Problemas Selecionados com Soluções*

Luís Gustavo Doninelli Mendes ‡

28 de Setembro de 2010

1 Apresentação

A seguir proponho uma lista de Problemas que me pareceram interessantes e relevantes. Lembre:

Só se aprende matemática resolvendo problemas !

Antes de ler as Soluções pense muito, pense mais ainda, pense sozinho e proponha a sua solução.

Quem sabe você achará uma solução mais elegante, mais sintética, etc, do que a que eu apresento.

Pretendo ir colocando também as soluções dos leitores que tenham idéias diferentes das minhas.

Sugestões, críticas, comentários, envie para *mendes.lg@gmail.com*

---

*Você os encontra em *Um Curso de Cálculo e Equações Diferenciais com Aplicações*, disponível no site *www.mat.ufrgs.br/˜mendes*

†Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UFRGS

‡Última atualização: 28/09/2010

2 Problemas:

Exercício 2.1. (Desigualdade triangular)

Prove que para quaisquer números Reais $\square$ e $\triangle$:

$$|\square + \triangle| \leq |\square| + |\triangle|.$$

Exercício 2.2. Usando que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e composições de funções prove que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(k\cdot x)}{x} = k, \quad \forall k \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(k\cdot x)}{\sin(x)} = k,$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(j\cdot x)}{\sin(k\cdot x)} = \frac{j}{k}, \quad \forall k, j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Exercício 2.3. A equação $x^3 + 1 = 0$ e, em geral, as as equações de grau ímpar

$$x^{2n+1} + 1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

tem obviamente como única raíz Real o $\underline{x} = -1$.

Não é fácil resolver explicitamente a equação $x^3 + \epsilon\cdot x + 1 = 0$, com $\epsilon \geq 0$ fixado, a menos que se conheça a fórmula de Cardano; com ela se obtém a raíz Real

$$\underline{x} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^3}{27}}}.$$

Torna-se intratável tentar resolver explicitamente o seguinte tipo de equação de grau ímpar:

$$x^{2n+1} + \epsilon_1\cdot x^{2n-1} + \epsilon_2\cdot x^{2n-3} + \ldots + \epsilon_{n-1}\cdot x^3 + \epsilon_n\cdot x + 1 = 0,$$

com

$$\epsilon_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots n-1 \quad \text{e} \quad \epsilon_n > 0$$

fixados.

i) Prove que cada uma dessas equações têm um única raíz Real.

ii) Prove que a raíz de cada uma delas está em $[-1, 0)$.

iii) Para cada número em $[-1, 0)$ encontre alguma dessas equações que o tenha como única raíz.

Exercício 2.4. (Putnam Competition, n. 2, 1939)

Seja P ponto da curva $y = x^3$ tal que a reta tangente ao gráfico em P intersecta de novo o gráfico num ponto $Q \neq P$.

Mostre que a reta tangente ao gráfico em Q tem inclinação igual a 4 vezes a inclinação em P.

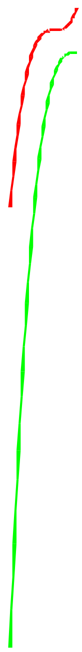
Exercício 2.5. Em 1687, Huygens observou que as curvas $y = a \cdot x^{\frac{3}{4}} - x$, para $x \geq 0$, com $a > 0$ fixado, têm as seguintes propriedades:

i) a área da região finita que fica entre seus gráficos e o eixo dos x tem área $\frac{a^8}{14}$.

ii) a tangente ao seu gráfico em $(\underline{x}, \underline{y})$ passa por $(-\frac{\underline{x}}{3}, \frac{\underline{x}}{3})$, não importando qual o $a >$ fixado.

Prove i) e ii) e, ademais, esboce qualitativamente o gráfico de $y = x^{\frac{3}{4}} - x$, para $a > 0$. Ou seja, determine sinais e raízes, crescimento e decrescimento, concavidades e se há assíntotas quando $x \to +\infty$.

Exercício 2.6. Considere a Figura a seguir, que dá em vermelho o gráfico de $y = x^3$ restrito a $x \in (-2, 1)$ e, em verde, o gráfico de $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ também para $x \in (-2, 1)$.



Prove que existe uma reta que apenas tangencia o gráfico verde e que consegue passar entre os dois gráficos sem intersectar o gráfico vermelho.

Dica: a Figura sugere uma reta, prove que ela satisfaz o que se pede.

Exercício 2.7. (Putnam Competition, n. 68, 1993)

Encontre todos os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais as curvas

$$C_\alpha : \quad y = \alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot x + \frac{1}{24} \quad \text{e } D_\alpha : \quad x = \alpha \cdot y^2 + \alpha \cdot y + \frac{1}{24}$$

tem algum ponto de tangência.

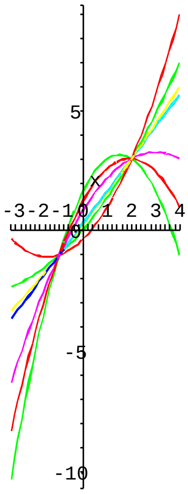
Exercício 2.8. (Putnam Competition, n. 1, 1938)

Dada a parábola $y = \frac{1}{2m} \cdot x^2$, determine a menor corda ortogonal ao gráfico em um dos extremos.

Exercício 2.9. Considere a família de gráficos

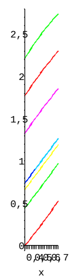
$$y = f_b(x) := (-b + 4/3) \cdot x^2 + b \cdot x + (2b - 7/3), \quad b \in R,$$

dos quais plotei apenas 7 representantes ($b = 1, 1.2, 1.3, 4/3, 1.6, 1.8, 2$):



Como se vê são gráficos bem diferentes, à medida que mudamos o parâmetro b.

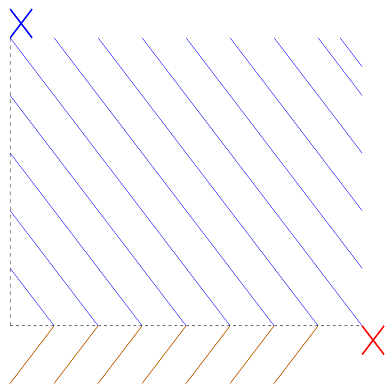
Mas quando se faz um zoom na região $x \in [0.3, 0.7]$ do domínio, os pedaços dos 7 gráficos de $y = f_b(x)$ se parecem muito:



Explique o que aconteceu quando fizemos o zoom, após confirmar que que os pontos $(-1, -1)$ e $(2, 3)$ pertencem a esses gráficos todos, $\forall b \in R$).

Exercício 2.10. (O Problema do salva-vidas)

Estando no ponto $(8,0)$, na areia da praia, o salva-vidas tem que sair correndo para salvar alguém que se afoga no ponto $B = (0,5)$, dentro do mar. Veja a Figura.



Suponha que a velocidade do salva-vidas na praia é v_1 m/s e na água é $v_2 < v_1$, com razão:

$$k := \frac{v_2}{v_1} < 1.$$

A questão é a seguinte: para que ele chegue o mais rápido possível, até que ponto $(x,0)$ com $x \in [0,8]$ ele deve correr pela praia, para daí então ir em linha reta nadando até B ?

