Geometria ao modo do Xadrez

por Luís Gustavo Mendes e Eduardo Fischer - UFRGS

Xadrez e Ensino de Geometria

Eduardo Medeiros, Presidente da Confederação Gaúcha de Xadrez, nos propôs o tema:

Como o ensino de Xadrez pode auxiliar o ensino de Geometria ?

Antes de formular nossa Resposta, tratemos primeiro do que vem a ser o Ensino de Geometria.

Ensino de Geometria

Afirmamos:

o Ensino de Geometria não ensina nada se não ensinar a demonstrar os fatos e propriedades que propõe.

Fórmulas e fatos bonitos não tem relevância nenhuma na formação intelectual de uma pessoa se não estão acompanhados de uma justificação de como são obtidos, ou seja, de um argumento que nos convença da verdade do fato.

Ao modo da Geometria

O que tem a ver a demonstração, a prova com a Geometria ?

É que a Geometria funciona assim:

- parte-se de axiomas, premissas simples,
- aplica-se um raciocínio lógicamente correto,
- chega-se em fatos e propriedades não tão simples.

Esse trajeto é uma demonstração !
Mudando-se os axiomas iniciais muda-se a Geometria: Euclidiana, Hiperbólica, Projetiva .

Exemplos

Até o século XVIII o standard de rigor científico era a apresentação de uma argumento ao modo da Geometria.

Tal era a hegemonia da Geometria, que podemos citar dois exemplos surpreendentes:

Napier, o criador dos logaritmos no século XVI, escreveu um Tratado onde deu uma prova ao modo da Geometria de que o Papa de sua época era o Anticristo.

A Ética de Spinoza foi escrita ao modo da Geometria.

Hoje

Mas, por incrível que pareça, hoje em dia, aqui no Brasil, a demonstração não está presente no Ensino de Geometria.

Ou seja, o que antes era um paradigma de rigor intelectual hoje não é sequer apresentado às pessoas em formação.

O Xadrez

Em quê o Xadrez se parece à Geometria ?

O Xadrez tem um método claro:

- as peças tem movimentos simples e bem definidos
- os jogadores têm informação total e com base nela produzem estratégias
- a composição desses movimentos, segundo a estratégia, produz configurações complexas.

E no Xadrez se pode propôr problemas relevantes de pelo menos 3 tipos:

O Xadrez

- I- compondo movimentos simples obter um movimento complicado
  (ex. chegar em tal casa com tal peça),
- II- só com peças tais e tais obter uma configuração específica
  (ex., dar um mate só com tais e tais peças).
- III- em no máximo tantas jogadas obter uma configuração específica
  (ex. dar um mate em tantas jogadas).

Objetivo desta Exposição

Nosso objetivo é provar 4 fatos relevantes da Geometria Euclidiana plana ao modo do xadrez, ou seja apresentados no estilo dos problemas I, II e III.

O último fato será generalizado na Geometria Euclidiana n-dimensional.

