_7)$ em $(0 : 0 : 1 : 0)$ e que mande $T(p_8)$ em $(0 : 0 : 0 : 1)$. Ou seja que estaremos em novas coordenadas projetivas, ainda denotadas por $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

Calcule os planos tangente de $L_1(S_3)$ em $(0 : 0 : 1 : 0)$ e em $(0 : 0 : 0 : 1)$:

$$\mathbf{T}_{(0:0:1:0)}L_1(S_3) : \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = 0$$

onde de fato $\alpha_2 = 0$, pois esse plano tem que passar por $(0 : 0 : 1 : 0)$. Bem como:

$$\mathbf{T}_{(0:0:0:1)}L_1(S_3) : \quad \beta_0x_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 = 0$$

onde de fato $\beta_3 = 0$, pois esse plano tem que passar por $(0 : 0 : 0 : 1)$.

Como $T(p_7)$ e $T(p_8)$ são genéricos sobre S_3 , então:

$$(0 : 0 : 1 : 0) \notin \mathbf{T}_{(0:0:0:1)}L_1(S_3) \quad \text{e} \quad (0 : 0 : 0 : 1) \notin \mathbf{T}_{(0:0:1:0)}L_1(S_3),$$

o que se traduz acima como

$$\beta_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_3 \neq 0.$$

Então considere a seguinte mudança de coordenadas em \mathbb{P}^3 :

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 & X_2 &= \frac{1}{\beta_2} \cdot (\beta_0x_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2) \\ X_1 &= x_1 & X_3 &= \frac{1}{\alpha_3} \cdot (\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_3x_3) \end{aligned}$$

que é produzida pela transformação linear L_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_0}{\beta_2} & \frac{\beta_1}{\beta_2} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha_0}{\alpha_3} & \frac{\alpha_1}{\alpha_3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cujos determinante é 1.

Note então que nessas novas coordenadas $(X_0 : X_1 : X_2 : X_3)$, os pontos são $(0 : 0 : 1 : 0)$ com plano tangente $X_3 = 0$ e $(0 : 0 : 0 : 1)$ com plano tangente $X_2 = 0$. \square

Eis agora o resultado de Hilton.

Teorema 2.4 (Hilton). *Fixe dois pontos genéricos de S_3 e considere as superfícies quádricas H_2 tangentes a S_3 nestes pontos. Então estas superfícies formam um web de quádricas e existe uma superfície cúbica H_3*

tal que $H_3 \cap S_3$ é o lugar geométrico dos pontos p que são um terceiro ponto de contato de S_3 com algum elemento do web de quádricas.

DEMONSTRAÇÃO. Fazendo a mudança de coordenadas L do Lema 2.3, podemos supor que os dois pontos fixados são $(0 : 0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 0 : 1)$ e que os plano tangentes a S_3 nestes pontos sejam, respectivamente, $x_3 = 0$ e $x_2 = 0$. Quádricas em \mathbb{P}^3 têm equação genérica:

$$a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_0x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_1x_3 + a_7x_2^2 + a_8x_2x_3 + a_9x_3^2 = 0 \quad (2.2)$$

e suas derivadas parciais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial x_0} &= 2a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} &= a_2x_0 + a_5x_1 + 2a_7x_2 + a_8x_3 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} &= a_1x_0 + 2a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 & \frac{\partial H_2}{\partial x_3} &= a_3x_0 + a_6x_1 + a_8x_2 + 2a_9x_3 \end{aligned}$$

Como H_2 toca S_3 nos dois pontos fixados, seus planos tangentes nestes pontos também são $x_3 = 0$ e $x_2 = 0$. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial x_0}(0 : 0 : 1 : 0) = 0 &\Rightarrow a_2 = 0 & \frac{\partial H_2}{\partial x_0}(0 : 0 : 0 : 1) = 0 &\Rightarrow a_3 = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1}(0 : 0 : 1 : 0) = 0 &\Rightarrow a_5 = 0 & \frac{\partial H_2}{\partial x_1}(0 : 0 : 0 : 1) = 0 &\Rightarrow a_6 = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_2}(0 : 0 : 1 : 0) = 0 &\Rightarrow a_7 = 0 & \frac{\partial H_2}{\partial x_2}(0 : 0 : 0 : 1) = 1 &\Rightarrow a_8 = 1 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_3}(0 : 0 : 1 : 0) = 1 &\Rightarrow a_8 = 1 & \frac{\partial H_2}{\partial x_3}(0 : 0 : 0 : 1) = 0 &\Rightarrow a_9 = 0 \end{aligned}$$

Mudando a notação, segue que há um web de quádricas:

$$H_2 : ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2 + 2x_2x_3 = 0$$

que já passa pelos dois pontos dados.

O ponto p é um ponto de contato de S_3 e H_2 se e somente se:

$$\left(\frac{\partial S_3}{\partial x_0}(p) : \frac{\partial S_3}{\partial x_1}(p) : \frac{\partial S_3}{\partial x_2}(p) : \frac{\partial S_3}{\partial x_3}(p) \right) = \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_0}(p) : \frac{\partial H_2}{\partial x_1}(p) : \frac{\partial H_2}{\partial x_2}(p) : \frac{\partial H_2}{\partial x_3}(p) \right)$$

ou, equivalentemente, se existe $(\lambda : \mu) \in \mathbb{CP}^1$ tal que:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial S_3}{\partial x_0}(p) &= \mu(ax_0 + bx_1) \\ \lambda \frac{\partial S_3}{\partial x_1}(p) &= \mu(bx_0 + cx_1) \\ \lambda \frac{\partial S_3}{\partial x_2}(p) &= \mu x_3 \\ \lambda \frac{\partial S_3}{\partial x_3}(p) &= \mu x_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

As duas últimas equações implicam que o ponto p pertence à cúbica:

$$H_3 : \quad x_2 \frac{\partial S_3}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial S_3}{\partial x_3} = 0$$

Reciprocamente, se p pertence a H_3 , existem constantes a , b e c tais que p satisfaz (2.3). Logo existe uma quádrlica H_2 tangente a S_3 nos dois pontos dados e em p . Observe que são impostas duas condições a estas três constantes, portanto existe um pencil de tais quádrlicas. \square

O método de Hilton constrói curvas espaciais cujas imagens birracionalmente são sêxticas planas com oito pontos duplos fixados. Pode haver sêxticas planas que não são detectadas por este método? O sistema de sêxticas planas com oito pontos duplos em posição geral tem dimensão projetiva três. Em \mathbb{P}^3 , as quádrlicas tangentes a S_3 em dois pontos são da forma:

$$ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2 + 2dx_2x_3 = 0$$

como foi visto na demonstração do Teorema acima. Um parâmetro d foi adicionado, pois o sistema estava na forma afim. Observe que esta descrição equivale, em \mathbb{P}^2 , ao sistema 3.1. Portanto *todas sêxticas planas com os oito pontos duplos são descritas pelo método de intersecções em \mathbb{P}^3 .*

Hilton considerou o lugar de um terceiro ponto de contato entre H_2 e S_3 , produzindo um ponto duplo na curva $H_2 \cap S_3$. Porém, se H_2 for singular este ponto também será duplo na curva intersecção. Mesmo a ocorrência de contato sendo o caso mais geral, a outra possibilidade será considerada:

Lema 2.5. *Suponha que $T(p_7)$ e $T(p_8)$ são pontos de contato entre H_2 e S_3 . Se p for um ponto duplo de H_2 , então $p \in H_3$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela demonstração do teorema anterior, estes dois pontos de contato implicam que H_2 tem equação:

$$ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2 + 2x_2x_3 = 0$$

Se um ponto $p = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ é duplo de H_2 , então:

$$ax_0 + bx_1 = 0 \quad bx_0 + cx_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$$

Como $x_2 = x_3 = 0$, $p \in H_3$. □

Com estas observações concluimos, de fato, que a curva $\Delta = T_*^{-1}(H_3 \cap S_3)$ é o lugar geométrico em \mathbb{P}^2 de nonos pontos duplos de sêxticas nodais em p, \dots, p_8 .

Uma vantagem deste método é de produzir uma equação para a superfície H_3 . Utilizando a expressão explícita da aplicação T , pode-se obter a equação de Δ , dados os oito pontos p_1, \dots, p_8 .

Se a curva espacial de grau nove $H_3 \cap S_3$ não contém nenhuma das seis retas excepcionais E_i , então aplicamos o Lema 2.2, parte (b), e concluimos que $T_*^{-1}(H_3 \cap S_3)$ é uma curva de grau de nove com pontos triplos em p_1, \dots, p_6 .

Como a curva Δ é um lugar geométrico que depende somente dos pontos p_1, \dots, p_8 , ela pode ser levantada a outra cúbica de Del Pezzo S'_3 obtida através da explosão de, por exemplo, p_3, \dots, p_8 . Obtemos também, da mesma forma, uma cúbica H'_3 . Se a curva espacial $S'_3 \cap H'_3$ também não contém as retas excepcionais E'_i , concluimos que Δ possui pontos triplos

em p_3, \dots, p_8 .¹

Estas observações indicam na direção de que Δ seja uma curva de grau nove com pontos triplos em p_1, \dots, p_8 . Na Seção 3.1.1, serão feitos esclarecimentos a respeito da hipótese de as curvas espaciais de grau nove não conterem as retas excepcionais.

2.2.1 Aspecto algorítmico

Existe um algoritmo explícito para determinar a equação da cúbica de Del Pezzo S_3 em função dos seis pontos explodidos. Ele remonta a Coble [11] e foi exposto mais recentemente por Oliver Labs, [23]. Em particular, neste algoritmo se dá uma base adequada do espaço de cúbicas pelos seis pontos.

A princípio, para este algoritmo funcionar, os seis pontos estão em posição geral (distintos, três a três não colineares e não sobre uma cônica), mas de fato o mesmo algoritmo produz equações de superfícies cúbicas *singulares* em diversos casos em que há perda da posição geral.

Combinado com o Teorema 2.4, concluímos:

Dados oito pontos em posição geral no plano, existe um algoritmo explícito para determinar a equação de Δ : basta combinar o algoritmo de Coble com o algoritmo que aparece na demonstração do Teorema 2.4.

Pude facilmente implementar isso no Maple e em geral a equação explícita de Δ é bastante grande.

Por fim, as versões algorítmicas do Teorema de Clebsch para “descer” de uma cúbica lisa em \mathbb{P}^3 para \mathbb{P}^2 dependem de se localizar retas na superfície, o que nem sempre é fácil.

¹Se soubéssemos que Δ tem oito pontos triplos, ficaria claro, pois T é um isomorfismo em torno de p_7 e p_8 . Provaremos esta propriedade de Δ na Seção 3.1.1

Capítulo 3

O Método de Cayley-Hodgkinson

Este Capítulo trata do método analítico desenvolvido por Cayley, redescoberto por Hodgkinson. Na primeira seção serão feitas algumas observações sobre sistemas lineares.

Na segunda seção será estudado o lugar do nono ponto duplo de curvas sêxticas, onde estarei seguindo o artigo de Hodgkinson [21].

Na quarta seção, o método será repetido para encontrar o lugar do oitavo ponto nodal de uma superfície quártica de \mathbb{P}^3 , assunto estudado por Cayley em [7].

3.1 A curva dianodal

Suponha dados oito pontos de \mathbb{P}^2 em posição geral. Considere o pencil de cúbicas \mathcal{C} , descrito por $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$, passando pelos oito pontos dados. Como foi observado na Seção 1.3.1, o pencil \mathcal{C} possui elemento genérico liso e toda cúbica de \mathcal{C} é irredutível. A menos de mudança de geradores, podemos também supor que C_1 e C_2 são lisos. Como na Seção 1.3.1, supomos que o nono ponto base de \mathcal{C} é distinto dos oito primeiros.

A partir do sistema das sêxticas nodais em p_1, \dots, p_8 , derivamos condições para que exista alguma sêxtica irredutível com um nono ponto duplo.

O sistema de sêxticas com oito pontos duplos tem dimensão projetiva :

$$\frac{6(6+3)}{2} - 8 \cdot \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

(conforme é visto no Apêndice B).

Isto é, o sistema fica definido por quatro sêxticas linearmente independentes. Se C_1 e C_2 são duas cúbicas distintas do pencil de cúbicas pelos oito pontos, então as curvas C_1^2 , C_1C_2 , C_2^2 são sêxticas independentes do sistema. A outra sêxtica pode ser obtida da seguinte forma:

Uma cúbica fica determinada por 9 condições lineares ($9 = \frac{3(3+3)}{2}$). Considere então a única cúbica C' passando pelos 6 primeiros pontos e nodal ($3 = \frac{2(2+1)}{2}$ condições) no sétimo e a única cúbica C'' passando também pelos 6 primeiros, mas nodal no oitavo.

Observe que essas duas cúbicas C' e C'' não pertencem ao pencil gerado por $\lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 = 0$: de fato, se por exemplo C' fizesse parte, então

$$C' \cdot (\lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 = 0) \geq 6 + 2 + 1 + 1 = 10,$$

(onde $1 + 1$ representa a contribuição do oitavo ponto e do nono ponto-base do pencil $\lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 = 0$). Ora, por Bézout teríamos uma componente de C' parte fixa desse pencil, e retirando-o obteríamos um pencil de cônicas ou de retas por oito pontos em posição geral: absurdo.