Na solução a coordenada x do ponto buscado será função de k, ou seja, $x(k)$.

Também mostre que:

i) se k verifica $k^2 \cdot (k^2 - 1) < 0$ então sair já de $(8,0)$ nadando não é a melhor estratégia para o salva-vidas.

ii) mostre que $\lim_{k\to 0} x(k) = 0$. Ou seja, para valores de k muito pequenos o melhor é correr pela areia até quase a origem e dali sair nadando em ângulo reto.

iii) Para um salva-vidas que corresse como Usain Bolt e nadasse como César Cielo teríamos $k \sim 0.22$. Mas se nadasse como Cielo e corresse como uma pessoa normal, então[1] $k \sim 0.55$.

Confirme que nesses dois casos

$$x(k) = x(0.22) \sim 1.12 \quad \text{e} \quad x(k) = x(0.55) \sim 3.34.$$

Exercício 2.11. (O problema do freteiro - Spivak, Anton, etc)

Imagine que você está transportando, numa mudança, uma vara. Durante o transporte ela não poderá ser deformado, nem vergado.

Você vem com ele por um corredor que mede l_1 de largura e que dobra em ângulo reto, chegando numa sala de largura

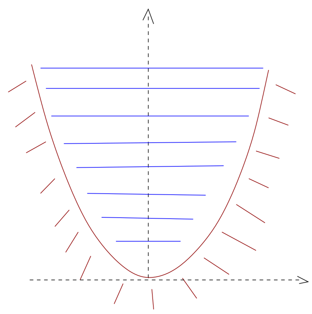
$$l_2 = k \cdot l_1 \geq l_1.$$

[1]Esses valores de k foram calculados pelo estudante Rafael Kuch, a quem agradeço

Pensando o problema como um problema *no plano*, não-espacial, trata-se de determinar *o comprimento máximo da vara* para que você consiga passá-la para a sala.

Exercício 2.12. Uma pessoa está nadando e se encontra na posição $(0, a)$ no eixo dos y, com $a > 0$.

O formato da praia é o da parábola $y = x^2$, como na Figura a seguir.



Se ele quer chegar o mais rápido possível à praia, a partir de que valor de a a melhor escolha é ir nadando verticalmente até a origem $(0, 0)$?

Exemplifique com um valore de a para o qual essa não é a melhor escolha.

Exercício 2.13. Um planeta de move em trajetória elíptica, em que o Sol é um dos focos da elipse.

Observado a partir de um ponto $(x, y) = (0, 0)$, o planeta está, num certo instante t_0, na posição (x_0, y_0), onde $x_0 > y_0 > 0$.

Ademais, sua coordenada x tem em t_0 uma taxa de variação de $-1\, UA/s$, enquanto que sua coordenada y tem taxa de variação de $1\, UA/s$.

i) Determine a equação (padrão) da elipse que descreve sua trajetória.

ii) Determine as posições possíveis do Sol.

iii) A distância do foco onde está o Sol até o vértice mais próximo é chamado de *perihélio* do planeta. Determine-o.

Exercício 2.14. (Putnam Competition, n. 11, 1951)

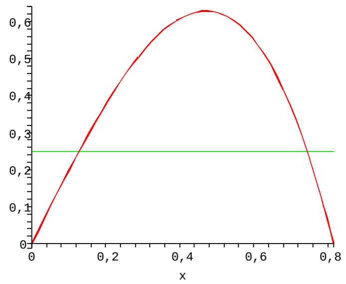
Prove que:

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1 + x}, \quad \forall x > 0.$$

Exercício 2.15. (Putnam Competition, n. 54, 1993)

A reta horizontal $y = C > 0$ corta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como na Figura abaixo.

Encontre o valor de C que faz com que as áreas das duas regiões delimitadas pelos gráficos sejam iguais.



Aproveito para colocar um problema um pouco mais geral do que esse:

Exercício 2.16. A reta horizontal $y = C > 0$ corta a curva $y = A \cdot x + B \cdot x^3$, com $A > 0$ e $B < 0$, no primeiro quadrante como na Figura (basta exigir $A > 0$ e $B < 0$ para termos qualitativamente a mesma figura).

Encontre o valor de C que faz com que as áreas das duas regiões delimitadas pelos gráficos sejam iguais.

Exercício 2.17. (Putnam Competition, n. 2, 1939)

Avalie as integrais:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)\cdot(x-1)}}\, dx$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\, dx.$$

3 Soluções:

Exercício 2.1:

Minha solução:

O que se quer provar é que:

$$\square + \triangle \leq |\,\square\,| + |\triangle|, \quad \text{caso} \quad 0 \leq \square + \triangle,$$

ou que

$$-(\square + \triangle) \leq |\,\square| + |\triangle|, \quad \text{caso} \quad \square + \triangle < 0.$$

Caso $0 \leq \square + \triangle$: obviamente que valem

$$\square \leq |\,\square| \quad \text{e} \quad \triangle \leq |\triangle|,$$

e somando essas duas desigualdades obtemos o desejado:

$$\square + \triangle \leq |\,\square| + |\triangle|.$$

Caso $\square + \triangle < 0$: então pelo menos um deles é negativo, por exemplo, suponhamos que $\square < 0$. *Por absurdo*, suponha que

$$|\square| + |\triangle| < -(\square + \triangle).$$

Como $|\square| = -\square$, cancelamos esses termos na desigualdade anterior e obtemos então que:

$$|\triangle| < -\triangle.$$

Se $0 < \triangle$ então chegamos no absurdo:

$$0 < \triangle =: |\triangle| < -\triangle < 0.$$

Se $\triangle \leq 0$ então $-\triangle =: |\triangle| < -\triangle$ é outro absurdo.

Logo

$$-(\square + \triangle) \leq |\square| + |\triangle|, \quad \text{caso} \quad (\square + \triangle) < 0.$$

Solução do estudante Walter Ferreira Diniz Júnior:

Primeiro afirmo que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1^2 \leq x_2^2.$$

Que $0 \leq x_1^2$ é claro. E como $0 \leq x_1 \leq x_2$, então

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1^2 \leq x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_1^2 \leq x_2^2,$$

como queríamos.

Aplicando isso a $x_1 = |\Box + \triangle|$ e $x_2 = |\Box| + |\triangle|$ temos a equivalência:

$$|\Box + \triangle| \leq |\Box| + |\triangle| \Leftrightarrow (\Box + \triangle)^2 \leq (|\Box| + |\triangle|)^2.$$

Mas então queremos saber se:

$$\Box^2 + 2 \cdot \Box \cdot \triangle + \triangle^2 \leq \Box^2 + 2 \cdot |\Box| \cdot |\triangle| + \triangle^2,$$

ou seja, se

$$\Box \cdot \triangle \leq |\Box| \cdot |\triangle|.$$

Se $\Box$ e $\triangle$ têm o mesmo sinal então há igualdade nessa expressão. Se $\Box$ e $\triangle$ têm sinais opostos há desigualdade estrita.