Movimentos da Geometria

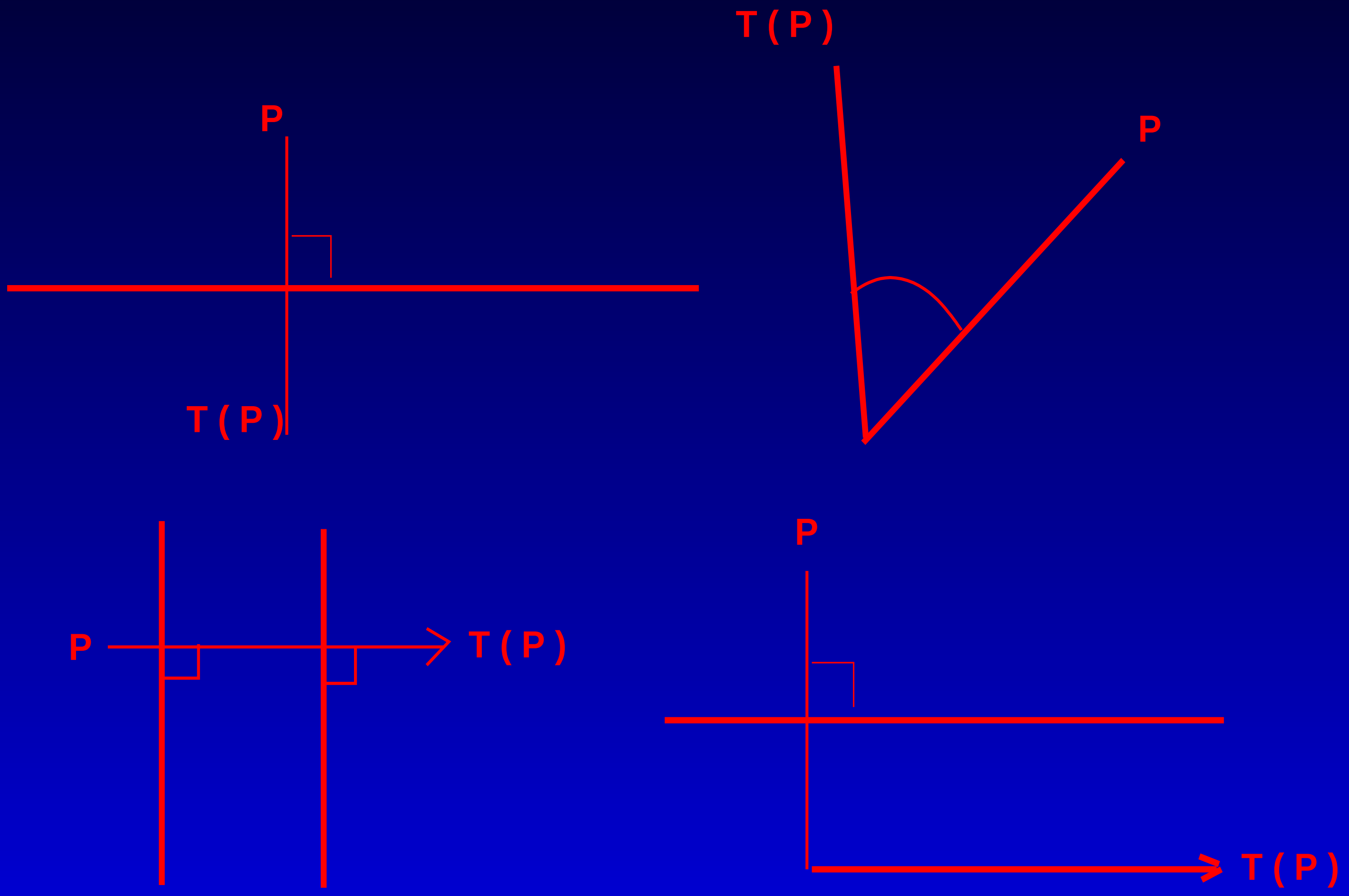
Lidaremos nessa palestra apenas com os seguintes movimentos do plano Euclidiano (e com a composição de um número qualquer deles)

- Identidade
  (deixar cada ponto do plano onde está),
- Reflexão em uma reta
  (os pontos de um semiplano passam para o outro),
- Rotação de ângulo orientado α em torno de um ponto,

Movimentos da Geometria

- Translação
  (tudo se desloca segundo um vetor V)
- Anti-Translação
  (exatamente o movimento do Cavalo no Xadrez !)

Ilustro



Movimentos da Geometria

Esses movimentos são chamados de movimentos rígidos ou de isometrias do plano por preservarem tamanhos, distâncias e ângulos (não-orientados).

Note que a composição de um número qualquer de movimentos rígidos é um movimento rígido.