A sêxtica que falta então pode ser tomada como $S = C'C''$. Conseqüentemente, a equação geral de uma sêxtica com os 8 pontos duplos é:

$$2a_1S + a_2C_1^2 + 2a_3C_1C_2 + a_4C_2^2 = 0 \quad (3.1)$$

Suponha que exista um nono ponto duplo p para uma sêxtica de (3.1), e que *esse ponto p não seja o nono ponto-base de $\lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 = 0$* (como foi observado na Seção 1.3.1, se o ponto base for o nono ponto duplo, a sêxtica será redutível).

Então considerando o gradiente de (3.1) obtemos três equações a serem verificadas por p :

$$2a_1 \frac{\partial S}{\partial x_0}(p) + 2a_2C_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_0}(p) + 2a_3C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_0}(p) + 2a_3C_1 \frac{\partial C_2}{\partial x_0}(p) + 2a_4C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_0}(p) = 0$$

$$2a_1 \frac{\partial S}{\partial x_1}(p) + 2a_2C_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_1}(p) + 2a_3C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_1}(p) + 2a_3C_1 \frac{\partial C_2}{\partial x_1}(p) + 2a_4C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_1}(p) = 0$$

$$2a_1 \frac{\partial S}{\partial x_2}(p) + 2a_2 C_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_2}(p) + 2a_3 C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_2}(p) + 2a_3 C_1 \frac{\partial C_2}{\partial x_2}(p) + 2a_4 C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_2}(p) = 0$$

Módulo outra escolha de C_1 , podemos supor que C_1 é o membro do pencil de cúbicas pelos 8 pontos que passa pelo ponto p . Desse modo, as equações anteriores podem ser postas em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_0}(p) & C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_0}(p) & C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_0}(p) \\ \frac{\partial S}{\partial x_1}(p) & C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_1}(p) & C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_1}(p) \\ \frac{\partial S}{\partial x_2}(p) & C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_2}(p) & C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_2}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como p não é ponto-base, $C_2(p) \neq 0$ e portanto o ponto p será um nono ponto duplo de uma sêxtica de (3.1) se e somente se:

- $(a_1, a_3, a_4) = \mathbf{0}$: Neste caso a sêxtica de (3.1) vira $C_1^2 = 0$, portanto uma cúbica dupla. Esta solução não nos interessa por ser redutível.
- $(a_1, a_3, a_4) \neq \mathbf{0}$: Portanto p pertence à curva de grau nove definida por:

$$\Delta : \begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_0} & \frac{\partial C_1}{\partial x_0} & \frac{\partial C_2}{\partial x_0} \\ \frac{\partial S}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

Esta curva foi denominada por Cayley de *curva dianodal dos oito pontos*. Em seguida será provado que este determinante não é identicamente nulo.

Por construção, a sêxtica S_p de (3.1) formada a partir de um nono ponto $p \in \Delta$ não é da forma C^2 , para C a cúbica de \mathcal{C} por p , pois $(a_1, a_3, a_4) \neq \mathbf{0}$. Logo podemos definir um pencil de sêxticas nodais nos nove pontos:

$$\lambda S_p + \mu C^2 = 0$$

onde C é a única cúbica pelos nove pontos (os oito dados e p). Como definido na Seção 1.3.1, este pencil é um *pencil de Halphen de sêxticas*.

3.1.1 Primeiras propriedades da dianodal

Lema 3.1. *Seja p'_9 é o nono ponto base do pencil de cúbicas \mathcal{C} , então $\Delta(p'_9) \neq 0$. Em particular, o determinante que define Δ não é identicamente nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja p'_9 o nono ponto base ($C_1(p'_9) = C_2(p'_9) = 0$). Se, por absurdo, $p'_9 \in \Delta$, então, pela fórmula de Euler:

$$0 = (x_0\Delta)(p'_9) = \begin{vmatrix} x_0 \frac{\partial S}{\partial x_0} & x_0 \frac{\partial C_1}{\partial x_0} & x_0 \frac{\partial C_2}{\partial x_0} \\ \frac{\partial S}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} (p'_9) = \begin{vmatrix} 6S & 0 & 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} (p'_9)$$

Afirmamos primeiro que $S(p'_9) \neq 0$. De fato, lembrando que $S = C'C''$, sendo que C' e C'' não fazem parte do pencil de cúbicas pelos oito pontos, vamos supor por absurdo que $C'(p'_9) = 0$. Escolhendo um outro ponto $p' \in C'$ tal que a cúbica $C_{p'}$ do pencil $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ passando por p' seja irredutível, concluímos que:

$$C' \cdot C_{p'} \geq 6 + 2 + 1 + 1 = 10$$

visto que C' foi tomada passando por p_1, \dots, p_6 , e nodal em p_7 , assim como passa também pelos pontos p'_9 e p' . Como $C_{p'}$ é irredutível, segue que as cúbicas C' e $C_{p'}$ são iguais, o que contradiz o fato de C' não ser um elemento do pencil.

Como $S(p'_9) \neq 0$, p'_9 anula o menor 2×2 acima. O mesmo raciocínio com $(x_1\Delta)(p'_9)$ e com $(x_2\Delta)(p'_9)$ implica a anulação dos outros dois menores. A anulação dos três menores implica que a matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x_0} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x_0} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (p'_9)$$

tem posto menor que dois. Como consequência existem constantes μ_1 e μ_2

tais que:

$$\mu_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_i}(p'_9) + \mu_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_i}(p'_9) = 0$$

para $i = 0, 1, 2$. Portanto p'_9 é um ponto singular da cúbica $\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 \in \mathcal{C}$. Mas supomos que \mathcal{C} tem pontos base distintos. E foi visto na Seção 1.5 que isso implica que um elemento de \mathcal{C} não pode ser singular em um ponto base. Contradição. \square

No seguinte lema provamos que efetivamente a curva dianodal só depende dos oito pontos em posição geral pré-fixados.

Lema 3.2. *A curva dianodal Δ independe da escolha das curvas C_1, C_2 e S .¹*

DEMONSTRAÇÃO. Uma outra cúbica do pencil seria da forma $C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2$. Tomando as derivadas parciais de C_3 , obtemos uma combinação linear das derivadas de C_1 e C_2 . Através de escalonamentos, concluimos que a nova matriz satisfaz $\Delta' = \lambda J$. Logo a curva determinada é a mesma.

Da mesma forma, a sêxtica especial que tomamos $S = C' C''$ pode ser trocada por outra. Uma outra sêxtica tem a forma:

$$S' = 2\lambda_1 S + \lambda_2 C_1^2 + 2\lambda_3 C_1 C_2 + \lambda_4 C_2^2 = 0$$

e, portanto, suas derivadas parciais serão da forma:

$$\frac{\partial S'}{\partial x_i}(p) = 2\lambda_1 \frac{\partial S}{\partial x_i}(p) + 2\lambda_2 C_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_i}(p) + 2\lambda_3 C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_i}(p) + 2\lambda_3 C_1 \frac{\partial C_2}{\partial x_i}(p) + 2\lambda_4 C_2 \frac{\partial C_2}{\partial x_i}(p)$$

Novamente, através de escalonamentos obtemos que a nova matriz satisfaz $\Delta' = 2\lambda_1 \Delta$ e, portanto, define a mesma curva. \square

Em sua segunda Memória [8], Cayley afirma que a curva dianodal tem pontos duplos (“nodes”) nos oito pontos dados. Ou trata-se de um erro de impressão ou ele quis dizer um “cubic-node”, termo que ele usa para pontos triplos.

¹Os clássicos chamam $\Delta = 0$ um *covariante* do net gerado por C_1, C_2, S .

Conforme Halphen e Hodgkinson observaram:

Proposição 3.3. *A curva dianodal tem pelo menos pontos triplos nos oito pontos dados.*²

DEMONSTRAÇÃO. Seja $q = (x'_0 : x'_1 : x'_2)$ um dos oito pontos dados. Então $C_1(q) = C_2(q) = 0$ e q é um ponto duplo da sêxtica S . Suponha que $x'_0 \neq 0$. Queremos provar que:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_0^2}(q) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2}(q) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_2^2}(q) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_0 \partial x_1}(q) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_0 \partial x_2}(q) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1 \partial x_2}(q) = 0$$

Vamos mostrar que $\partial^2 \Delta / \partial x_1^2(q) = 0$ (as outras são provadas analogamente). Se escrevermos o determinante Δ da forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

concluimos facilmente, usando a regra de Leibniz, que:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & b_1 & c_1 \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & b_2 & c_2 \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & c_1 \\ a_2 & \frac{\partial b_2}{\partial x_1} & c_2 \\ a_3 & \frac{\partial b_3}{\partial x_1} & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \\ a_2 & b_2 & \frac{\partial c_2}{\partial x_1} \\ a_3 & b_3 & \frac{\partial c_3}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

Motivados por esta propriedade, utilizaremos a notação:

$$\Delta_{100} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & b_1 & c_1 \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & b_2 & c_2 \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (q), \quad \Delta_{110} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & c_1 \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial b_2}{\partial x_1} & c_2 \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial b_3}{\partial x_1} & c_3 \end{vmatrix} (q), \quad \Delta_{002} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \\ a_2 & b_2 & \frac{\partial c_2}{\partial x_1} \\ a_3 & b_3 & \frac{\partial c_3}{\partial x_1} \end{vmatrix} (q)$$

... etc

Donde segue que:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}(q) = \Delta_{100} + \Delta_{010} + \Delta_{001}$$

²na Seção 4.3 veremos que são de fato pontos triplos

e, portanto:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2}(q) = \Delta_{200} + \Delta_{110} + \Delta_{101} + \Delta_{110} + \Delta_{020} + \Delta_{011} + \Delta_{101} + \Delta_{011} + \Delta_{002}$$

Como q é ponto duplo de S :

$$\Delta_{020} = \Delta_{011} = \Delta_{002} = 0,$$

pois a primeira coluna de cada uma dessas três matrizes, que é a coluna das derivadas parciais de S , é nula.

Logo, a segunda derivada que queremos provar ser nula se reduz a:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2}(q) = \Delta_{200} + 2\Delta_{110} + 2\Delta_{101}$$

Como $C_i(q) = 0$ ($i = 1, 2$) e como $\partial S / \partial x_1(q) = 0$, aplicando a fórmula de Euler para:

$$C_i, \partial C_i / \partial x_1, \partial S / \partial x_1, \partial^2 S / \partial x_1^2,$$

e avaliando depois em q , obtemos, respectivamente:

$$x'_0 \frac{\partial C_i}{\partial x_0}(q) + x'_1 \frac{\partial C_i}{\partial x_1}(q) + x'_2 \frac{\partial C_i}{\partial x_2}(q) = 3C_i(q) = 0 \quad (3.2)$$

$$x'_0 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_0 \partial x_1}(q) + x'_1 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_1^2}(q) + x'_2 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_1 \partial x_2}(q) = 2 \frac{\partial C_i}{\partial x_1}(q) \quad (3.3)$$

$$x'_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x_0 \partial x_1}(q) + x'_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2}(q) + x'_2 \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2}(q) = 5 \frac{\partial S}{\partial x_1}(q) = 0 \quad (3.4)$$

$$x'_0 \frac{\partial^3 S}{\partial x_0 \partial x_1^2}(q) + x'_1 \frac{\partial^3 S}{\partial x_1^3}(q) + x'_2 \frac{\partial^3 S}{\partial x_1^2 \partial x_2}(q) = 4 \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2}(q) \quad (3.5)$$

Por outro lado, multiplicando Δ_{200} por x'_0 , temos:

$$x'_0 \Delta_{200} = \begin{vmatrix} x'_0 \frac{\partial^3 S}{\partial x_0 \partial x_1^2} & x'_0 \frac{\partial C_1}{\partial x_0} & x'_0 \frac{\partial C_2}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^3 S}{\partial x_1^3} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^3 S}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} (q)$$

Em seguida somamos a primeira linha com a segunda linha multiplicada

por x'_1 e, em seguida, com a terceira linha multiplicada por x'_2 . Aplicando (3.5) e (3.2), segue:

$$x'_0 \Delta_{200} = \begin{vmatrix} 4 \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^3 S}{\partial x_1^3} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^3 S}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} (q) = 4 \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1} \frac{\partial C_2}{\partial x_2} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2} \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \right) (q)$$

Para Δ_{110} fazemos algo análogo, o multiplicamos por x'_0 :

$$x'_0 \Delta_{110} = \begin{vmatrix} x'_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x_0 \partial x_1} & x'_0 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_0 \partial x_1} & x'_0 \frac{\partial C_2}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} (q)$$

e depois, multiplicamos a segunda linha por x'_1 , a terceira por x'_2 e as somamos à primeira. Usando (3.4), (3.3) e (3.2), obtemos:

$$x'_0 \Delta_{110} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} (q) = 2 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \right) (q)$$

O caso de Δ_{101} é bastante semelhante ao de Δ_{110} :

$$x'_0 \Delta_{101} = \begin{vmatrix} x'_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x_0 \partial x_1} & x'_0 \frac{\partial C_1}{\partial x_0} & x'_0 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_0 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{vmatrix} (q)$$

Fazendo o mesmo procedimento:

$$x'_0 \Delta_{101} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{vmatrix} (q) = 2 \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \frac{\partial C_1}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} \right) (q)$$

Donde segue facilmente que:

$$x'_0 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2}(q) = x'_0 \Delta_{200} + 2x'_0 \Delta_{110} + 2x'_0 \Delta_{101} = 0$$

E, como $x'_0 \neq 0$, segue o resultado esperado: $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2}(q) = 0$.