Exercício 2.2:

Note primeiro que a função $h(x)$ dada por

$$\frac{\sin(k \cdot x)}{k \cdot x} \quad \text{se} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad h(0) := 1,$$

é a composição $h := f(g(x))$ da função contínua

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}, \quad \text{se} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(0) := 1,$$

com a função contínua $g(x) := k \cdot x$.

Logo h é contínua e portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(k \cdot x)}{k \cdot x} = 1.$$

Mas então:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(k \cdot x)}{k \cdot x} \cdot k = k,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(k \cdot x)}{x} = k.$$

Para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(k \cdot x)}{\sin(x)}$$

faço

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(k \cdot x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(k \cdot x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(k \cdot x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = k \cdot 1 = k.$$

Para calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(j \cdot x)}{\sin(k \cdot x)}$$
escrevo, para $x \neq 0$:
$$\frac{\tan(j \cdot x)}{\sin(k \cdot x)} := \frac{\sin(j \cdot x)}{\cos(j \cdot x) \cdot \sin(k \cdot x)} = \frac{j}{k} \cdot \frac{\sin(j \cdot x)}{j \cdot x} \cdot \frac{k \cdot x}{\sin(k \cdot x)} \cdot \frac{1}{\cos(j \cdot x)}.$$
Usando o que vimos acima (bem como limite de produto e inverso e a continuidade do cosseno) o limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(j \cdot x)}{\sin(k \cdot x)}$$
vira
$$\frac{j}{k} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(j \cdot x)}{j \cdot x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{k \cdot x}{\sin(k \cdot x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(j \cdot x)} = \frac{j}{k}.$$

Exercício 2.3:

No Curso se mostrou que todo polinômio Real de grau ímpar tem alguma raíz Real.

Mas para esses polinômios o Teorema do Valor Intermediário mostra que há raíz no intervalo $[-1, 0)$, já que
$$f(-1) := -1 - (\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n) + 1 < 0,$$
$f(0) = 1$.

O problema aqui é mostrar que só há uma Raíz Real para cada um desses polinômios.

Suponhamos por absurdo que a equação
$$x^{2n+1} + \epsilon_1 \cdot x^{2n-1} + \epsilon_2 \cdot x^{2n-3} + \ldots + \epsilon_{n-1} \cdot x^3 + \epsilon_n \cdot x + 1 = 0$$
tenha duas raízes $\underline{x}_1, \underline{x}_2$, com $\underline{x}_1 < \underline{x}_2$. Então pelo Teorema de Rolle a derivada da função
$$f(x) := x^{2n+1} + \epsilon_1 \cdot x^{2n-1} + \epsilon_2 \cdot x^{2n-3} + \ldots + \epsilon_{n-1} \cdot x^3 + \epsilon_n \cdot x + 1$$
tem que se anular num ponto $\underline{x} \in (\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. Mas
$$f'(x) := (2n+1) \cdot x^{2n} + \epsilon_1 \cdot (2n-1) \cdot x^{2n-2} + \epsilon_2 \cdot (2n-3) \cdot x^{2n-4} + \ldots + \epsilon_{n-1} \cdot 3 \cdot x^2 + \epsilon_n = 0$$
não tem Raíz Real, pois cada um de seus monômios tem grau par, os $\epsilon_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$ e $\epsilon_n > 0$.

Logo só há uma raíz Real.

Agora dado um $\underline{x} \in [-1, 0)$ fixado, resolvo a seguinte equação linear em ϵ:

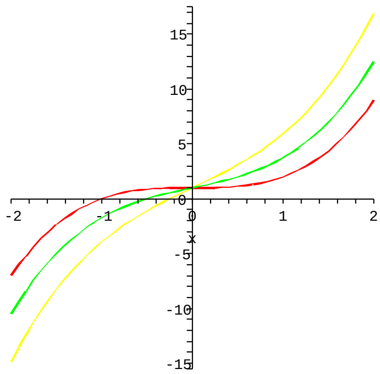
$$\underline{x}^3 + \epsilon \cdot x + 1 = 0$$

obtendo:

$$\epsilon = \frac{-1 - \underline{x}^3}{\underline{x}}$$

e facilmente se vê que $\epsilon \geq 0$ e é zero quando $\underline{x} = -1$.

A seguir ploto três gráficos, de $y = x^3 + 1$, de $y = x^3 + \frac{7}{4} \cdot x + 1$ cuja raíz é $-\frac{1}{2}$ e de $y = x^3 + \frac{63}{16} \cdot x + 1$ cuja raíz é $-\frac{1}{4}$.



Exercício 2.4:

Seja $P = (a, a^3)$. Então $a \neq 0$ pois de $P = (0, 0)$ a reta tangente é horizontal e não intersecta o gráfico noutro ponto $Q \neq P$.

A reta tangente em P tem equação:

$$y = 3a^2 \cdot x - 2a^2$$

e $Q = (\underline{x}, \underline{x}^3)$ verifica a equação:

$$\underline{x}^3 = 3a^2 \cdot \underline{x} - 2a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x}^3 - 3a^2 \cdot \underline{x} + 2a^2 = 0.$$

Ora, a é raíz dupla essa equação, já que em P há tangência, logo:

$$\underline{x}^3 - 3a^2 \cdot \underline{x} + 2a^2 = (x - a)^2 \cdot p(x)$$

onde $p(x)$ é de grau 1 e facilmente se vê, por divisão, que:

$$p(x) = x + 2a.$$

Ou seja, o ponto Q tem coordenadas $Q = (-2a, -8a^3)$.

A inclinação da reta tangente por Q é:

$$3 \cdot (-2a)^2 = 3 \cdot (4a^2) = 4 \cdot (3a^2),$$

ou seja, 4 vezes a inclinação em P.

Exercício 2.5:

A equação da reta tangente de $y = a \cdot x^{\frac{3}{4}} - x$ por

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, a \cdot \underline{x}^{\frac{3}{4}} - \underline{x})$$

é:

$$y = (\frac{3a}{4} \cdot \underline{x}^{-\frac{1}{4}} - 1) \cdot x + a \cdot \underline{x}^{\frac{3}{4}} - \underline{x} - (\frac{3a}{4} \cdot \underline{x}^{-\frac{1}{4}} - 1) \cdot \underline{x}.$$

Um conta imediata mostra que essa reta passa por $(-\frac{\underline{x}}{3}, \frac{\underline{x}}{3})$.

A função $y = f(x) = a \cdot x^{\frac{3}{4}} - x$ corta o eixo dos x em $x = 0$ e em $x = a^4$. A partir deste ponto $f(x) < 0$.

Enquanto que $f'(x) = \frac{3a}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} - 1$, que só está definida para $x > 0$, se anula em $x = (\frac{3}{4})^4$; ademais $f'(x) > 0$ no intervalo $(0, (\frac{3}{4})^4)$ e $f''(x) > 0$ no intervalo $((\frac{3}{4})^4), +\infty)$.