Princípio de Fermat

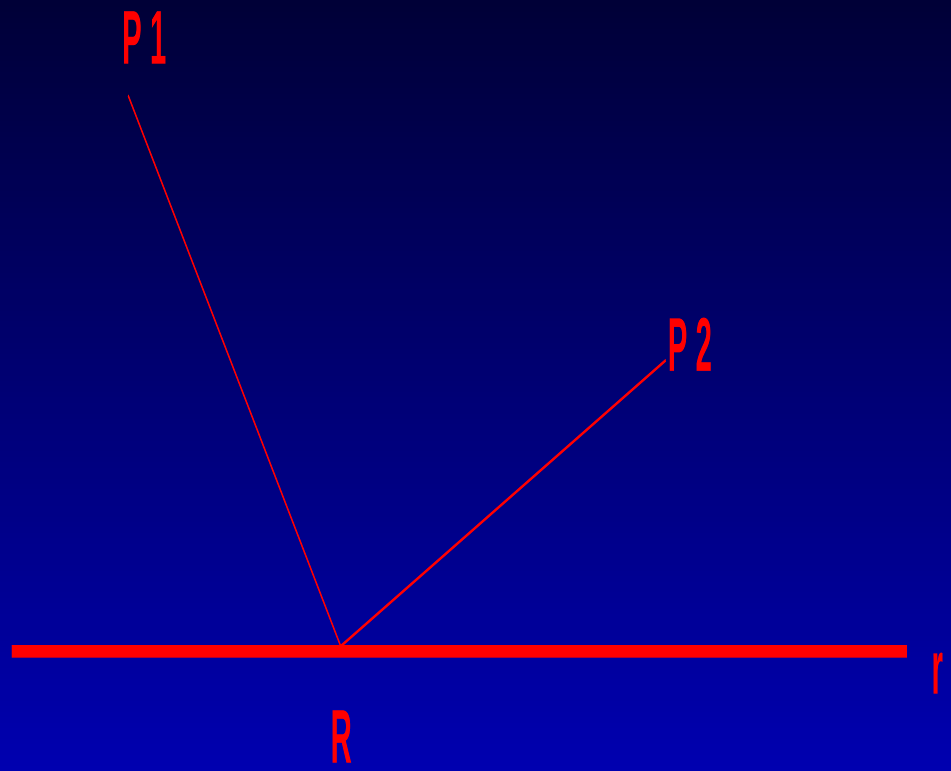
Problema 1 :

Dados dois pontos P_1, P_2 num mesmo semiplano relativo a uma reta r, prove que existe um ponto $R \in r$ tal que a soma de distâncias

$$\overline{P_1\,R} + \overline{R\,P_2}$$

é a menor possível.