□

Na seção seguinte, iremos complementar esta informação clássica, provando que estas são as únicas singularidades de Δ .

Sobre o levantamento da curva dianodal na cúbica de Del Pezzo

Na Seção 2.2, nos perguntamos se a curva espacial $\Delta' = H_3 \cap S_3$, que era mapeada por T em Δ , continha alguma das retas excepcionais E_i . Como agora sabemos que Δ tem grau nove e pontos triplos em p_1, \dots, p_8 , este problema se resolve. De fato, se Δ' contém, por exemplo, a reta E_1 , então $T_*(\Delta)$ é na verdade a curva $\Delta' \setminus E_1$, que tem grau oito. Mas $T_*(\Delta)$ deve ser uma curva de grau $3 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 9$, contradição.

3.2 A superfície dianodal

O mesmo argumento da seção anterior, onde foi discutida a existência de curvas irredutíveis de grau seis em \mathbb{P}^2 com 9 pontos duplos, sendo dados oito em posição geral, pode ser utilizado no estudo de superfícies de grau quatro em \mathbb{P}^3 com 8 pontos duplos, sendo dados sete em posição geral.

Enquanto que no plano usa-se no argumento o pencil de cúbicas por oito pontos, nesta seção utiliza-se o net de superfícies quádricas por sete pontos. A partir destas quádricas serão construídas superfícies quárticas nodais e a chamada *superfície dianodal*.

Sejam sete pontos p_1, \dots, p_7 de \mathbb{P}^3 em posição geral. O espaço das superfícies quádricas por estes pontos tem dimensão projetiva $\binom{5}{3} - 1 - 7 \cdot 1 = 2$ e, portanto, existem três quádricas $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ que geram um net Q de quádricas pelos sete pontos dados.

Se um ponto p_8 é tomado formando com p_1, \dots, p_7 posição geral, então só há um pencil de quádricas, e

$$\mu_1 Q_1^2 + \mu_2 Q_1 Q_2 + \mu_3 Q_2^2 = 0$$

é o único net de superfícies quárticas nodais nos oito pontos. Porém esse net contém $Q_1 \cap Q_2$ como curva dupla.

Então se f é um polinômio homogêneo genérico de grau dois em três variáveis, se pode mostrar que a superfície $f(Q_1, Q_2, Q_3) = 0$ é irredutível e nodal nos sete pontos dados e no oitavo ponto-base do net Q (esses oito pontos formam o que Cayley chama uma *octad*). As quárticas construídas desta forma constituem um sistema de dimensão projetiva cinco (pois f possui seis constantes).

O espaço das quárticas com sete pontos duplos tem dimensão projetiva $6 = \binom{7}{3} - 1 - 7 \cdot \binom{4}{3}$, portanto há alguma quártica que não é da forma $f(Q_1, Q_2, Q_3) = 0$.

Considere a superfície cúbica nodal em p_1, \dots, p_4 e que passa simplesmente por p_5, p_6, p_7 : como

$$\binom{3+3}{3} - 1 - 4 \cdot \binom{4}{3} - 3 = 0,$$

existe tal cúbica. Considere o plano passando por p_5, p_6, p_7 . Seja M o produto desta cúbica por este plano: logo M é uma quártica nodal nos sete pontos e distinta das quárticas $f(Q_1, Q_2, Q_3) = 0$. Conseqüentemente, a equação geral de uma superfície quártica S_4 nodal em p_1, \dots, p_7 é:

$$2\lambda_1 M + \lambda_2 Q_1^2 + 2\lambda_3 Q_1 Q_2 + 2\lambda_4 Q_1 Q_3 + \lambda_5 Q_2^2 + 2\lambda_6 Q_2 Q_3 + \lambda_7 Q_3^2 = 0 \quad (3.6)$$

Agora examinamos a condição para uma quártica S_4 de (3.6) ter um oitavo ponto duplo p . Vamos supor que p não é o oitavo ponto-base de Q .

Queremos entender então a condição $\nabla S_4(p) = \mathbf{0}$. Como Q é um net, existem duas quádricas distintas passando por p . Módulo mudança de geradores de Q , podemos supor $Q_1(p) = Q_2(p) = 0$ (lembre que então

$Q_3(p) \neq 0$). Logo $\nabla S_4(p) = \mathbf{0}$ se e somente se:

$$2\lambda_1 \frac{\partial M}{\partial x_0}(p) + 2\lambda_4 Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_0}(p) + 2\lambda_6 Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_0}(p) + 2\lambda_7 Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_0}(p) = 0$$

$$2\lambda_1 \frac{\partial M}{\partial x_1}(p) + 2\lambda_4 Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}(p) + 2\lambda_6 Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1}(p) + 2\lambda_7 Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1}(p) = 0$$

$$2\lambda_1 \frac{\partial M}{\partial x_2}(p) + 2\lambda_4 Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}(p) + 2\lambda_6 Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}(p) + 2\lambda_7 Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_2}(p) = 0$$

$$2\lambda_1 \frac{\partial M}{\partial x_3}(p) + 2\lambda_4 Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_3}(p) + 2\lambda_6 Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_3}(p) + 2\lambda_7 Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_3}(p) = 0$$

o que é equivalente ao sistema: (omitindo (p)):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_4 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial x_0} & Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} \\ \frac{\partial M}{\partial x_1} & Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} & Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial M}{\partial x_2} & Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} & Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} & Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial M}{\partial x_3} & Q_3 \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} & Q_3 \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} & Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deste sistema são derivadas condições semelhantes às da seção anterior:

- $(\lambda_1, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_7) = \mathbf{0}$: Neste caso a superfície quártica seria:

$$0 = \lambda_2 Q_1^2 + 2\lambda_3 Q_1 Q_2 + \lambda_5 Q_2^2 = (\mu_1 Q_1 + \mu'_1 Q_2)(\mu_2 Q_1 + \mu'_2 Q_2)$$

que é redutível e, portanto, não nos interessa.

- $(\lambda_1, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_7) \neq \mathbf{0}$: o ponto p pertence à superfície de grau seis definida por:

$$\Delta : \begin{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} \\ \frac{\partial M}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial M}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial M}{\partial x_3} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

que Cayley denominou de *superfície dianodal dos sete pontos*.

Uma demonstração análoga à da seção anterior mostra que Δ independe das superfícies M , Q_1 , Q_2 e Q_3 .

Fixado um ponto genérico p_8 na superfície dianodal Δ , duas quádricas Q_1 e Q_2 dentre as acima passam por p_8 . Se $M' = M'_{p_8}$ é uma quártica com pontos duplos em p_1, \dots, p_8 que não contém a curva $Q_1 \cap Q_2$, então:

$$\mu_1 Q_1^2 + \mu_2 Q_1 Q_2 + \mu_3 Q_2^2 + \mu_4 M' = 0$$

forma um web de quárticas com oito pontos duplos isolados.

3.2.1 Curvas contidas na superfície dianodal e pontos triplos

A superfície dianodal também possui pontos triplos nos sete pontos de partida. Essa propriedade pode ser provada analiticamente da mesma forma que fizemos na seção anterior para provar que a curva dianodal tinha pontos triplos nos oito pontos dados.

Cayley no entanto o faz de outro modo, como consequência de ter provado que por cada um desses sete pontos passam certas curvas de Δ . Vamos explicar esse argumento.

Cúbicas torcidas são cúbicas lisas racionais de \mathbb{P}^3 . Pela fórmula do gênero no plano, elas realmente não podem ficar contidas em nenhum plano $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$. É um fato clássico (pode ser visto em [1]) que seis pontos em posição geral no espaço determinam uma cúbica torcida.

Considere agora sete pontos em posição geral e o net de superfícies quádricas passando por eles. A *Steineriana* desse net de quádricas pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos singulares de elementos do net.

Tomando os sete pontos em posição geral, não há cone quadrático com vértice em algum deles e passando pelos outro seis. É um fato clássico que nessa situação a Steineriana é lisa (também se sabe, embora não precisamos disso aqui, que tem grau 6 e gênero 3).

Considere também o plano $\Pi = 0$ por três pontos dentre os sete dados e a superfície cúbica $M_3 = 0$ passando simplesmente por eles e com nodos nos

outro quatro pontos. Forme a cúbica plana lisa $C_3 = (\Pi = 0) \cap (M_3 = 0)$. Variando os pontos escolhidos dentre os sete p_1, \dots, p_7 formam-se $\binom{7}{3} = 35$ cúbicas planas dessa forma.

Proposição 3.4. *A superfície dianodal Δ :*

- (a) contém as 35 cúbicas planas mencionadas acima;
- (b) contém as 21 retas ligando cada dois dos sete pontos;
- (c) tem pontos triplos em p_1, \dots, p_7 , isto é, seu cone tangente nestes pontos é um cone cúbico;
- (d) contém as 7 cúbicas torcidas por seis dos sete pontos dados;
- (e) contém a Steineriana do net de quádricas por esses sete pontos.

DEMONSTRAÇÃO.

(a) Para fixar notação suponha a superfície cúbica $M = 0$ que passa simplesmente por p_1, p_2, p_3 e duplamente por p_4, p_5, p_6, p_7 . Observe que, por Bézout, a superfície cúbica $M_3 = 0$ contém as retas unindo cada dois dos pontos p_4, \dots, p_7 . Tome o plano $\Pi = 0$ por p_1, p_2, p_3 e forme a superfície quártica (reduzível) $M_4 = \Pi \cdot M_3 = 0$, que passa duplamente pelos sete pontos.

Denote por $J(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ o jacobiano das superfícies indicadas. Com esta notação, a superfície dianodal M_6 tem a forma:

$$M_6 = J(Q_1, Q_2, Q_3, M_4) = J(Q_1, Q_2, Q_3, \Pi M_3) = 0,$$

já que como vimos ela não depende dos geradores particulares do web gerado por Q_1, Q_2, Q_3, M_4 .

Observe agora que se denotamos δ_i o menor 3x3 de M_6 removendo a linha das derivadas em x_i e a coluna 4, então:

$$\begin{aligned} J(Q_1, Q_2, Q_3, \Pi M_3) &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial(\Pi M_3)}{\partial x_i} \cdot \delta_i \\ &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} M_3 \cdot \delta_i + \sum_{i=0}^3 \Pi \frac{\partial M_3}{\partial x_i} \cdot \delta_i \\ &= J(Q_1, Q_2, Q_3, \Pi) M_3 + J(Q_1, Q_2, Q_3, M_3) \Pi \end{aligned} \tag{3.7}$$

Logo, se um ponto pertence à cubica plana $C_3 = (\Pi = 0) \cap (M_3 = 0)$, pertence à superfície dianodal $M_6 = J(Q_1, Q_2, Q_3, \Pi M_3)$. Analogamente para as outras 34 cúbicas planas.

(b) Vamos ver, por exemplo, que a reta por p_6 e p_7 está em M_6 . Faça uma mudança de coordenadas de modo que os planos 456, 457, 467 e 567 tenham equações $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ respectivamente. Logo:

$$p_4 = (0 : 0 : 0 : 1) \quad p_5 = (0 : 0 : 1 : 0) \quad p_6 = (0 : 1 : 0 : 0) \quad p_7 = (1 : 0 : 0 : 0)$$

Donde segue que as quádricas Q_1, Q_2, Q_3 que passam pelos sete pontos têm equações da forma:

$$ax_0x_1 + bx_0x_2 + cx_0x_3 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 = 0$$

Além disso a cúbica M_3 , por ser nodal em p_4, \dots, p_7 , tem equação:

$$Ax_0x_1x_2 + Bx_0x_1x_3 + Cx_0x_2x_3 + Dx_1x_2x_3$$

(onde $A, B, C, D = 1$ ficam determinados pelos outros três pontos). A partir daí, calculamos o seguinte jacobiano $J(Q_1, Q_2, Q_3, M_3)$, em pontos da reta por p_6 e p_7 , isto é, a reta definida por $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Temos:

$$J(Q_1, Q_2, Q_3, M_3) = \begin{vmatrix} a_1x_1 & a_2x_1 & a_3x_1 & 0 \\ a_1x_0 & a_2x_0 & a_3x_0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

Como a primeira e a segunda coluna são proporcionais, o determinante se anula. Além disso, a cúbica M_3 também se anula nestes pontos, pois contém a reta que liga p_6 a p_7 (Bézout). Logo, por (3.7), a reta está contida em $\Delta = J(Q_1, Q_2, Q_3, \Pi M_3)$.

(c) Ao intersectarmos Δ com um dos planos Π passando por algum dos

p_i (e mais dois p_j, p_k), obtivemos uma cúbica plana lisa C_3 no item (a) já provado. E também, no item (b) já provado vimos que as retas $p_i p_j, p_i p_k, p_j p_k$ fazem parte de Δ . Ademais, observe que a intersecção da dianodal M_6 com o plano Π por p_1, p_2, p_3 não pode ser mais que a união da cúbica C_3 com as três retas ligando estes três pontos, pois já formam uma curva de grau seis, o grau de Δ .