Ou seja, que em $(0, (\frac{3}{4})^4)$ a função cresce, tem em $x = (\frac{3}{4})^4$ um máximo absoluto, e depois sempre decresce.

Temos

$$\lim_{x \to +\infty} a \cdot x^{\frac{3}{4}} - x = \lim_{x \to +\infty} x \cdot (\frac{a}{x^{\frac{1}{4}}} - 1) = +\infty \cdot (-1) = -\infty,$$

enquanto que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3a}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} - 1 = -1,$$

ou seja que há uma assíntota oblíqua de inclinação -1 para $y = f(x)$.

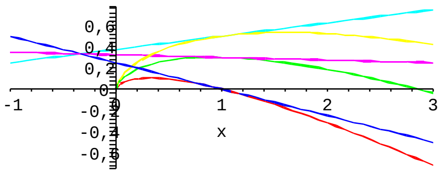
Também $f''(x) = -\frac{3a}{16} x^{-\frac{5}{4}} < 0 \ \forall x$, ou seja que a função sempre é côncava para baixo.

A área da região é:

$$\int_0^{a^4} a \cdot x^{\frac{3}{4}} - x = (\frac{4a}{7} x^{\frac{4}{7}} - \frac{x^2}{2})(a^4) = \frac{a^8}{14}.$$

A figura aseguir dá três exemplos, em vermelho, verde e amarelo, com $a = 1, 1.3, 1.5$ e onde

$$(-\frac{\underline{x}}{3}, \frac{\underline{x}}{3}) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$



Exercício 2.6:

Primeiro vou usar a intuição sugerida pela figura. A figura *parece indicar* que a reta tangente a $y = x^3$ em $(1, 1)$ consegue passar entre os dois gráficos, apenas tocando o gráfico verde. Como só consideramos $x < 1$ ela é uma boa candidata.

Ou seja, conjecturo que a reta

$$y = 3x - 2$$

tangencia o gráfico de $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ e passa entre os dois gráficos sem intersectar o gráfico de $y = x^3$, desde que restrinjamos

$$x \in (-2, 1).$$

Como é a intersecção de $y = 3x - 2$ com $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$?

Faço $3x - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ e obtenho $x^3 - 3x^2 = 0$, ou seja

$$x^2 \cdot (x - 3) = 0.$$

Então a reta $y = 3x-2$ tangencia $y = x^3-3x^2+3x-2$ no ponto $(0, -2)$ (e intersecta-a também no ponto $(3, 7)$, mas esse ponto não nos interessa).

E onde $y = 3x - 2$ intercecta $y = x^3$, além do ponto $(1, 1)$? Faço:

$$x^3 = 3x - 2,$$

ou seja, quero resolver $x^3 - 3x + 2 = 0$. Se não vejo imediatamene as soluções, posso pensar assim: como $x = 1$ é ponto de tangência, então:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 \cdot (ax + b)$$

e o outro ponto será $x = \frac{-b}{a}$.

Ora, por divisão obtenho

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2),$$

portanto $x = -2$. Mas este ponto não pertence ao intervalo $(-2, 1)$. Ou seja, que $y = 3x - 2$ passa entre os gráficos, tocando o gráfico verde em $(0, -2)$.

Exercício 2.7:

Primeiro noto que as possíveis intersecções $C_\alpha \cap D_\alpha$ são pontos cujas coordenadas x satisfazem a equação:

$$E: \quad x = \alpha \cdot (\alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot x + \frac{1}{24}) + \alpha \cdot (\alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot x + \frac{1}{24}) + \frac{1}{24},$$

que é uma equação de grau 4 em x.

Portanto não podemos esperar mais de 4 raízes (contando alguma com multiplicidade).

Também noto que se um ponto $P_1 := (a, b) \in C_\alpha \cap D_\alpha$ e tem

$$a \neq b$$

então também o outro ponto $P_2 := (b, a) \in C_\alpha \cap D_\alpha$.

Esses pontos $P_1 \neq P_2$ estão em lados opostos da diagonal $y = x$. Por exemplo, se $b > a$ então é $P_1 = (a, b)$ que está acima da diagonal enquanto que $P_2 = (b, a)$ está abaixo da diagonal.

Nesse caso

$$b = \alpha \cdot a^2 + \alpha \cdot a + \frac{1}{24} > a$$

e

$$a = \alpha \cdot b^2 + \alpha \cdot b + \frac{1}{24} < b.$$

Ou seja que a função contínua

$$\phi(x) := \alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot x + \frac{1}{24} - x$$

definida em $[a, b]$ tem $\phi(a) > 0$ e $\phi(b) < 0$. Logo pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $\xi \in (a, b)$ com

$$\psi(\xi) = 0,$$

ou seja, existe um ponto do plano

$$P_3 := (\xi, \alpha \cdot \xi^2 + \alpha \cdot \xi + \frac{1}{24})$$

que pertence à diadonal, pois tem

$$\xi = \alpha \cdot \xi^2 + \alpha \cdot \xi + \frac{1}{24}$$

e ademais $P_3 \in C_\alpha \cap D_\alpha$. Ora então ξ é raíz de E e $\xi \neq a, b$: há raízes demais dessa equação de grau 4, contradição.

Concluo então que só pode haver tangência dessas parábolas em algum ponto que esteja na diagonal $y = x$.

Então esse ponto $P := (\underline{x}, \underline{x})$ verifica:

$$\underline{x} = \alpha \cdot \underline{x}^2 + \alpha \cdot \underline{x} + \frac{1}{24}$$

de onde ponho α em evidência como:

$$\alpha = \frac{\underline{x} - \frac{1}{24}}{\underline{x}^2 + \underline{x}}.$$

Mas nesse $P = (\underline{x}, \underline{x})$, onde as curvas são tangentes, qual a inclinação possível ?

Como C_α e D_α são simétricas em relação à diagonal, se a inclinação da reta tangente à C_α em P é τ então a inclinação da reta tangente à D_α em P é $\frac{1}{\tau}$. Como há tangência das curvas, $\tau = \frac{1}{\tau}$ o que dá $\tau = \pm 1$.