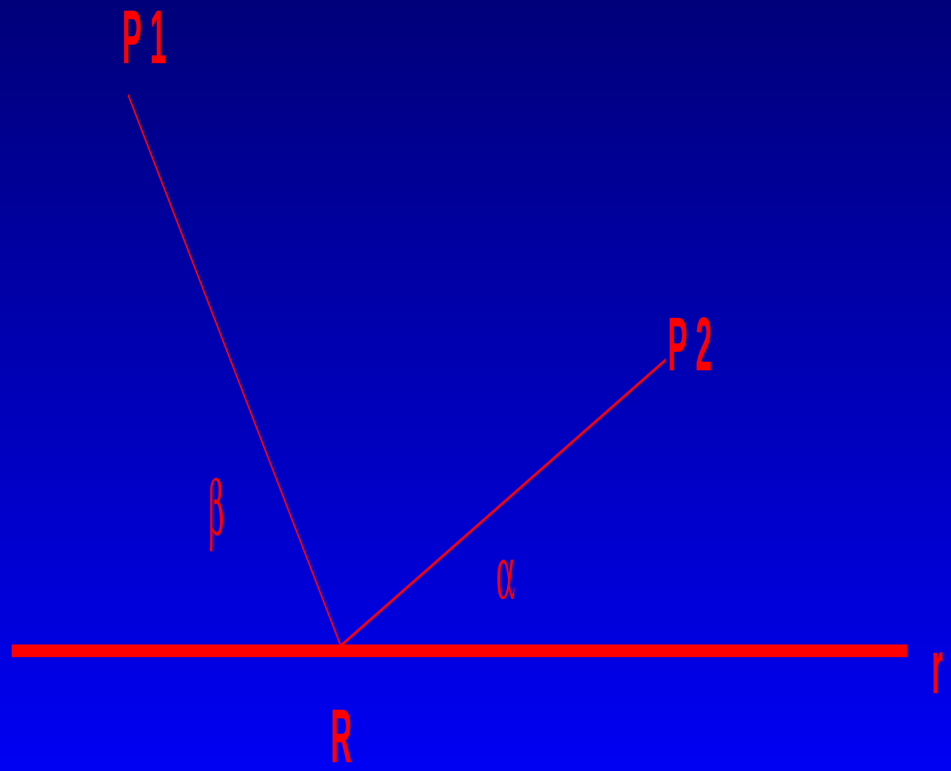
Princípio de Fermat



Solução

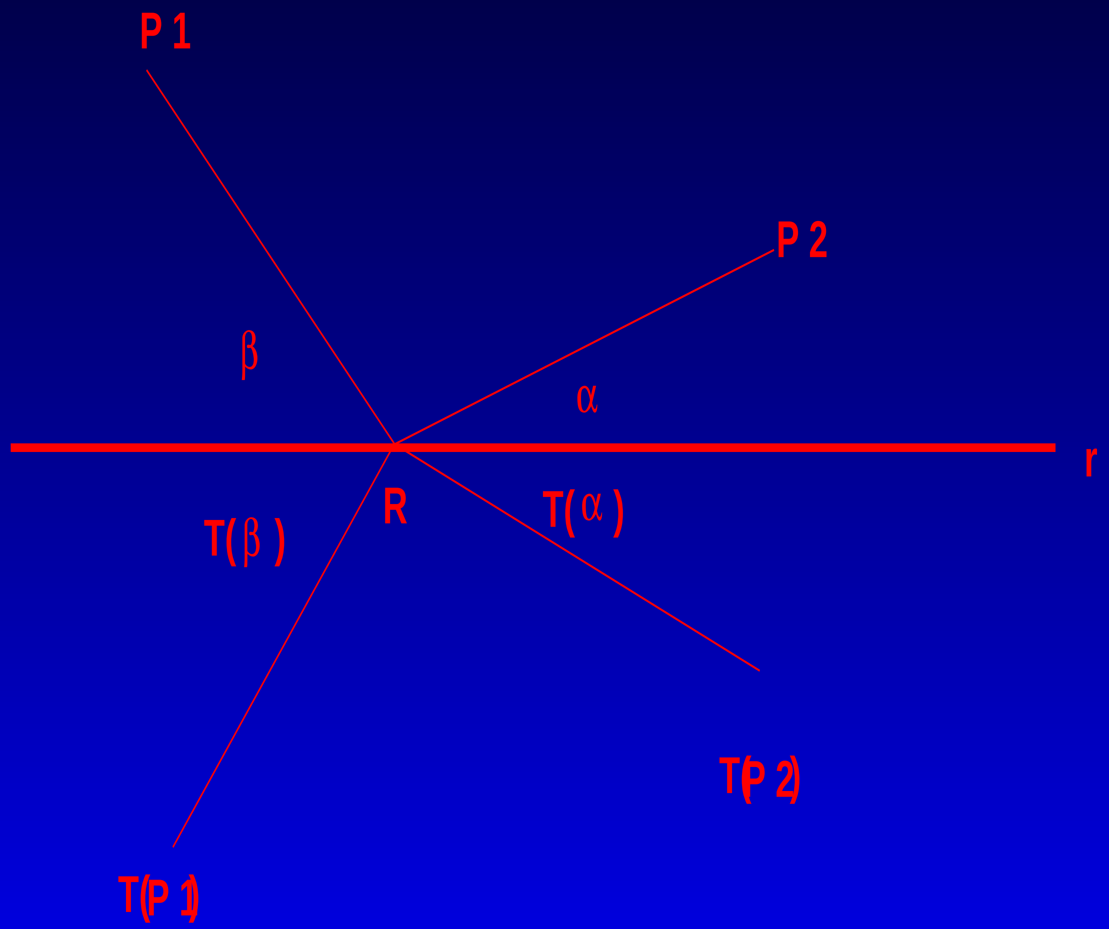
Argumentaremos usando apenas o efeito das Reflexões em retas.

Considere os ângulos α e β formados em um R qualquer, como na Figura.



Solução

Faça a Reflexão na reta r, denotada por T.



Solução

Como $T(R) = R$ então

$$\overline{P_1\,R} + \overline{R\,P_2} = \overline{P_1\,R} + \overline{R\,T(P_2)} =$$

$$= \overline{T(P_1)\,R} + \overline{R\,P_2}.$$

Note agora que soma

$$\overline{P_1\,R} + \overline{R\,T(P_2)}$$

é minimizada quando

$$P_1\,,\,R,\;T(P_2)$$

são colineares.