Ou seja que $\Delta \cap \Pi$ tem três ramos lisos distintos em p_i : um de cada uma das duas retas $p_i p_j, p_i p_k$ e um da cúbica lisa. Isso indica então que Δ tem ponto triplo em p_i .

De um outro modo ainda podemos ver esses pontos triplos de Δ em cada um dos sete p_i . Pelo ponto p_1 , por exemplo, passam seis retas contidas em Δ , ligando p_1 aos outros seis pontos. Portanto estas retas fazem parte do cone tangente de Δ em p_1 . Pela hipótese de posição geral, não há cone quadrático com vértice em p_1 contendo os pontos p_2, \dots, p_7 . Esse cone, se pode provar, de fato é cúbico.

(d) Vamos provar que a cúbica torcida \check{C} por p_1, \dots, p_6 está contida em Δ .

Seja $\Pi = \langle p_5, p_6, p_7 \rangle$ e M_3 passando por p_5, p_6, p_7 e nodal em p_1, \dots, p_4 . Observe que \check{C} e M_3 se intersectam em $4 \cdot 2 + 2 = 10$ pontos, portanto $\check{C} \subset M_3$. Por outro lado, $\check{C} \cap \Pi = \{p_5, p_6, p'\}$ com $p' \neq p_7$. Este ponto p' é um ponto da cúbica plana:

$$(M_3 \cap \langle p_5, p_6, p_7 \rangle) \subset \Delta$$

(pelo item (a)). Mas p' também é distinto de p_1, \dots, p_4 , pois estes pontos não pertencem ao plano Π . Contando então as intersecções de \check{C} e Δ temos $6 \cdot 3 + 1 = 19$, donde segue que $\check{C} \subset \Delta$.

(e) Se o net de quádricas é gerado por Q_1, Q_2, Q_3 então a Steineriana é o lugar de pontos em que o Jacobiano $J(Q_1, Q_2, Q_3)$ não tem posto máximo, ou seja, o lugar de pontos onde se anulam todos os seus menores 3×3 .

Logo a Steineriana faz parte de Δ , pois se um ponto anula os menores 3×3 do jacobiano $J(Q_1, Q_2, Q_3)$, então anula o determinante que define a superfície dianodal Δ . \square

Na seção seguinte vamos ver se há alguma relação geométrica entre a curva dianodal no plano e a superfície dianodal no espaço. Certamente Δ não é uma simples seção plana de Δ , pois Δ tem grau 9 enquanto Δ tem grau 6.

3.3 A involução de Kantor

Vamos agora explicar um involução birracional de \mathbb{P}^3 que tem a superfície dianodal dentro de seu lugar de pontos fixos.

Definição 3.5. *Fixe sete pontos p_1, \dots, p_7 de \mathbb{P}^3 em posição geral e considere o net de quádricas por estes pontos e o sistema de superfícies quárticas nodais nestes sete pontos, que tem dimensão $34 - 7 \cdot 4 = 6$.*

Por um ponto genérico p passa um único pencil de quádricas, tome a curva-base de grau quatro $C_4 \ni p$. Escolha uma quártica Q nodal em p_1, \dots, p_7 que passe por p e faça a intersecção de C_4 com Q . Os pontos p_1, \dots, p_7, p contribuem com 15 destas intersecções. Defina então a involução de Kantor $K(p)$ como o décimo sexto ponto da intersecção $C_4 \cap Q$.

A prova de que a definição independe da quártica Q escolhida é semelhante àquela no plano. Se o net de quádricas for gerado por S_0, S_1, S_2 , sendo que S_0 e S_1 passam por p , a equação:

$$\lambda_0 S_0^2 + \lambda_1 S_0 S_1 + \lambda_2 S_0 S_2 + \lambda_3 S_1^2 + \lambda_4 S_1 S_2 + \lambda_5 Q$$

descreve o sistema de quárticas nodais nos sete pontos passando por p . A intersecção de qualquer destas quárticas com $C_4 = S_0 \cap S_1$ ficará determinada pela intersecção de Q com C_4 . Logo K está bem definida.

Utilizando a quártica S_2^2 , concluímos que K está bem definida no oitavo ponto base p'_8 do net de quádricas e que $K(p'_8) = p'_8$.

Da definição, segue que o lugar geométrico dos *pontos fixos* de K é o conjunto dos pontos p tais que existe uma quártica irreduzível nodal em p_1, \dots, p_7, p , isto é, a superfície dianodal de Cayley e o ponto p'_8 .

Agora veremos como as involuções σ e K estão relacionadas. Seja S uma quádrlica lisa do net e considere o conjunto de retas de \mathbb{P}^3 pelo ponto p_1 . Como o conjunto de retas por um ponto de \mathbb{P}^3 é isomorfo ao plano projetivo \mathbb{P}^2 , a projeção a partir de p_1 em S define uma aplicação birracional T entre S e \mathbb{P}^2 . Fazendo a explosão de S em p_1 obtemos um morfismo $\delta : \hat{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$. A figura seguinte ilustra a aplicação T :

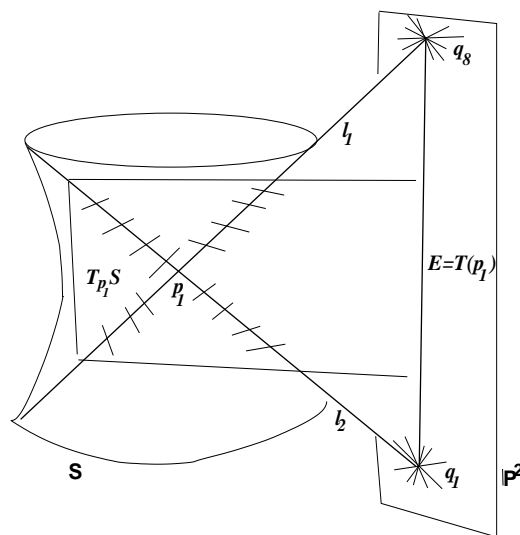


Figura: a aplicação T

Vamos analisar a pré-imagem por δ de um ponto q de \mathbb{P}^2 . O ponto q é identificado com uma reta r de \mathbb{P}^3 por p_1 . Como a aplicação racional é a projeção, a pré-imagem de q é o segundo ponto de intersecção de r com S . No caso em que r é uma reta contida em S , a pré-imagem é a própria reta r . Sabemos que a quádrlica S é *regrada* por dois conjuntos de retas transversais. Portanto, pelo ponto p_1 passam duas retas contidas em S , que consistem na intersecção de S com seu plano tangente em p_1 . Cada uma destas retas é a pré-imagem de um ponto de \mathbb{P}^2 e parametrizam as direções destes pontos. Logo a aplicação δ é, a menos de isomorfismo, a explosão de \mathbb{P}^2 em dois pontos.

Fazendo composições com isomorfismos, temos um diagrama comuta-

tivo:

$$\begin{array}{ccc} & \hat{S} & \\ \epsilon \swarrow & & \searrow \delta \\ S & \overset{T}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

onde ϵ é a explosão de p_1 em Q e δ é a explosão de \mathbb{P}^2 em dois pontos q_1 e q_8 .

Escrevendo $q_2 = T(p_2), \dots, q_7 = T(p_7)$, veremos que a aplicação T estabelece a conexão entre a involução K relativa a p_1, \dots, p_7 e a involução σ relativa a q_1, \dots, q_8 . Em cada quádrlica por p_1, \dots, p_7 T induz uma involução de Bertini, e estas quádrlicas preenchem o espaço \mathbb{P}^3 e formam a involução K .

Observe que cada quádrlica S pelos sete pontos é invariante por K . De fato, fixado um oitavo ponto $p \in S$, a intersecção de S com outra quádrlica do pencil pelos oito pontos é uma curva de grau quatro. Esta é a curva C_4 usada na definição de K e, portanto, $K(p) \in C_4 \subset S$.

Só nos resta provar que as curvas usadas para definir K são associadas via T às curvas usadas para definir σ . Denotando por $T_*(C)$ a transformada estrita de $C \subset S$ por T , o seguinte lema completa o argumento:

Lema 3.6. *Seja S, S' superfícies quádrlicas lisa de \mathbb{P}^3 por p_1 e Q uma superfície quártica nodal neste ponto. Se $C_4 = S \cap S'$ e $C_8 = S \cap Q$, então $T_*(C_4)$ é uma cúbica de \mathbb{P}^2 passando por q_1 e q_8 e $T_*(C_8)$ é uma sêxtica de \mathbb{P}^2 com pontos nodais em q_1 e q_8 . As singularidades destas curvas em outros pontos são preservadas.*

DEMONSTRAÇÃO. A última afirmação decorre de que T é um isomorfismo fora dos pontos p_1 em S e q_1 e q_8 em \mathbb{P}^2 .

Seja l_0 e l_1 as retas do *ruling* de S pelo ponto p_1 . Lembramos que a aplicação T consiste em explodir o ponto p_1 e contrair as transformadas estritas \hat{l}_0 e \hat{l}_1 nos pontos q_1 e q_8 . Para calcularmos o grau de uma curva em \mathbb{P}^2 , vamos calcular a sua intersecção com a reta $\delta(E_1)$, a imagem da reta excepcional resultada da explosão do ponto p_1 . Note que $q_1, q_8 \in \delta(E_1)$, por isso o grau de $\delta(E_i)$ é $-1 + 2 = 1$.

Observe que $S' \cap l_i = \{p_1, p'_{(i)}\}$ (em geral distintos). Logo C_4 passa simplesmente por p_1 e ainda corta cada reta l_i em $p'_{(i)}$. Portanto a curva $T_*(C_4)$ intersecta a reta $\delta(E_1)$ em três pontos: um representando a direção na qual C_4 passa por p_1 e os outros dois provindo da intersecção de C_4 com l_0 e l_1 . Portanto $T_*(C_4)$ é uma cúbica passando por q_1 e q_8 . A seguinte figura ilustra o que foi explicado:

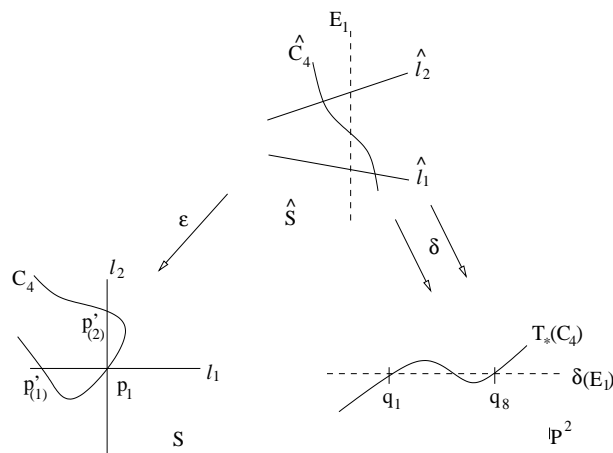


Figura: a curva C_4 se transforma em uma cúbica lisa

Agora para a curva C_8 : a superfície quártica Q intersecta cada reta l_i em quatro pontos. Como Q é nodal em p_1 , restam duas intersecções em cada l_i . Portanto $T_*(C_8)$ consiste em seis pontos: as duas direções de C_8 por p_1 , a contração das duas intersecções de C_8 com l_0 e a contração das duas intersecções de C_8 com l_1 . Segue que $T_*(C_8)$ é uma sêxtica nodal em q_1 e q_8 . Este raciocínio é ilustrado na figura abaixo:

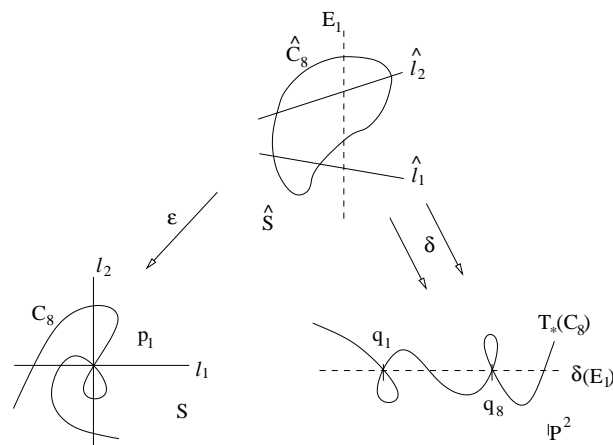


Figura: a curva C_8 se transforma em uma sêxtica nodal em q_1 e q_8

□

Este resultado não só nos mostra uma relação entre as duas involuções, mas também uma relação entre os dois problemas propostos: o do lugar do nono ponto nodal de uma sêxtica plana e o do lugar do oitavo ponto nodal de uma superfície quártica. O método de Cayley nos mostra que ambos problemas podem ser resolvidos fazendo uso da mesma técnica. O que concluímos agora é que resolvendo um problema, podemos resolver o outro através desta aplicação birracional.

Cayley estudou ambos problemas, porém aparentemente desconhecia a relação entre eles via transformações birracionais³. Esta informação o teria poupado de um erro em [8], onde afirma que a curva dianodal possuía pontos duplos em p_1, \dots, p'_8 . O fato de serem pontos triplos decorre da mesma propriedade para a superfície dianodal de \mathbb{P}^3 , induzindo em quádricas os pontos triplos daquela curva.