Para C_α:

$$y'(x) = 2 \cdot \alpha \cdot \underline{x} + \alpha$$

logo

$$\pm 1 = 2 \cdot \alpha \cdot \underline{x} + \alpha$$

de onde

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot \underline{x} + 1} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{-1}{2 \cdot \underline{x} + 1}.$$

Portanto temos duas possíveis equações para $\underline{x}$:

$$\frac{\underline{x} - \frac{1}{24}}{\underline{x}^2 + \underline{x}} = \frac{1}{2 \cdot \underline{x} + 1}$$

ou

$$\frac{\underline{x} - \frac{1}{24}}{\underline{x}^2 + \underline{x}} = \frac{-1}{2 \cdot \underline{x} + 1}.$$

Elas produzem duas equações quadráticas em $\underline{x}$, que resolvo por Báskara. Uma tem as soluções

$$\underline{x} = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \underline{x} = \frac{-1}{6}$$

e a outra

$$\underline{x} = \frac{-23}{72} + \frac{\sqrt{601}}{72} \quad \text{ou} \quad \underline{x} = \frac{-23}{72} - \frac{\sqrt{601}}{72}.$$

Usando

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot \underline{x} + 1} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{-1}{2 \cdot \underline{x} + 1}$$

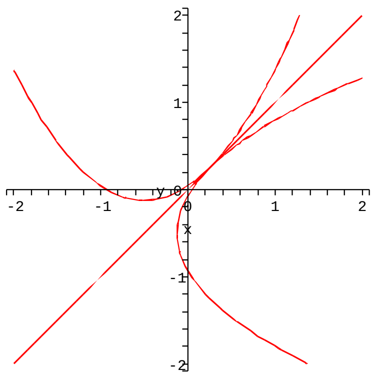
em cada caso obtemos 4 valores possíveis para α:

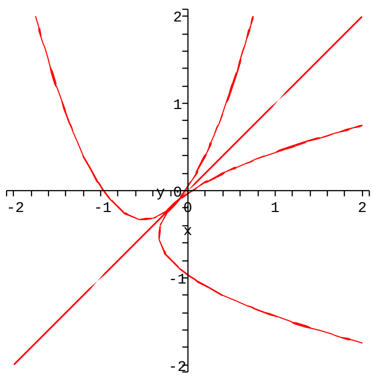
$$\alpha_1 := \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}$$

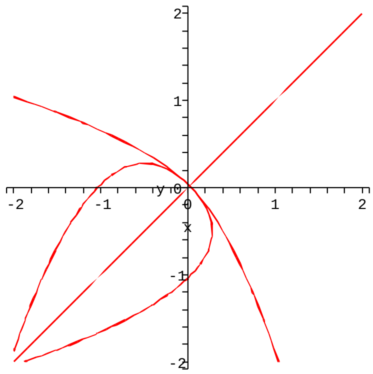
ou

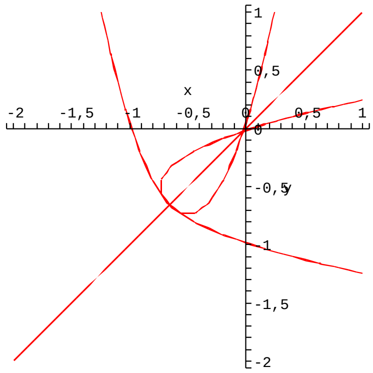
$$\alpha_3 = \frac{-36}{13 + \sqrt{601}}, \quad \alpha_4 = \frac{-36}{13 - \sqrt{601}}.$$

As Figuras a seguir ilustram as posições das parábolas C_α e D_α para esses 4 valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, bem como a reta diagonal:









Exercício 2.8:
Minha solução não é das mais elegantes, pois é na força bruta. Farei o seguinte:

- determinarei os pontos que são os extremos $(x_0, \frac{x_0^2}{2m})$ e $(x_1, \frac{x_1^2}{2m})$ de uma corda ortogonal ao gráfico em $(x_0, \frac{x_0^2}{2m})$,
- pensarei no *quadrado* do comprimento da corda:

$$(x_1 - x_0)^2 + (\frac{x_1^2}{2m} - \frac{x_0^2}{2m})^2$$

  como sendo uma função $f(x_0)$ de x_0.
- procurarei $f'(x_0) = 0$ e depois verei se $f''(x_0) > 0$.

A reta que passa por $(x_0, \frac{x_0^2}{2m})$ e é ortogonal ao gráfico da parábola dada tem equação:

$$y = \frac{-m}{x_0} \cdot x + \frac{2m^2 + x_0^2}{2m}.$$

(posso supor $\underline{x}_0 \neq 0$ pois a reta ortogonal ao gráfico pela origem é vertical e não intersecta o gráfico da parábola em nenhum outro ponto).

Essa reta intersecta de novo a parábola em

$$\underline{x}_1 = -x_0 - \frac{2 \cdot m^2}{x_0},$$

como se descobre resolvendo uma equação quadrática.

A expressão do quadrado da distância entre esses dois pontos admite um boa simplificação:

$$\phi(x_0) := (x_1 - x_0)^2 + (\frac{x_1^2}{2m} - \frac{x_0^2}{2m})^2 =$$

$$= (2x_0 + \frac{2m^2}{x_0})^2 + (\frac{(x_0 + \frac{2m^2}{x_0})^2}{2m} - \frac{x_0^2}{2m})^2 =$$

$$= \frac{4(x_0^2 + m^2)^3}{x_0^4}.$$

Agora derivo $\phi(x_0)$ como função de x_0, obtendo:

$$\phi'(x_0) = \frac{-8 \cdot (x_0^2 + m^2)^2 \cdot (-x_0^2 + 2m^2)}{x_0^5}.$$

Portanto $\phi'(\underline{x}_0) = 0$ para dois valores:

$$\underline{x} = \pm\sqrt{2} \cdot m.$$

Para ver que esses pontos são mínimos locais de $\phi(x_0)$ (e portanto globais, por falta de outros candidatos) podemos analisar o sinal de $\phi'(x_0)$ à esquerda e à direita deles.

Para $\underline{x} = \sqrt{2} \cdot m$: note que para $x_0 < \underline{x}$ e próximo dele, temos

$$-x_0^2 + m^2 > 0$$

e portanto $\phi'(x_0) < 0$; para $x_0 > \underline{x}$ e próximo dele, temos $\phi'(x_0) > 0$.

Analogamente para $\underline{x} = -\sqrt{2}m$.

Exercício 2.9:

Primeiro testo se $(-1, -1)$ e $(2, 3)$ estão em todos os gráficos de:

$$y = f_b(x) := (4/3 - b) \cdot x^2 + b \cdot x + (2b - 7/3), \quad b \in R.$$

De fato:

$$(4/3 - b) \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + (2b - 7/3) = \frac{-3}{3} = -1,$$

e

$$(4/3 - b) \cdot 2^2 + b \cdot 2 + (2b - 7/3) = \frac{9}{3} = 3.$$

O coeficiente angular da secante a todos os gráficos $y = f_b(x)$ ligando $(-1, -1)$ a $(2, 3)$ é:

$$a = \frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3}.$$

Pelo Teorema de Lagrange devem haver pontos x_b (dependendo de b, a princípio ...) tais que

$$x_b \in (-1, 2) \quad \text{e} \quad f_b'(x_b) = \frac{4}{3}.$$

Vejamos quem são os x_b. Temos

$$f_b'(x) = 2 \cdot (4/3 - b) \cdot x + b,$$

e igualando a $\frac{4}{3}$ criamos uma equção em x:

$$2 \cdot (4/3 - b) \cdot x + b = \frac{4}{3},$$

de onde

$$x = \frac{1}{2} \cdot (\frac{\frac{4}{3} - b}{\frac{4}{3} - b}) = \frac{1}{2},$$

ou seja $\forall b$: $x_b = \frac{1}{2}$. Por isso quando fazemos um zoom numa faixa vertical em torno de

$$(\frac{1}{2}, f_b(\frac{1}{2}))$$

vemos todos os gráficos parecidos com retas paralelas, de mesma inclinação $\frac{4}{3}$.