Solução

Também

$$\overline{T(P_1)\,R} + \overline{R\,P_2}.$$

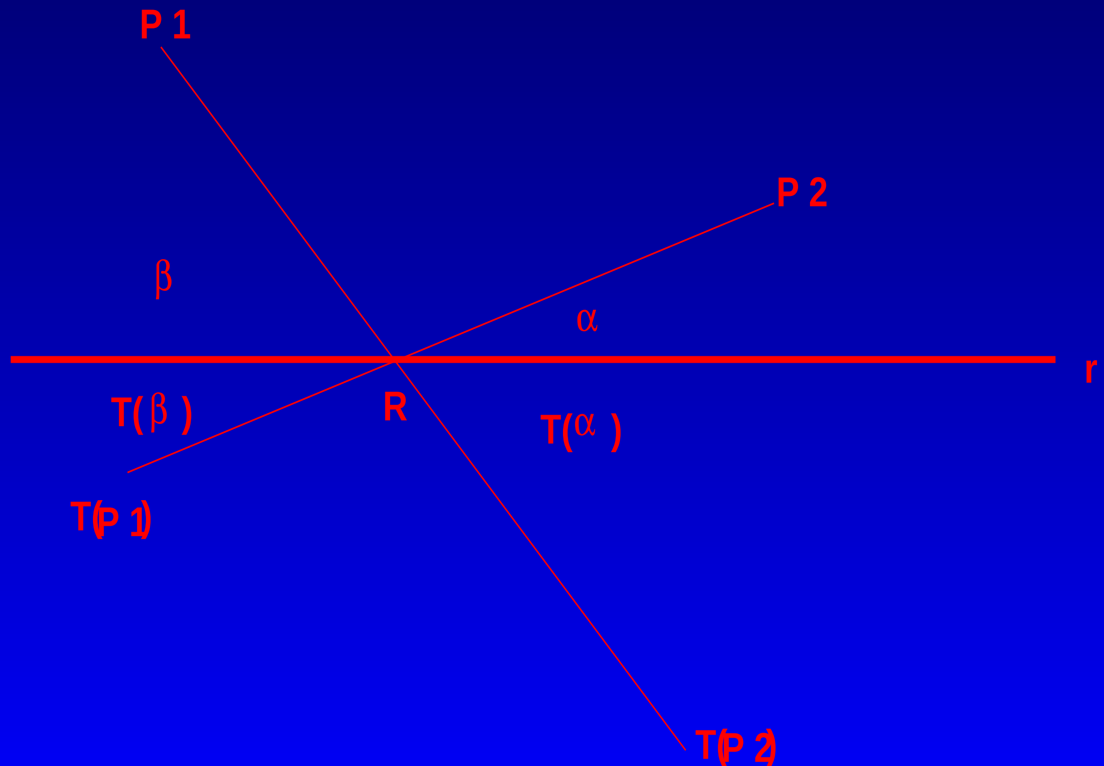
é minimizada exatamente quando $T(P_1)$, $R,\ P_2$ são colineares.

Solução

Ou seja, quando os ângulos

$$\beta + T(\beta) \quad \text{e} \quad \alpha + T(\alpha)$$

são opostos pelo vértice.



Solução

Logo

$$\beta + T(\beta) \equiv \alpha + T(\alpha).$$

Mas

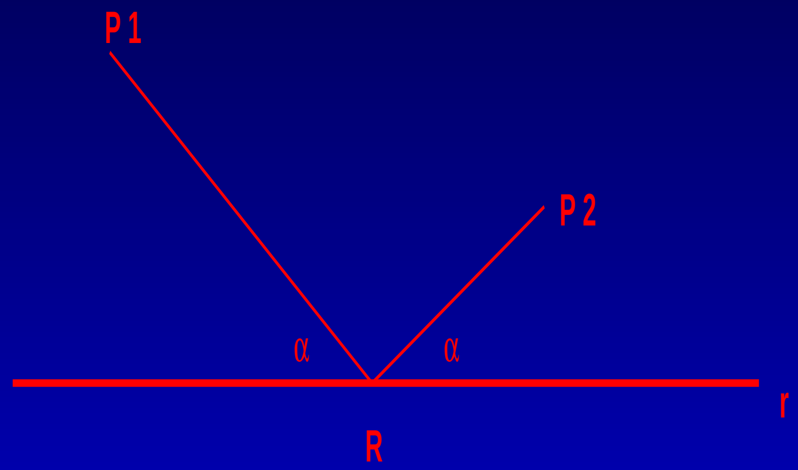
$$\alpha \equiv T(\alpha) \quad \text{e} \quad \beta \equiv T(\beta).$$