³A segunda memória de Cayley foi publicada em 1871, e aparentemente esta relação foi observada pela primeira vez por Cremona em [4], no ano de 1877

Capítulo 4

A dianodal vista como curva algébrica e como espaço de parâmetros

Neste capítulo vamos tratar:

- determinar que curva é a curva dianodal
- que tipo de pencil é parametrizado por cada um de seus pontos

A resposta à primeira pergunta, ou seja, que *a dianodal é irredutível e tem gênero geométrico 4* depende fortemente da hipótese de posição geral sobre os oito pontos. Num trabalho a seguir considerarei o caso em que estes pontos adquirem posição especial e onde então a dianodal se fatora e adquire mais singularidades.

Quanto à segunda pergunta, a resposta é que *fora os oito pontos dados e mais outros doze pontos da dianodal, o pencil de Halphen parametrizado é irredutível.*

4.1 Preliminares

4.1.1 Os Teoremas de Bertini

Considere um *pencil* em \mathbb{P}^n da forma:

$$\lambda_1 P_1(x_0, \dots, x_n) + \lambda_2 P_2(x_0, \dots, x_n) = 0$$

Se este pencil tiver alguma componente fixa (isto é, um polinômio P que divide os polinômios P_1, P_2), ele deve ser considerado *reduzível*, já que todos seus elementos são reduzíveis. Existe uma outra forma de construir um pencil reduzível, a seguinte.

Iniciamos com um outro pencil em \mathbb{P}^n :

$$\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 = 0$$

formado por polinômios de grau r . Defina uma aplicação racional $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, em que a imagem de um ponto $(x_0 : \dots : x_n)$ é $(F_1(x_0, \dots, x_n) : F_2(x_0, \dots, x_n))$ (note que os elementos do pencil são recuperados tomando as pré-imagens de pontos de \mathbb{P}^1).

Considere agora uma aplicação $g : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau s , isto é, a pré-imagem por g de um ponto de \mathbb{P}^1 consiste em s pontos (contando multiplicidades). Esta aplicação induz, via *pullback*, um sistema linear em \mathbb{P}^n , de acordo com o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & & \\ f \downarrow & \searrow h & \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

O pencil induzido consiste nas pré-imagens de pontos de \mathbb{P}^1 por h . A pré-imagem por g de um ponto de $p \in \mathbb{P}^1$ são s pontos em \mathbb{P}^1 . A pré-imagem de cada um destes pontos é uma hipersuperfície de grau r do pencil com que começamos em \mathbb{P}^n . Portanto a pré-imagem por h de p é uma hipersuperfície de grau rs , composta de s componentes de grau r .

Variando o ponto $p \in \mathbb{P}^1$, obtemos, tomando pré-imagens, um pencil reduzível em \mathbb{P}^n de grau rs . Um pencil construído desta maneira é dito ser *composto com um pencil*. Obviamente descarta-se o caso trivial $s = 1$.

O seguinte teorema esclarece que não há outra forma de se construir um

sistema linear redutível.

Teorema 4.1 (Segundo Teorema de Bertini). *Um pencil redutível em \mathbb{P}^n sem componentes fixas é necessariamente composto com outro pencil.*

Este é um enunciado clássico deste teorema, sua demonstração e generalizações podem ser encontradas no artigo de Kleiman [22].

Enquanto este teorema trata de pencils redutíveis, o primeiro teorema de Bertini trata das singularidades dos elementos genéricos de um pencil:

Teorema 4.2 (Primeiro Teorema de Bertini). *Um elemento genérico de um pencil em \mathbb{P}^n sem componentes fixas não possui singularidades fora do lugar base.*

Sua prova também pode ser encontrada em [22].

4.1.2 Sistemas lineares sobre curvas

A definição de sistemas lineares, que até aqui são pensadas em \mathbb{P}^k , pode ser estendida para outras variedades algébricas. Por exemplo, considere um ponto p de uma cúbica lisa $C \subset \mathbb{P}^2$. Considere o pencil de retas por p . A intersecção destas retas com C forma um pencil na cúbica, onde cada elemento consiste em três pontos (contando multiplicidade). Ou seja que a princípio o grau dos elementos desse sistema é três. Mas só dois pontos se movem com o parâmetro do pencil, e portanto desconsidera-se o ponto p que se repete em todos divisores, obtendo-se grau dois. A notação usual para o sistema obtido assim na cúbica é g_2^1 .

Mais geralmente, a notação para um sistema linear de dimensão projetiva r onde cada divisor tenha grau n é g_n^r . Como observado, o grau do divisor é o número de pontos considerando multiplicidades.

Na Proposição 1.11, estudamos em quantos pontos da cúbica C os “dois” pontos móveis coincidem, i.e., quantos pontos duplos tem o sistema g_2^1 . Utilizando a fórmula de Riemann-Hurwitz, concluímos que são 4 os pontos duplos do g_2^1 .

Em geral, a resposta à questão dos pontos múltiplos é dada pelo seguinte teorema clássico, associado aos nomes de Veronese e Segre, encontrado em [1]:

Teorema 4.3 (Veronese-Segre). *O número de pontos $r + 1$ -uplos de um sistema g_n^r (de grau n e dimensão projetiva r) sobre uma curva plana de gênero q é:*

$$(r + 1) \cdot (n + rq - r)$$

4.2 Centros Críticos

Chamaremos de *centros críticos* do pencil \mathcal{C} os pontos p que são pontos duplos de alguma cúbica singular de \mathcal{C} .

Escrevendo $C_{\lambda_1, \lambda_2} = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ e fazendo $\nabla(C_{\lambda_1, \lambda_2}) = \mathbf{0}$, se vê que os centros críticos são exatamente aqueles que satisfazem a igualdade:

$$\left(\frac{\partial C_1}{\partial x_0}(p) : \frac{\partial C_1}{\partial x_1}(p) : \frac{\partial C_1}{\partial x_2}(p) \right) = \left(\frac{\partial C_2}{\partial x_0}(p) : \frac{\partial C_2}{\partial x_1}(p) : \frac{\partial C_2}{\partial x_2}(p) \right)$$

Portanto, se p é um centro crítico, a matriz que define a curva dianodal Δ aplicada em p passa a ter duas colunas linearmente dependentes. Portanto, $\Delta(p) = 0$, isto é, o ponto p pertence à curva dianodal.

Porém, é importante notarmos que se escolhermos um centro crítico $p \in \Delta$ então a sêxtica com nove nodos $S = S_p$ será redutível. De fato, seja C a cúbica do pencil \mathcal{C} com ponto duplo em p . Então

$$C \cdot S_p \geq 8 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20,$$

logo por Bézout a sêxtica contém C .

Na Seção 4.5.1 veremos quantos são os centros críticos de \mathcal{C} . Eles têm um papel especial na curva dianodal. Primeiro vamos obter novas propriedades sobre Δ .

4.3 Mais propriedades da curva dianodal

Começaremos estudando as singularidades de Δ .

Lema 4.4. *Sejam p_1, \dots, p_8 em posição geral. Estes são exatamente pontos triplos da curva dianodal Δ e são suas únicas singularidades. Além disso, Δ não passa pelo nono ponto base p'_9 do pencil de cúbicas \mathcal{C} por p_1, \dots, p_8 . Em particular, Δ não contém nenhuma cúbica de \mathcal{C} .*

DEMONSTRAÇÃO.

Pelo Lema 1.11 e pela Proposição 1.12, segue que existem três pontos distintos p', p'', p''' em C que podem ser tomados como nono ponto duplo de uma sêxtica nodal em p_1, \dots, p_8 que não contenha C . Em outras palavras, estes pontos pertencem a Δ . Sabemos também que Δ tem pelo menos pontos triplos em p_1, \dots, p_8 . Como C é genérica, estes oito pontos são distintos daqueles três. Destas informações, segue que:

$$\Delta \cdot C = 3(p_1 + \dots + p_8) + p' + p'' + p''' \quad (4.1)$$

já que Δ não pode conter toda cúbica genérica de \mathcal{C} . Portanto p_1, \dots, p_8 são exatamente pontos triplos de Δ . Como o ponto $p'_9 \neq p', p'', p'''$ pelo Lema 1.11 (por produzir um semi-período trivial), segue também de 4.1 que Δ não passa por ele. Esta observação é importante, pois $p'_9 \notin \Delta$ implica que Δ não contém nenhuma cúbica de \mathcal{C} .

Considere agora um ponto $p \in \Delta$ distinto de p_1, \dots, p_8 . Se a cúbica $C_p \in \mathcal{C}$ por p for lisa, segue de (4.1) que Δ é lisa em p (pois p é um dos três pontos distintos que restam na intersecção). Observe que eventualmente pode ocorrer, por exemplo, $p' = p_1$. Como p_1 é exatamente ponto triplo de Δ e C_p é lisa, esta coincidência ocorre somente quando a cúbica C_p toca um dos ramos de Δ em p_1 , fazendo com que a intersecção tenha peso 4 em p_1 . Esta colisão do nono ponto duplo da sêxtica com p_1 produz um pencil com *tacnodo* em p_1 e pontos nodais em p_2, \dots, p_8 .

Se p for um centro crítico de \mathcal{C} , isto é, C_p é singular em p , então:

$$\Delta \cdot C_p = 3(p_1 + \cdots + p_8) + 2p + p'$$

Portanto Δ é lisa em p e em p' .

□

A definição clássica de *gênero geométrico* fica bem ilustrada no caso da curva dianodal Δ . Ela é definida como a dimensão vetorial do espaço de suas *curvas adjuntas*. As curvas adjuntas de uma curva plana de grau d são por definição as curvas de grau $d - 3$ passando com multiplicidade $\nu - 1$ onde a curva tem multiplicidade $\nu \geq 2$.

Pelo que foi observado no Lema 4.4, as adjuntas de Δ são sêxticas passando duplamente por p_1, \dots, p_8 . Ora já sabemos que todas essas são dadas por:

$$2a_1S + a_2C_1^2 + 2a_3C_1C_2 + a_4C_2^2 = 0$$

conforme (3.1). Portanto se vê pela definição clássica que o gênero geométrico de Δ é 4. Porém para afirmarmos isso precisamos saber que Δ é irredutível:

Proposição 4.5. *Sejam p_1, \dots, p_8 em posição geral. Então a curva dianodal dos oito pontos Δ é irredutível e seu gênero geométrico é 4.*

DEMONSTRAÇÃO. Como observado acima, resta provarmos que Δ é irredutível. Suponha que Δ seja redutível. Note que Δ não pode ter componentes múltiplas, pois só possui oito pontos singulares. Observaremos primeiro que as intersecções entre as componentes de Δ (que ocorrem em p_1, \dots, p_8) devem ser transversais. Se não forem transversais em, por exemplo, p_1 , considere a cúbica C do pencil \mathcal{C} que passa por p_1 na direção de tangência de dois ramos de Δ . Dessa forma, temos $I_{p_1}(C, \Delta) \geq 3 + 2 = 5$ e:

$$\Delta \cdot C = 5p_1 + 3(p_2 + \cdots + p_8) + p' \tag{4.2}$$

Observe que isto implica que C é lisa. De fato, uma possível singu-

laridade de C (isto é, um centro crítico de \mathcal{C}) é um ponto de Δ . Mas esta singularidade não pode ser um ponto dentre p_1, \dots, p_8 , já que duas cúbicas de \mathcal{C} se intersectam simplesmente nos pontos base. Portanto este possível ponto singular de C deve ser o ponto p' , o que não é possível pois $I_{p'}(\Delta, C) = 1$, conforme (4.2).

Como C é lisa, estamos nas condições do Lema 1.11. De (4.2), segue que $p'' = p''' = p_1$, o que contradiz o fato de que $p'' \neq p'''$. Isto completa a prova de que as componentes de Δ se intersectam transversalmente.

Seja Δ_I uma componente irredutível de Δ e seja Δ_R a componente residual (possivelmente redutível), isto é, $\Delta = \Delta_I + \Delta_R$. Chegaremos a uma contradição considerando a intersecção $\Delta_I \cdot \Delta_R$, que sabemos que se dá transversalmente nos pontos p_1, \dots, p_8 .

Como estes oito pontos são exatamente pontos triplos de Δ , segue que $I_{p_i}(\Delta_I, \Delta_R) \leq 2$, para $i = 1, \dots, 8$. Logo, é necessário que:

$$\deg(\Delta_I) \cdot \deg(\Delta_R) \leq 16$$

Analisando as possíveis componentes de Δ , descobrimos que Δ_I deve ter grau 1, 2, 7 ou 8. No caso em que o grau é 1, os oito pontos estarão na reta Δ_I (já vimos que Δ é lisa fora de p_1, \dots, p_8 , portanto $\Delta_I \cdot \Delta_R$ está situada em p_1, \dots, p_8), contradizendo a posição geral. Quando o grau é 2, haverá no mínimo sete pontos dentre p_1, \dots, p_8 na cônica Δ_I , o que também não é permitido pela posição geral. Se o grau for 7 ou 8, Δ_R será uma reta, duas retas ou uma cônica, que são os casos de grau 1 e 2. \square

4.4 Pontos que produzem pencils irredutíveis

Como já observamos, cada vez que obtemos um sextica irredutível S_p , com nove nodos, tais que o nono é $p \in \Delta$ produzimos um pencil de Halphen $\lambda S_p + \mu C^2 = 0$, onde C é a única cúbica pelos nove pontos. Esse pencil é irredutível, pelo segundo teorema de Bertini (Teorema 4.1).