Exercício 2.10:

Defina a função:

$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{v_2} + \frac{8 - x}{v_1},$$

que dá o *tempo* gasto pelo salva-vidas para chegar no ponto B.

Ou melhor, considere:

$$g(x) := v_2 \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \frac{v_2}{v_1} \cdot (8 - x) =$$

$$=: \sqrt{x^2+25} + k \cdot (8-x),$$

cujo domínio é $[0,8]$.

Trata-se de minimizar f ou, equivalentemente, minimizar g.

Para isso calcule separadamente

$$g(0) = 5 + 8k \quad \text{e} \quad g(8) = \sqrt{89}.$$

Mas:

$$g(8) > g(0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{89}-5}{8} > k,$$

e como $0.55 \approx \frac{\sqrt{89}-5}{8}$ e supusemos $k \leq 0.5$ então:

$$g(8) > g(0).$$

Agora basta buscar no intervalo aberto $(0,8)$ pelo ponto onde

$$g'(x) = 0.$$

Ora,

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} - k = 0 \quad \Leftrightarrow x = k \cdot \sqrt{x^2+25}.$$

Daí obtemos, elevando ao quadrado:

$$x^2 = k^2 \cdot (x^2+25),$$

ou seja,

$$x^2(1-k^2) = 25 \cdot k^2$$

e

$$x(k) = \sqrt{\frac{25 \cdot k^2}{1-k^2}} = \frac{5k}{\sqrt{1-k^2}},$$

pois a solução negativa não nos interessa. Claramente:

$$\lim_{k \to 0} x(k) = \lim_{k \to 0} \frac{5k}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

E nesse ponto $x(k)$ temos o valor:

$$g(x(k)) = 8k + 5(1-k^2) \cdot \sqrt{\frac{1}{1-k^2}}.$$

Agora

$$g(0) - g(x(k)) = 5 + 5(k^2-1) \cdot \sqrt{\frac{1}{1-k^2}}$$

e não está tão claro se $g(0) - g(x(k)) \geq 0$, para todos os k no intervalo $0 \leq k \leq 0.5$. Ora,

$$5 + 5(k^2 - 1) \cdot \sqrt{\frac{1}{1-k^2}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \geq 5(1-k^2) \cdot \sqrt{\frac{1}{1-k^2}}$$

e elevando ao quadrado quero ter:

$$25 \geq \frac{25 \cdot (1-k^2)^2}{1-k^2}$$

que equivale a :

$$1 - k^2 \geq 1 - 2k^2 + k^4,$$

ou seja,

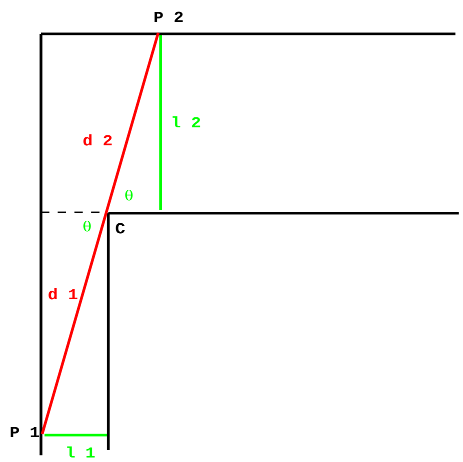
$$0 \geq k^2 \cdot (k^2 - 1).$$

Exercício 2.11:

Primeiro noto que, se consigo passar uma vara de um certo tamanho para a sala sem ter tocado o ponto C da Figura, então certamente passaria uma vara um pouco maior, apoiando-me e pivotando em C.

Por isso, de agora em diante, posso pensar que me apoiarei em C, pivotando nesse ponto.

A chave da resolução do problema é a seguinte: é notar que a restrição, o impedimento, para se passar a vara está no *mínimo da distância do segmento* $\overline{P_1P_2}$, à medida que muda $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Veja a Figura que segue:



Portanto trata-se de descobrir qual o mínimo de $\overline{P_1P_2}$. Para isso, penso em

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1C} + \overline{CP_2}$$

e ademais noto (identificando ângulos opostos pelo vértice) que:

$$\cos(\theta) = \frac{l_1}{\overline{P_1C}} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{l_2}{\overline{CP_2}}.$$

Ou seja:

$$\overline{P_1P_2}(\theta) = \overline{P_1C}(\theta) + \overline{CP_2}(\theta) =$$
$$= \frac{l_1}{\cos(\theta)} + \frac{l_2}{\sin(\theta)}.$$

Repare que é natural que quando $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ (antes de começar a esquina) tenhamos $\overline{CP_2}(\theta) \approx l_2$ mas $\overline{P_1C}(\theta)$ fique arbitrariamente grande, ou seja não há retrições sobre ele. Porém se $\theta \approx 0$ (após vencer a esquina) aí $\overline{P_1C}(\theta) \approx l_1$ enquanto $\overline{CP_2}(\theta)$ fica arbitrariamente grande.

Agora:

$$\overline{P_1P_2}'(\theta) = \frac{l_1 \cdot \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{-l_2 \cdot \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} =$$
$$= \frac{l_1 \cdot \sin^3(\theta) - l_2 \cdot \cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)},$$

e portanto

$$\overline{P_1P_2}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \tan(\theta) = (\frac{l_2}{l_1})^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}}.$$

Ou seja, a derivada se anula em um único ponto: $\theta_0 = \arctan(k^{\frac{1}{3}})$.

Para concluir que θ_0 é o ponto de mínimo, basta conferir que

$$\lim_{\theta \searrow 0} \frac{l_1}{\cos(\theta)} + \frac{l_2}{\sin(\theta)} = +\infty$$

e

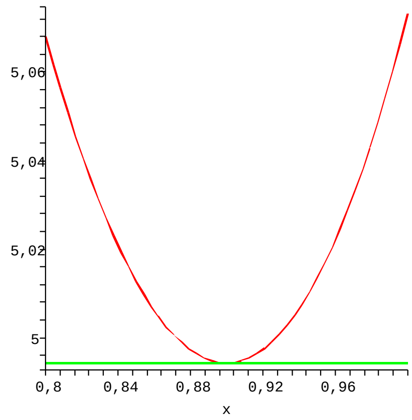
$$\lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{l_1}{\cos(\theta)} + \frac{l_2}{\sin(\theta)} = +\infty.$$

Assim o valor máximo do comprimento da vara que poderemos passar é

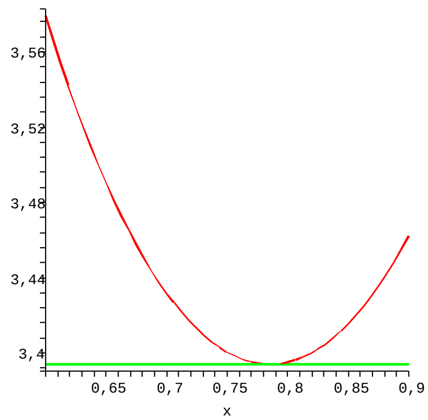
$$\overline{P_1P_2}(\theta_0) = \frac{l_1}{\cos(\theta_0)} + \frac{l_2}{\sin(\theta_0)}.$$

Vejamos Exemplos:

A Figura a seguir mostra a função $\overline{P_1P_2}'(\theta)$, para $l_1 = 1.2$ e $l_2 = 2.4$, quando $\theta_0 = \arctan(2^{\frac{1}{3}}) \approx 0.8999083481$ e o valor máximo de comprimento é 4.99432582244 (plotado como reta horizontal em verde)



Já a próxima figura dá a função $\overline{P_1P_2}'(\theta)$ no caso $l_1 = l_2 = 1.2$, em que $\theta_0 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \approx$ e o valor máximo da vara é 3.394112550 (horizontal em verde).