Já observamos também que se p é um centro crítico do pencil de cúbicas \mathcal{C} , o pencil de sêxticas produzido é redutível. A seguinte proposição delimita quando um pencil parametrizado por um ponto de Δ é redutível:

Proposição 4.6. *Apenas um número finito de pontos da curva dianodal Δ produz um pencil redutível de sêxticas. Afora possivelmente os oito pontos dados são eles os centros críticos.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja p um ponto da dianodal distinto dos oito fixos tal que existe um pencil redutível de sêxticas nodais em p_1, \dots, p_8, p , denotado \mathcal{P} . Como visto no Lema 4.4, p não é o nono ponto base do pencil de cúbicas pelos oito dados.

Considere C_p a única cúbica do pencil \mathcal{C} que passa por este ponto (e que podemos supor distinto dos geradores). Como já foi observado acima, C_p é irredutível (devido à posição geral dos oito pontos).

Pelo segundo teorema de Bertini, se este sistema de sêxticas não tem componentes fixas, ele é composto por um pencil. Neste caso, existe um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & & \\ \mathcal{F} \downarrow & \searrow \mathcal{P} & \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

onde $\deg g > 1$; portanto \mathcal{F} é um pencil de retas, cônicas ou cúbicas.

Mas por nove pontos, dentre os quais oito tem posição geral, não existe um pencil de retas ou de cônicas e já supomos que pelos nove também não existe um pencil de cúbicas. Logo o pencil \mathcal{P} não é composto com outro pencil e portanto tem alguma componente fixa.

Como a sêxtica C_p^2 é um elemento do pencil \mathcal{P} e como C_p é irredutível, segue que a componente fixa é a própria cúbica C_p . Considere então uma S_p , que sabemos não ser da forma C_p^2 . Logo S_p é da forma $C_p C'$, com $C' \neq C_p$. Pela unicidade da cúbica pelos nove pontos, a cúbica C' não passa por p . Como p é um ponto duplo de $C_p C'$, ele tem de ser um ponto duplo de C_p . Pelo primeiro teorema de Bertini, Teorema 4.2, essas singularidades, fora dos pontos-base, são em número finito.

Mas ainda mais, vemos que C_p é singular em p e, portanto, p é um centro crítico do pencil de cúbicas pelos oito pontos. \square

Neste momento, cabe a seguinte questão: Sabemos quais pontos de Δ produzem pencils redutíveis de sêxticas. Mas quais pontos de Δ efetivamente produzem pencil de sêxticas com nove pontos duplos? A proposição acima garante a irreduzibilidade de um pencil, mas não garante a existência de uma sêxtica distinta de C^2 que possa produzir um pencil de fato. Pelo método de Halphen, estudado no Capítulo 1, os pontos $p \in \Delta$ tais que a cúbica C_p por p_1, \dots, p_8, p é lisa de fato produzem pencils de Halphen. Pelo que foi observado na presente seção, se p é um ponto singular de C_p , a sêxtica formada conterá C_p .

Portanto resta entender o que ocorre quando é escolhido um $p \in \Delta$ tal que C_p é singular, mas p é um ponto liso de C_p .

Lema 4.7. *Suponha p_1, \dots, p_8 em posição geral e seja $p \in \Delta$ tal que C_p é singular, mas p é um ponto liso de C_p . Então existe uma sêxtica S_p com pontos duplos em p_1, \dots, p_8, p que não contém C_p . Em particular, o pencil*

$$\lambda S_p + \mu C_p^2 = 0$$

tem elemento genérico irreduzível.

DEMONSTRAÇÃO. Escolha um ponto r fora de C_p . Para cada ponto genérico $q_n \in \Delta$, existe um pencil de sêxticas com pontos duplos em p_1, \dots, p_8, q_n , que possui elemento genérico irreduzível. Escolha a sêxtica S_n deste pencil que passa por r . Para pontos q_n arbitrariamente próximos de p , podemos supor que S_n é irreduzível (modificando a escolha de q_n , se necessário).

Então temos uma sequência de sêxticas S_n irreduzíveis com oito pontos duplos em p_1, \dots, p_8 . Já sabemos que isso forma um espaço projetivo, portanto, tomando uma subsequência, temos que S_n converge para uma sêxtica S_p com pontos duplos em p_1, \dots, p_8 (pela compacidade do espaço projetivo).

Restrito a um \mathbb{C}^2 , temos uma sequência de funções polinomiais que define S_n convergindo para um polinômio que define S_p , ou seja os coeficientes se aproximam. Então em um compacto de C^2 temos uma aproximação uniforme destes polinômios, o que implica que S_p se anula em p (pois o módulo de S_p em p está próximo do módulo de S_n em p que se faz tão pequeno quanto quisermos quando n cresce).

O mesmo argumento pode-se aplicar para provar que as derivadas parciais de S_p se anulam em q_n , via fórmula integral de Cauchy para derivadas. Portanto S_p é uma sêxtica com pontos duplos em p_1, \dots, p_8, p , que passa por r . A seguinte figura ilustra a situação:

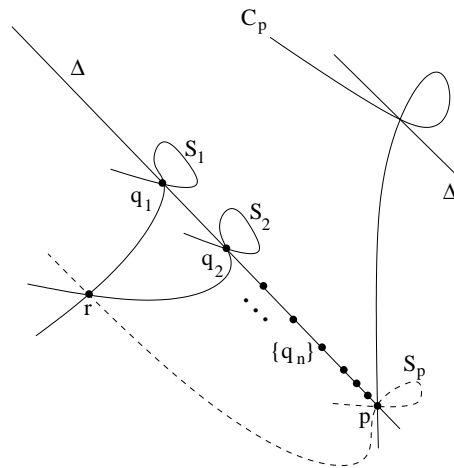


Figura: Sêxticas S_n convergindo a uma sêxtica S_p

Mas essa sêxtica não é C_p^2 , pois ela passa por $r \notin C_p$. E muito menos contém C_p , pois p é um ponto duplo de S_p e é um ponto liso de C_p . Isso faria com que, se S_p contivesse C_p , existisse outra cúbica $S_p \setminus C_p$ passando por p, p_1, \dots, p_8 , pois como vimos na prova da Proposição 4.5, C_p é lisa em p_1, \dots, p_8 . Isso contradiz a unicidade de $C_p \ni p$. \square

4.5 Sêxticas racionais em pencils de Halphen

Foi observado por Coble [12] a existência de doze sêxticas racionais, como elementos singulares contidos em pencils de Halphen (genéricos), melhorando uma cota de 30 dada por Hodgkinson.

O interesse de Coble era de exibir um exemplo de curva plana racional (i.e. cuja normalização é isomorfa a \mathbb{P}^1) que *não* pode ser transformada em uma reta através de transformações de Cremona do plano.

Há diferentes argumentos para provar que há 12 pontos no plano que podem ser décimos nodos de sêxticas de um pencil de Halphen. E, portanto, que há no máximo doze sêxticas racionais num pencil de Halphen.¹

Como parte da intersecção de duas dianodais Coble dá um argumento, bem simples, para provar que há doze pontos no plano que são os possíveis décimos nodos de sêxticas especiais de um pencil de Halphen. O argumento vale desde que suponhamos que o nono nodo foi escolhido como um ponto geral da dianodal Δ dos oito primeiros.

É o seguinte argumento. Consideremos um possível décimo ponto p_{10} nodal de uma sextica com nodos em p_1, \dots, p_8 e em $p_9 \in \Delta$ (Δ a curva dianodal dos oito primeiros). Então esse ponto p_{10} deve pertencer também a uma segunda curva dianodal Δ' , relativa a outros oito pontos p_1, \dots, p_7, p_9 (aqui uso a liberdade na posição de p_9 , para termos esse conjunto de oito pontos ainda em posição geral). Como já sabemos que Δ tem pontos triplos em p_1, \dots, p_8 e que, pelos mesmos motivos, Δ' tem pontos triplos em p_1, \dots, p_7, p_9 então p_{10} é um dos:

$$12 = 9 \cdot 9 - 7 \cdot 3 \cdot 3 - 3 - 3$$

pontos possíveis, dentre os $81 = \Delta \cdot \Delta'$ pontos da intersecção.

¹No Apêndice A explicamos a ideia original de halphen para provar que são 12 os pontos que produzem sêxticas racionais.

Via o teorema de Veronese-Segre Esse outro argumento de Coble usa o Teorema de Veronese-Segre (Teorema 4.3) em Δ . Para tanto, precisamos saber, conforme Lema 4.5, que o gênero geométrico de Δ é 4.

Considere um ponto genérico $p_9 \in \Delta$ e o pencil de sêxticas com pontos duplos em p_1, \dots, p_9 . Intersecte cada sêxtica S dele com Δ e desconte dessa intersecção os nove pontos p_1, \dots, p_9 ; obtendo, portanto, $6 \cdot 9 - 8 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 4$ pontos livres. Variando a sêxtica no pencil, formamos um sistema linear sobre Δ com grau 4 e dimensão projetiva 1, um g_4^1 .

Pelo Teorema de Veronese-Segre, o número de pontos duplos deste sistema linear é $2 \cdot (4 + 4 - 1) = 14$.

Mas lembre que pelos nove pontos existe uma cúbica C , que intersecta Δ em $2 = 3 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 1$ pontos distintos de p_1, \dots, p_9 . E que esta cúbica C contada com multiplicidade dois, C^2 , produz uma sêxtica do pencil. Esta sêxtica contribui com dois pontos duplos do g_4^1 . Descontando estes dois pontos, concluímos que o sistema possui 12 pontos duplos extra.

Um ponto duplo p' desse g_4^1 pode ser formado através da intersecção com Δ de uma sêxtica do pencil de Halphen que tem um nodo extra neste ponto (e portanto é racional), e é o que desejamos. Mas também poderia ser um ponto liso da sêxtica, tal que ela faz um contato (uma tangência) com Δ . A seguinte figura ilustra esta possibilidade.

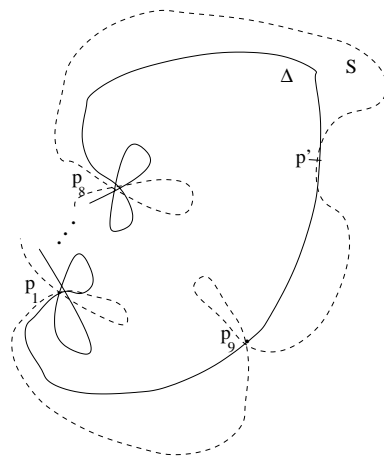


Figura: Uma sêxtica S fazendo contato com Δ em p'

Precisamos excluir a possibilidade de contato. Como vimos na Seção

1.2, a dianodal é o lugar geométrico dos pontos p' tais que

$$2(p_1 + \cdots + p_8 + p')$$

forma um divisor principal sobre qualquer cúbica lisa por p_1, \dots, p_8 . Então considere a única cúbica $C_{p'}$ do pencil que passa por p' (e não passa por p_9) e uma sêxtica S' nodal em p_1, \dots, p_8, p_9 , mas lisa em p' . Como o divisor acima é principal, concluímos que a sêxtica $S_{p'}$ é tangente a $C_{p'}$ em p' (conforme Seção 1.2).

Por outro lado, Δ não é tangente a $C_{p'}$ em p' . Se fosse, teríamos:

$$\Delta \cdot C_{p'} = 3(p_1 + \cdots + p_8) + 2p' + p''$$

Portanto o divisor acima seria principal. Observe que a diferença de divisores principais também é principal, pois

$$\operatorname{div}(f/g) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$$

Portanto, como o divisor $2(p_1 + \cdots + p_8 + p')$ é principal, segue também que

$$p_1 + \cdots + p_8 + p''$$

é principal. Decorre, então que p'' é o nono ponto base do pencil de cúbicas pelos oito primeiros. Mas foi visto na Proposição 4.6 que este ponto não pertence à dianodal: contradição.

Logo, fixado um $p_9 \in \Delta$ genérico e o correspondente pencil de Halphen, existem 12 pontos de Δ que produzem décimos pontos nodais de sêxticas racionais.

4.5.1 Sobre o número de centros críticos no pencil de cúbicas

Coble, ainda usando o Teorema de Veronese-Segre dá um argumento para os 12 centros críticos do pencil de cúbicas.

Basta considerar a intersecção de cúbicas do pencil com Δ . Descontando p_1, \dots, p_8 , restam $9 \cdot 3 - 8 \cdot 3 = 3$ pontos, que geram um sistema linear sobre

Δ com grau 3 e dimensão projetiva 1. Como o gênero de Δ é 4, segue que o número de pontos duplos do sistema é $2 \cdot (3 + 4 - 1) = 12$. Como já foi observado acima, Δ não é tangente a cúbicas do pencil. Portanto esses doze pontos são os centros críticos do pencil de cúbicas.

Apêndice A: Curvas racionais nos pencils elípticos

pelo Professor Orientador *Luís Gustavo Mendes*

Queremos explicar o conteúdo das Seções 5 e 10 do artigo original de Halphen [19]. Para isso usaremos algumas noções de um outro domínio, mais geral que o de feixes lineares de curvas (pencils), a saber, a teoria de folheações holomorfas no plano.

Em um outro trabalho, mostrarei como o argumento de Halphen pode ser usado em folheações mais gerais, cujas singularidades são ou *dicríticas* ou genéricas.

Nas Seções 5 e 10 de seu artigo, Halphen afirma que nos pencils elípticos de curvas de grau $3m$ com 9 pontos m -uplos ($\forall m \geq 1$) há 12 singularidades duplas (também chamados nodos ou pontos de Morse), fora dos pontos-base.

Como já foi observado, se oito dos pontos-base estão em posição geral então as curvas de grau $3m$ que possuam alguma dessas singularidades duplas extra serão irredutíveis. Pela fórmula do gênero, elas não podem conter mais de um desses nodos (se não teriam gênero negativo). Ou seja, serão curvas racionais (gênero zero) irredutíveis.

Logo se soubermos que há 12 singularidades duplas extra nos pencils, então há doze curva racionais de grau $3m$ em cada um desses pencils.

A segunda característica do pencil

Halphen fala (sem definir) da *seconde caracteristique* do pencil \mathcal{F}_m formado de curvas de grau $3m$ e calcula esse número como sendo igual a $3m + 1$. O que é isso?

Essa segunda característica é o que no domínio das folheações holomorfas singulares se chama o *grau do pencil*. Define-se assim: $d(\mathcal{F})$ é o número de pontos de contato das curvas que compõem o pencil \mathcal{F} com uma reta genérica do plano.

Como veremos a seguir, pencils \mathcal{F} formados de curvas de um mesmo grau podem ter diferentes graus $d(\mathcal{F})$.

Para calcular $d(\mathcal{F})$ procede-se assim. Se o pencil é

$$\mathcal{F} : \quad \lambda F + \mu G = 0,$$

toma-se a 1-forma polinomial $\hat{\Omega} = dFG - FdG$ e a seguir elimina-se seus zeros não-isolados, ao dividi-la por

$$\psi := \prod_i f_i^{n_i-1}$$

formada usando todas as $f_i^{n_i} = 0$ que descrevem as componentes não-reduzidas das curvas do pencil; produzindo-se

$$\Omega := \frac{\hat{\Omega}}{\psi}.$$

A *folheação singular holomorfa* é dada pela equação diferencial

$$\Omega = 0.$$

Essa fórmula para Ω a partir de $\hat{\Omega}$ remonta a G. Darboux, contemporâneo de Halphen.

Pela definição de grau que demos, se $l = 0$ é uma reta temos que contar os zeros de $\Omega|_{l=0}$, o que depende do grau dos polinômios F e G e do grau de ψ . No caso dos pencils de Halphen onde F, G têm grau $3m$, tendo apenas

uma cúbica tomada com multiplicidade $m \geq 2$, e não mais componentes não-reduzidas, se obtem como *grau dos coeficientes* de Ω :

$$6m - 1 - 3(m - 1) = 3m + 2,$$

(onde $\hat{\Omega}$ contribuiu com $3m + 3m - 1 = 6m - 1$, do qual descontamos o grau de ψ , $3(m - 1)$, devido à cúbica com multiplicidade m). Ademais, o grau da folheação $d(\mathcal{F})$ é, em coordenadas projetivas genéricas, um a menos que esse grau $3m + 2$, ou seja

$$d(\mathcal{F}_m) = 3m + 1.$$

Esse último fato, a saber, que devemos descontar um do grau dos coeficientes de Ω , se ilustra no exemplo mais simples: $dx = 0$ representa retas verticais afins, ou seja a parte afim de um feixe de retas por um ponto, cujo grau como folheação é zero. A equação $\Omega := X_0 dX_1 - X_1 dX_0 = 0$ induz essa folheação de grau zero, e seus coeficientes tem grau 1.

Divisores de contato

Em seguida Halphen toma um ponto arbitrário P e considera o pencil de retas \mathcal{R}_P passando por ele.

À medida que variamos a retas no pencil por P , os pontos de contato com \mathcal{F}_m vão produzindo uma curva, chamada *divisor de tangências* D_{tang} entre \mathcal{R}_P e \mathcal{F}_m . Em geral é realmente um divisor efetivo (ou seja, há multiplicidades não-negativas).

D_{tang} pode ser definido como lugar de zeros do polinômio

$$T(X_0 : X_1 : X_2) := \Omega(\mathcal{X}),$$

onde \mathcal{X} é uma campo vetorial polinomial com zero isolado definindo uma das folheações através de suas curvas integrais (no nosso caso \mathcal{X} produz por ex. \mathcal{R}_P) e Ω é 1-forma polinomial com zeros isolados, tal que $\Omega = 0$ define a outra folheação (por exemplo o pencil de Halphen).

Claramente T se anula onde as duas folheações são tangentes (pontos onde \mathcal{X} está no $\text{Ker}(\Omega)$) mas também onde há singularidade (isolada) de \mathcal{X} ou de Ω . Por esse motivo na nossa situação o grau de D_{tang} como curva não é somente $3m + 1$ mas sim $3m + 2$ (onde aparece o ponto extra devido a P que é singularidade de X).

Como o D_{tang} que tomamos depende de P , será denotado $D_{tang,P}$. Halphen aplica Bézout à intersecção de $D_{tang,P}$ com outro $D_{tang,P'}$, do mesmo tipo, mas produzida usando outro ponto P' tomado ao azar. É da análise dessa intersecção que resultarão os 12 pontos duplos de \mathcal{F}_m .

Estudo local dos divisores de contato nos pontos-base

Ele analisa como $D_{tang,P}$ e $D_{tang,P'}$ se intersectam em cada um dos nove pontos-base p_i de \mathcal{F}_m . Primeiramente vamos listar os resultados de sua análise e depois os justificaremos.

Ele conclui que em cada p_i :

- $D_{tang,P}$ tem multiplicidade $\nu_{p_i}(D_{tang,P}) = m$ e genericamente m ramos distintos
- dos m ramos locais de $D_{tang,P}$ e dos m ramos locais de $D_{tang,P'}$, $m - 1$ de $D_{tang,P}$ e $m - 1$ de $D_{tang,P'}$ formam pares tangentes, e essas direções tangentes não dependem de P e P'
- mas há 1 ramo de cada que não é tangente; uma direção passa por P e a outra por P' .

A Figura 1 a seguir ilustra o caso $m = 2$ (pontilhados são ramos locais de um e linha cheia os de outro) :

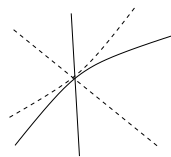


Figura 1

Usando a fórmula de Noether para a multiplicidade de intersecção:

$$I_P(D_{tang,P}, D_{tang,P'}) = \sum_j \nu_{q_j}(D_{tang,P}) \cdot \nu_{q_j}(D_{tang,P'}),$$

onde os q_j são todos os pontos ao longo de uma sequência de explosões onde há intersecção de ramos locais, obtemos:

$$I_P(D_{tang,P}, D_{tang,P'}) = m \cdot m + m - 1 = m^2 + m - 1.$$

A Figura 2 ilustra a explosão da Figura 1, mostrando que após uma explosão ainda há intersecção de um ramo de cada divisor.

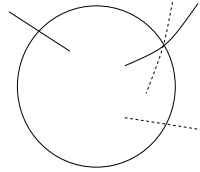


Figura 2

Como $D_{tang,P}$ e $D_{tang,P'}$ tem em comum $d(\mathcal{F}_m) = 3m + 1$ pontos sobre a reta PP' , obtemos por Bézout:

$$(3m + 2)^2 = \{3m + 1\} + \{9 \cdot (m^2 + m - 1)\} + x$$

e de onde sai que $x = 12$: eis aí os doze pontos nodais extra do pencil \mathcal{F}_m .

Vamos justificar agora todas essas afirmações.

Sobre o fato que $D_{tang,P}$ tenha multiplicidade $\nu_{p_i}(D_{tang,P}) = m$, isso se pode provar via folheações. O divisor de tangências entre duas folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} é da forma $N_{\mathcal{F}} + T_{\mathcal{G}}^*$ (divisor normal de uma somado ao cotangente de outra) e tem multiplicidade que em nosso caso dá realmente m .

Mas o que significam essas direções tangentes comuns/distintas aos dois divisores em cada ponto-base? Observe que a partir de $m \geq 2$, como cada curva do pencil tem ponto m -uplo em p_i , na reta excepcional $E_i = \sigma^{-1}(p_i)$ obtemos aplicação de grau m :

$$f_m : E \rightarrow CP(1)$$

que a cada ponto de E associa o parâmetro λ/μ do transformado estrito da curva do pencil de Halphen $\lambda F + \mu G = 0$ que passa por ele.

Por Riemann-Hurwitz devem haver $2(m-1)$ pontos de ramificação (contados com multiplicidade) da f_m , e como já existe a cúbica tomada m vezes no pencil, sobram mais $m-1$ ramificações.

Geometricamente são $m-1$ pontos de tangências (desde que contadas com multiplicidade) entre os transformados das curvas do pencil e E .²

Ora, no plano esses pontos de tangência viram $m-1$ cúspides de elementos do pencil passando em p_i .

A Figura 3 a seguir ilustra $m=2$, com uma cúspide apenas, que produzirá em E uma única tangência. A reta vertical simboliza a cúbica, que produz um E a segunda ramificação de f_m .

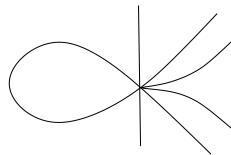
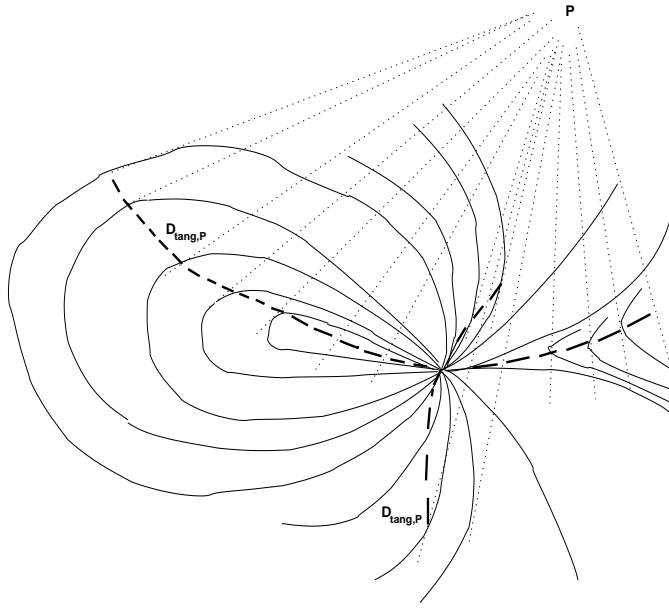


Figura 3

A Figura 4 a seguir ilustra ainda para $m=2$ por que há uma direção em que $D_{tang,P}$ e $D_{tang,P'}$ se tangenciam e que não depende dos pontos P, P' , e outras duas direções que sim dependem de P e P' . Na Figura representei apenas uma escolha de direções por P . A figura indica que, à medida que as singularidades duplas ordinárias são "estranguladas" até formar a cúspide, se forma um ramo de $D_{tang,P}$ cuja tangente em p_i é sempre horizontal, e se vê que seguiria sendo horizontal para outro P' . A direção horizontal na origem é a direção da tangente da cúspide (o mesmo se faz para $m \geq 3$, com $m-1$ cúspides). Por outro lado se vê que num ponto duplo ordinário de uma curva nodal por p_i a tangente a um dos ramos passa por P .

²Num pencil genérico de Halphen não há mais singularidades sobre E_i , as p_i são eliminadas por uma explosão cada

Figura 4: Para $m = 2$ **Prova analítica para $m = 2$**

Vamos provar analiticamente o que a figura anterior sugere.

Nesse caso $m = 2$, Halphen localiza a posição da cúspide do seguinte modo: ela é a direção que forma o quarto harmônico relativo a : 1) a direção dada pela cúbica do pencil que se conta duplamente e 2),3) os dois ramos locais de qualquer gerador irreduzível do pencil de sêxticas.

De fato, como já explicado, para $m = 2$, $f_2 : E \rightarrow E = \mathbb{P}^1$ é uma involução, com pontos fixos no ponto correspondente à cúbica dupla e no ponto de tangência. E por outro lado se sabe que toda involução da reta complexa tem dois pontos fixos e seu efeito é o de trocar de posição dois conjugados harmônicos.

Portanto a singularidade do pencil de Halphen \mathcal{F}_2 num ponto-base pode ser representada localmente por $\omega = 0$ onde:

$$\omega := \frac{1}{x} \cdot [d(g_c \cdot g_{-c}) \cdot x^2 - (g_c \cdot g_{-c}) 2x dx]$$

na qual $(x^2 = 0)$ representa localmente a cúbica (vertical), $y = 0$ é a tangente da cúspide (horizontal) e os dois ramos locais de uma sêxtica

irreduzível do pencil foram tomados:

$$g_c = y - cx + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 \dots = 0,$$

$$g_{-c} = y + cx + c_{22}x^2 + c_{23}x^3 + \dots = 0.$$

Um cálculo explícito mostra que

$$\omega = -2y^2dx + 2xydy + \text{h.o.t.},$$

pois nas simplificações que se faz c e $-c$ se cancelam.