Exercício 2.12:

Seja o ponto $(0, a)$ do eixo dos y com $a > 0$ e seja

$$d_a(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - a)^2}$$

a distância entre esse ponto e os pontos (x, x^2) do gráfico da parábola $y = x^2$.

Afirmo que:

- i) se $a > \frac{1}{2}$ então $d_a(x)$ tem um máximo local em $x = 0$ e dois pontos de mínimo absoluto em $x = \pm\frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}}$.

- ii) se $a \leq \frac{1}{2}$ então $d_a(x)$ tem apenas um ponto de mínimo absoluto, em $x = 0$.

  Ademais, se $a = \frac{1}{4}$ então $d_{\frac{1}{4}}(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

Ou seja que, se $0 < a < \frac{1}{2}$ a melhor escolha é nadar verticalmente para a origem. Mas se $a > \frac{1}{2}$ definitivamente essa não é a melhor escolha.

Para provar a Afirmação noto primeiro que claramente

$$\lim_{x \to +\infty} d_a(x) = \lim_{x \to -\infty} d_a(x) + \infty.$$

Portanto os mínimos locais dessa função serão também globais.

Como $d_a(x)$ está definida em todos os Reais, seus máximos/mínimos locais são detectados por

$$d_a'(x) = \frac{x \cdot (2x^2 + 1 - 2a)}{\sqrt{x^2 + (x^2 - a)^2}} = 0.$$

Ou seja, $d_a'(x) = 0$ em

- i) $x = 0$ e em mais dois pontos $x = \pm\frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}}$, desde que $2a - 1 > 0$

- ii) apenas em $x = 0$, se $2a - 1 \leq 0$.

Podemos usar o Critério da primeira derivada para detectar máximos/mínimos locais.

No caso i),

$$d_a'(x) < 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < \frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}}$$

e

$$d_a'(x) > 0 \quad \text{se} \quad -\frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}} < x < 0.$$

o que diz que $x = 0$ é ponto de máximo local de $d_a(x)$.

Ainda no caso i),

$$d_a'(x) > 0 \quad \text{se} \quad \frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}} < x$$

e

$$d_a'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x < -\frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}},$$

o que diz que $x = \pm\frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}}$ são pontos de mínimo local da $d_a(x)$.

Já no caso ii), temos $2x^2 + 1 - 2a \geq 0$ e o sinal de $d_a'(x)$ é o mesmo sinal de x:

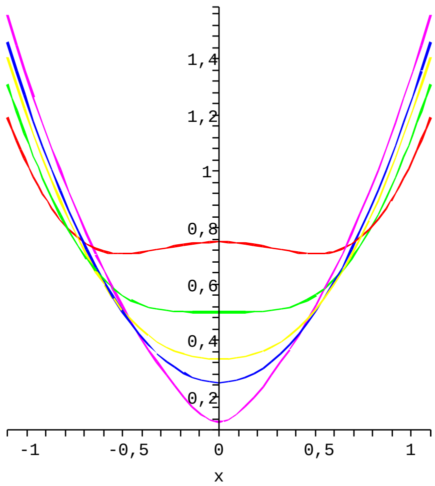
$$d_a'(x) > 0 \quad \text{se} \quad 0 < x$$

e

$$d'_a(x) < 0 \quad \text{se} \quad x < 0,$$

o que diz que $x = 0$ é ponto de mínimo local.

A Figura a seguir ilustra a situação: em vermelho $y = d_{\frac{3}{4}}(x)$, em verde $y = d_{\frac{1}{2}}(x)$, em amarelo $y = d_{\frac{1}{3}}(x)$, em azul $y = d_{\frac{1}{4}}(x)$ e em lilás $y = d_{\frac{1}{9}}(x)$.



Exercício 2.13:

Como (x_0, y_0) está na elipse:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

obtenho:

$$x_0^2 \cdot b^2 + y_0^2 \cdot a^2 = a^2 b^2.$$

Como

$$\frac{2 \cdot x(t) \cdot x'(t)}{a^2} + \frac{2 \cdot y(t) \cdot y'(t)}{b^2} = 0,$$

a informação das taxas de variação -1 e 1 dá:

$$\frac{2 \cdot x_0 \cdot (-1)}{a^2} + \frac{2 \cdot y_0 \cdot 1}{b^2} = 0,$$

de onde

$$\frac{-2 \cdot x_0 \cdot b^2 + 2 \cdot y_0 \cdot a^2}{a^2 \cdot b^2} = 0,$$

ou seja

$$-2 \cdot x_0 \cdot b^2 + 2 \cdot y_0 \cdot a^2 = 0.$$

Ao lado de

$$x_0^2 \cdot b^2 + y_0^2 \cdot a^2 = a^2 b^2$$

forma-se um sistema de duas equações lineares nas incógnitas a^2 e b^2.

Multiplicando a última por 2, a primeira por $x_0 \neq 0$ e depois somando-as, obtemos:

$$2 \cdot y_0 \cdot (x_0 + y_0) \cdot a^2 = 2 \cdot a^2 \cdot b^2,$$

e como $a \neq 0$:

$$b^2 = y_0 \cdot (x_0 + y_0).$$

Depois obtenho

$$a^2 = x_0 \cdot (x_0 + y_0),$$

usando de novo

$$-2 \cdot x_0 \cdot b^2 + 2 \cdot y_0 \cdot a^2 = 0.$$

Os outros itens têm respostas imediatas, pois sabemos as coordendas dos focos e as dos vértices em função de a e b.

Exercício 2.14:

Minha solução:

Considere a função:

$$\phi(x) := \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$$

e note que

$$\phi(x) = \ln(\frac{x+1}{x}) - \frac{1}{1+x} = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{1+x}.$$

Temos

$$\lim_{x \searrow 0} \phi(x) = +\infty.$$

Portanto para $x > 0$ e pequeno vale $\phi(x) > 0$.

Mas suponha *por absurdo* que para algum ponto $\underline{x}$ suficientemente grande aconteça que

$$\phi(\underline{x}) \leq 0.$$

Como:

$$\phi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} - (\frac{1}{1+x})' = -\frac{1}{x \cdot (1+x)^2} < 0$$

se $x > 0$ então $\phi(x)$ é uma função estritamente decrescente.