Tomemos agora uma família de retas pela origem $(x, y) = (0, 0)$ com inclinação α e façamos a contração de ω com o campo vetorial local que induz as retas: $X = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}$, obtendo:

$$\omega(X) = 2y(\alpha x - y) + \text{h.o.t}$$

e então se vê que $D_{tang,p}$ realmente tem $\nu_{p_i} = 2$, e ademais, tem tangentes de ramos locais dados por $y = 0$ (da cúspide, independente da direção escolhida α) e outra $y = \alpha x$ que depende sim da direção α .

Apêndice B: Dimensão de sistemas lineares

Um *sistema linear* de grau d em \mathbb{P}^k é o espaço vetorial projetivo n -dimensional formado por hipersuperfícies da forma:

$$\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_N P_N = 0 \quad ; \quad (\alpha_0 : \cdots : \alpha_N) \in \mathbb{P}^N$$

onde P_0, \dots, P_N são polinômios homogêneos de grau d linearmente independentes em $k + 1$ variáveis x_0, \dots, x_k .

Adotamos a expressão inglesa *pencil* para sistema linear de dimensão projetiva 1; chamamos de *net* os de dimensão 2 e *web* os dimensão 3.

O conjunto de polinômios homogêneos:

$$\sum_{i_0 + \cdots + i_k = d} a_{i_0 \dots i_k} x_0^{i_0} \cdots x_k^{i_k}$$

forma um espaço vetorial complexo de dimensão $\binom{d+k}{k}$ (combinação com repetição de $k+1$ elementos em grupos de d). Considerando dois polinômios equivalentes quando são múltiplos um do outro, conclui-se que o conjunto das hipersuperfícies em \mathbb{P}^k de grau d forma um espaço vetorial de dimensão projetiva

$$N = \binom{d+k}{k} - 1.$$

Proposição 4.8. *Se p_1, \dots, p_r são pontos distintos de \mathbb{P}^k , o sistema linear de hipersuperfícies de \mathbb{P}^k de grau d que têm nestes pontos multiplicidade*

pelo menos n tem dimensão projetiva:

$$\geq \max\left\{-1, \binom{d+k}{k} - 1 - r \cdot \binom{n+k-1}{k}\right\}$$

Em particular:

- o sistema das curvas de \mathbb{P}^2 de grau d com multiplicidade pelo menos n em r pontos tem dimensão projetiva:

$$\geq \max\left\{-1, \frac{d(d+3)}{2} - r \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

- o sistema das superfícies de \mathbb{P}^3 de grau d com multiplicidade pelo menos n em r pontos tem dimensão projetiva:

$$\geq \max\left\{-1, \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - 1 - r \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right\}$$

A prova dessa Proposição consiste em primeiramente contar quantas condições lineares nos coeficientes das hipersuperfícies resultam de impor-mos que as derivadas de ordem n se anulem em um ponto (consequentemente, pela fórmula de Euler, as de ordem $\leq n$ também se anulam): são $\binom{n+k-1}{k}$ condições. Em seguida se supõe que as condições impostas pelos r diferentes pontos sejam independentes.

Como a dimensão não pode ser menor que a dimensão -1 de um sistema vazio, colocamos o máximo entre -1 e

$$\binom{d+k}{k} - 1 - r \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

como cota inferior dessa dimensão.

Podemos definir um sistema de hipersuperfícies de grau d que tem r pontos n -uplos como *não-especial* se sua dimensão atinge o o menor valor possível, que é dado por:

$$= \max\left\{-1, \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - 1 - r \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right\}$$

Caso contrário o sistema é dito *especial*. Exemplo de sistema *especial* no plano: cônicas com dois pontos duplos. A princípio não deveria haver uma cônica assim, pois $\frac{2(2+3)}{2} - 2 \cdot \frac{2(3)}{2} = -1$. Mas podemos tomar uma reta L com multiplicidade dois, $2L$, como elemento do sistema e portanto sua dimensão é 0 e o sistema é especial. Interessante nesse exemplo que tudo que se pode pedir de dois pontos em termos geométricos é dado, ou seja, que sejam distintos.

É um tema de pesquisa atual e importante tentar descrever/caracterizar os sistemas especiais (ver trabalho de Ciliberto-Miranda [10] e referências). Esses autores definem sistemas (-1) -*especiais* (uma definição técnica, de [10], definição 2.1, mas a terminologia faz referência à auto-intersecção -1 do transformado estrito de certas curvas, por exemplo da reta dupla $2L$ no sistema anterior) e mostram que os sistemas (-1) -*especiais* são *especiais*. Sob hipóteses sobre as multiplicidades, quando o sistema é *homogêneo*, ou seja, todas as multiplicidades são iguais nos r pontos, então os sistemas (-1) -*especiais* são conhecidos (Teorema 2.4 de [10]).

Por exemplo, o sistema acima de cônicas com multiplicidade dois em dois pontos é (-1) -especial.

Dentre os resultados do Teorema 2.4 de [10], utilizamos:

- Um sistema linear de curvas de grau d com 8 pontos n -uplos é (-1) -*especial* se e somente se $48n/17 \leq d \leq (17n - 2)/6$
- Sistemas lineares homogêneos com multiplicidades determinadas em mais de 8 pontos (i.e., $r \geq 9$) não são (-1) -*especiais*

Nos interessam os casos com 8 pontos onde $d = 3$ e $n = 1$ e onde $d = 6$ e $n = 2$. Pelo que foi observado acima, estes sistema não são (-1) -*especiais*. Consideraremos ainda sistemas com 9 pontos n -uplos, que também não são (-1) -*especiais*.

A principal *Conjectura* é que: *os sistemas especiais são (-1) -especiais*.

Claro que vários resultados sobre essa Conjectura são conhecidos, em geral dependendo ou de n ou de relações entre n e d , mas muito ainda resta a saber.

Felizmente, na Proposição 5.1 de [10] se prova a Conjectura para *qualquer* n com $d \leq 3n$, em sistemas homogêneos de curvas de grau d com r pontos n -uplos.

Os casos que nos interessam no plano \mathbb{P}^2 são: quando $d = 3$ e $n = 1$ ou quando $d = 6$ e $n = 2$, ambos com $r \leq 9$. Mais geralmente, nos pencils de Halphen gerais $d = 3 \cdot n$ e $r \leq 9$, portanto onde se tem provada a Conjetura.

Então esses nove pontos em posição geral determinam sistemas lineares de cúbicas ou de sêxticas com pontos duplos cujas dimensões projetivas são zero. Daí se vê que para termos pelo menos um pencil dessas curvas dever haver uma posição não-geral (especial) dos nove pontos.

Quando se trata de sistemas lineares de superfícies de \mathbb{P}^3 com multiplicidades em pontos se sabe menos ainda.

Felizmente para os casos que nos interessam, $d = 2$ e $n = 1$, $d = 4$ e $n = 2$ com $r = 8$ o Teorema 5.3 de [14] garante que são sistemas não-especiais, ou seja com a dimensão mínima desde que os $r \leq 8$ pontos estejam em posição geral (de fato, o mesmo vale para $d = 2n$ e até oito pontos com $n \geq 1$ qualquer, de acordo com [14]).

Ou seja por sete pontos em posição geral há um net de quádricas, um web de superfícies quárticas com pontos duplos; por oito em posição geral há um único pencil de quádricas e um net de quárticas com pontos duplos.

Agradecimentos

Certamente não escrevi esta dissertação sozinho. Devo muito não somente aos Mestres antigos, como Cayley, Halphen, Bertini e Cremona, mas também aos Mestres de hoje, como o Professor Luís Gustavo Mendes, Professor Paulo Sad, Professor Ivan Pan e Professor Luiz Fernando da Rocha. Dedico aqui um agradecimento especial a estes que fizeram com que o presente trabalho esteja mais correto e completo.

A contribuição destes Mestres na dissertação foi mais do que a de uma banca, pois certos trechos foram efetivamente escritos por eles. Devo um agradecimento especial ao Professor Paulo Sad, que atuou como um co-orientador desta dissertação.

No primeiro capítulo, a Proposição 1.7 faz a relação entre o importantíssimo Teorema de Abel e o trabalho de Halphen. Parte da demonstração desta proposição foi elaborada pelo Professor Ivan Pan e pelo Professor Armando Treibich.

Este mesmo capítulo também teve importantes correções sugeridas pelo Professor Luiz Fernando, no que diz respeito a Superfícies de Riemann mergulhadas como curvas algébricas e suas funções meromorfas.

Ainda no primeiro capítulo, o roteiro da demonstração do Lema 1.8 foi sugerido pelo Professor Paulo Sad. Também é de autoria dele o conceito de Pencil de Halphen genérico, introduzido pela Definição 1.10.

Na Seção 1.4, as observações sobre o grau da involução de Bertini e as curvas colapsadas por ela foram feitas pelo Professor Luís Gustavo Mendes. Também foi escrita por ele a Seção 2.1.1, que fala sobre como Cremona considerou a involução de Bertini na cúbica de Del Pezzo, e a Seção 2.2.1, que observa os aspectos algorítmicos do método de Cremona-Sturm-Hilton.

O Professor Paulo Sad também contribuiu muito no Capítulo 4. O Lema 4.7 foi de sua autoria, assim como a demonstração.

O Apêndice A, como já referido, foi escrito pelo Professor Luís Gustavo Mendes. Diversas partes do Apêndice B também foram redigidas por ele.

Sou muito grato pela participação e ajuda destes Mestres.

Referências Bibliográficas

- [1] H. F. Baker, “*Principles of Geometry*”, V. 5, (1960)
- [2] H. Bateman “*The Double Tangents of a Binodal Quartic*”, American J. of Math., Vol. 35, No. 1, (1913), 57-78.
- [3] A. Beauville, “*Complex Algebraic Surfaces*”, London Math. Soc., (1996).
- [4] E. Bertini, “*Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*”, Ann. di Mat. pura ed applicata, (2), 8, (1877), 244-286.
- [5] E. Brieskorn, H. Knörrer, “*Plane Algebraic Curves*”, English edition, Birkhäuser Verlag Basel, (1986).
- [6] H. Cartan, “*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes*”, Herrmann, Paris, (1961).
- [7] Cayley “*A Memoir on quartic Surfaces*”, Proc. London Math. Soc. (1869) s1-3: 19-69.
- [8] Cayley “*A Second Memoir on quartic Surfaces*”, Proc. London Math. Soc. (1869) s1-3: 198-202.
- [9] D. Cerveau, A. Lins Neto, “*Codimension one foliations in $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$ with Kupka components*, Asterisque, S.M.F., 222, (1994), 4, 93–133.
- [10] C. Ciliberto e R. Miranda, “*Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity*” Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 9, 4037–4050.

- [11] A. B. Coble “*Point sets and allied Cremona groups*”, I. Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), no. 2, 155-198
- [12] A. B. Coble “*The ten nodes of the rational sextic and of the Cayley symmetroid*”, American J. 41, (1919), 243-265.
- [13] J. R. Conner “*Correspondences Determined by the Bitangents of a Quartic*”, American J. of Math., Vol. 38, No. 2, (1916), 155-176.
- [14] C. De Volder, A. Laface, “*On linear systems of \mathbb{P}^3 through multiple points*”, J. Algebra 310 (2007), no. 1, 207-217.
- [15] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh “*Finite subgroups of the plane Cremona group*”, ArXiv Math. e-prints (2006).
- [16] S. Endrass, U. Persson, J. Stevens “*Surfaces with triple points*”, ArXiv Math. e-prints (2007).
- [17] M. B. Gambier “*Sur les faisceaux de courbes planes d’ordre $3m$ ayant neuf points multiples d’ordre m et leur lien avec la surface cubique générale*”, Mathesis 40, (1926), 49-56.
- [18] L. Godeaux “*Sur les faisceaux de courbes planes du sixième ordre de Halphen*”, Mathesis 154. (1922).
- [19] G. Halphen “*Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles*”, Bulletin de la Société Mathématique de France, 10 (1882), 162-172.
- [20] H. Hilton “*On a plane curve of degree six with nine nodes*”, Journal London Math. Society 1 (1926), 2-3.
- [21] J. Hodgkinson “*The Nodal Points of a Plane Sextic*”, Proc. London Math. Soc. (1917), s2-15: 343-353.
- [22] S. L. Kleiman, “*Bertini and his two fundamental theorems*”, ArXiv Mathematics e-prints (1997).

-
- [23] O. Labs, “*Kubische Flächen und die Coblesche Hexaederform*”, Diplomarbeit, Univ. Mainz, (2001).
- [24] M. N. Levine, V. Srinivas, “*Zero Cycles on certain singular elliptic surfaces*”, *Compositio Mathematica*, tome 52, n. 2 (1984), p.179-196.
- [25] R. Miranda, “*Algebraic curves and Riemann surfaces*”, *Graduate Texts in Mathematics*, Amer. Math. Soc., (1995).
- [26] I. R. Shafarevich, “*Algebraic geometry I: algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*”, Springer-Verlag (1994).
- [27] R. Sturm “*Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*”, 1909.
- [28] E. C. Valentiner, “*Nogle Sætninger om visse algebraiske Kurver*” (Some theorems on certain algebraic curves), *Zeuthen T.* 4, (1881), V. 88-91.