Portanto

$$\phi(x) < \phi(\underline{x}) \leq 0, \quad \forall x > \underline{x}.$$

Mas

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \lim_{x\to+\infty} [\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}] = 0,$$

portanto não pode acontecer que

$$\phi(x) < \phi(\underline{x}) \leq 0, \quad \forall x > \underline{x}$$

pois os valores $\phi(x)$ têm que se aproximar de zero tanto quanto quisermos.

Essa contradição prova que $\phi(x) > 0 \ \forall x > 0$, como queríamos.

Solução do estudante Walter Ferreira Diniz Júnior:

Primeiro afirmo que:

$$\ln(y) < y - 1, \quad \forall y > 0.$$

De fato, se $y > 1$ isso é evidente da definição do logaritmo como área sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$, de 1 até y, pois $y - 1$ é a área de um retângulo que tem essa base e altura 1.

Se $0 < y < 1$ fica também evidente que:

$$-\ln(y) > 1 - y$$

pois $1 - y$ é a área de um retângulo que tem essa base e altura 1.

Multiplicando por -1 obtenho:

$$\ln(y) < y - 1, \quad \text{se} \quad 0 < y < 1.$$

Ou seja,

$$\ln(y) < y - 1, \quad \forall y > 0.$$

Suponhamos por absurdo que para algum $\underline{x} > 0$:

$$\ln(1+\frac{1}{\underline{x}}) \leq \frac{1}{1+\underline{x}},$$

Faça

$$\frac{1}{\underline{y}} := 1 + \frac{1}{\underline{x}},$$

ou seja:

$$\underline{x} := \frac{\underline{y}}{1-\underline{y}}.$$

Ou seja,

$$\ln(\frac{1}{\underline{y}}) \leq \frac{1}{1 + (\frac{\underline{y}}{1-\underline{y}})},$$

que equivale, fazendo uma continha, a

$$\ln(\frac{1}{\underline{y}}) \leq 1 - \underline{y}$$

ou seja, $-\ln(\underline{y}) \leq 1 - \underline{y}$, ou seja

$$y - 1 \leq \ln(\underline{y})$$

contradizendo a observação inicial.

Logo

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}, \quad \forall x > 0$$

Exercícios 2.15 e 2.16:

A igualdade de áreas das duas regiões delimitadas pelos gráficos significa que:

$$\int_0^{\underline{x}} (A \cdot x + B \cdot x^3 - C)\, dx \;=\; 0,$$

onde o limite de integração $\underline{x}$ é solução de:

$$A \cdot x + B \cdot x^3 - C = 0.$$

Mas pelo Segundo Teorema Fundamental:

$$\int_0^{\underline{x}} (A \cdot x + B \cdot x^3 - C)\, dx \;= A \cdot \frac{\underline{x}^2}{2} + B \cdot \frac{\underline{x}^4}{4} - C\underline{x}$$

Ou seja, vemos que $\underline{x}$ satisfaz duas equações:

$$A \cdot \underline{x} + B \cdot \underline{x}^3 - C = 0 \quad \text{e} \quad A \cdot \frac{\underline{x}^2}{2} + B \cdot \frac{\underline{x}^4}{4} - C\underline{x} = 0.$$

A primeira dá $C = A \cdot \underline{x} + B \cdot \underline{x}^3$, que pode ser substuído na segunda, dando a equação:

$$\underline{x}^2 \cdot (-\frac{A}{2} - \frac{3B}{4} \cdot \underline{x}^2) = 0.$$

Como certamente $\underline{x} \neq 0$, então:

$$\underline{x} = \frac{2 \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{-B}},$$

onde lembre que $A > 0$ e $B < 0$.

Agora

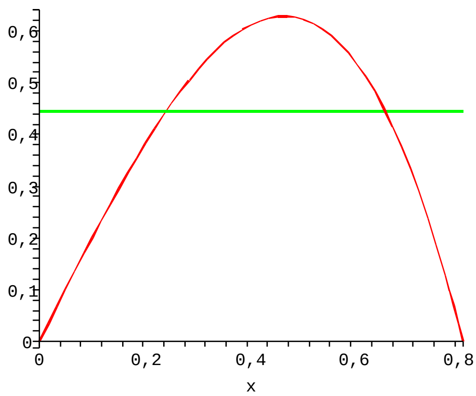
$$C = A \cdot (\frac{2 \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{-B}}) + B \cdot (\frac{2 \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{-B}})^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{A^3} \cdot \sqrt{2}\sqrt{3}}{9\sqrt{-B}}.$$

No caso particular do Problema 1, onde $A = 2$ e $B = -3$ obtemos então

$$\underline{x} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad C = \frac{4}{9}.$$

Veja a Figura a seguir:



Exercício 2.17:

Parte da questão é dar um sentido às integrais, pois numa o integrando não está definido em $x = 1$ nem em $x = 3$ e na outra o intervalo de integração é infinito.

O sentido que se deve dar à primeira é:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)\cdot(x-1)}}\, dx := \lim_{\epsilon_1 \searrow 0,\, \epsilon_2 \searrow 0} \int_{1+\epsilon 1}^{3-\epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(3-x)\cdot(x-1)}}\, dx.$$

Faço:

$$\int_{1+\epsilon 1}^{3-\epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(3-x)\cdot(x-1)}}\, dx =$$

$$= \int_{1+\epsilon 1}^{3-\epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx =$$

$$= \int_{-1+\epsilon_1}^{1-\epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du =$$

$$= \arcsin(1-\epsilon_2) - \arcsin(-1+\epsilon_1).$$

Então

$$\lim_{\epsilon_1 \searrow 0\,,\, \epsilon_2 \searrow 0} \int_{1+\epsilon 1}^{3-\epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(3-x)\cdot(x-1)}}\, dx =$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \searrow 0\,,\, \epsilon_2 \searrow 0} [\arcsin(1-\epsilon_2) - \arcsin(-1+\epsilon_1)] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi,$$

onde na última linha usei que $\arcsin(u)$ é contínua em todo $[-1,1]$, apesar de ser derivável apenas em $(-1,1)$.

Na segunda, temos:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\, dx := \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\, dx.$$

Agora faço:

$$\frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}} = \frac{1}{e^{x+1}+\frac{1}{e^{x-3}}} = \frac{1}{(\frac{e^{2x-2}+1}{e^{x-3}})} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{e^{2x-2}+1} = e^{-2}\cdot \frac{e^{x-1}}{(e^{x-1})^2+1}$$

e integro via a substituição $u = e^{x-1}$:

$$e^{-2}\cdot \int_1^a \frac{1}{u^2+1}\, du = e^{-2}\cdot(\arctan(a) - \arctan(1))$$

e portanto:

$$\lim_{a\to+\infty} e^{-2}\cdot(\arctan(a)-\arctan(1)) = e^{-2}\cdot(\lim_{a\to+\infty}\arctan(a) - \frac{\pi}{4}) =$$

$$= e^{-2}\cdot(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4e^2},$$

o resultado.