Logo

$$2\beta \equiv 2\alpha \quad \text{e} \quad \alpha \equiv \beta.$$

Solução

Solução: O ponto R é o ponto onde o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido.



Isso é o que a luz faz ao refletir numa superfície !

Ponto de Fermat

Problema 2 Dado um triângulo ΔABC determine o ponto $P \in \Delta$ que minimiza:

$$\overline{PA} + \overline{PC} + \overline{PB}.$$

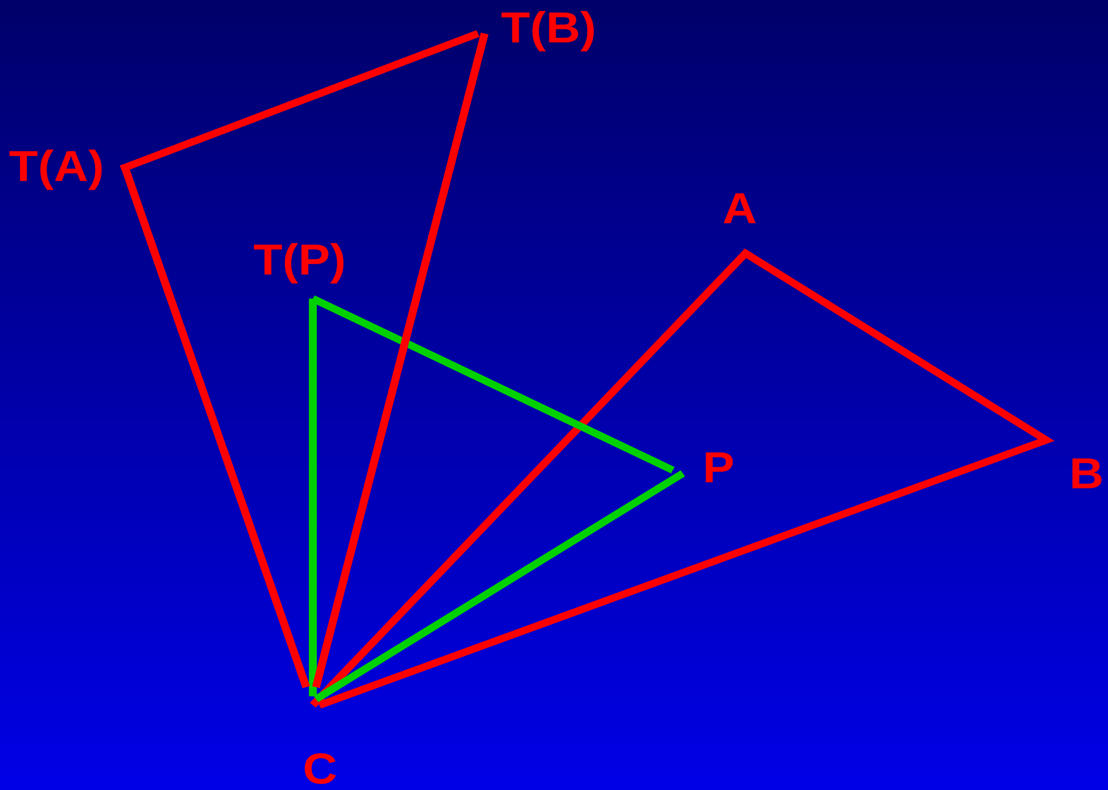
Esse ponto é chamado ponto de Fermat.

Como veremos a seguir, ese ponto não é em geral o conhecido baricentro.

Solução

A solução dependerá apenas do uso de Rotações.

Faça a rotação em C de ângulo $+60$, denotada por T.
Note que o triângulo $\Delta CPT(P)$ é equilátero.

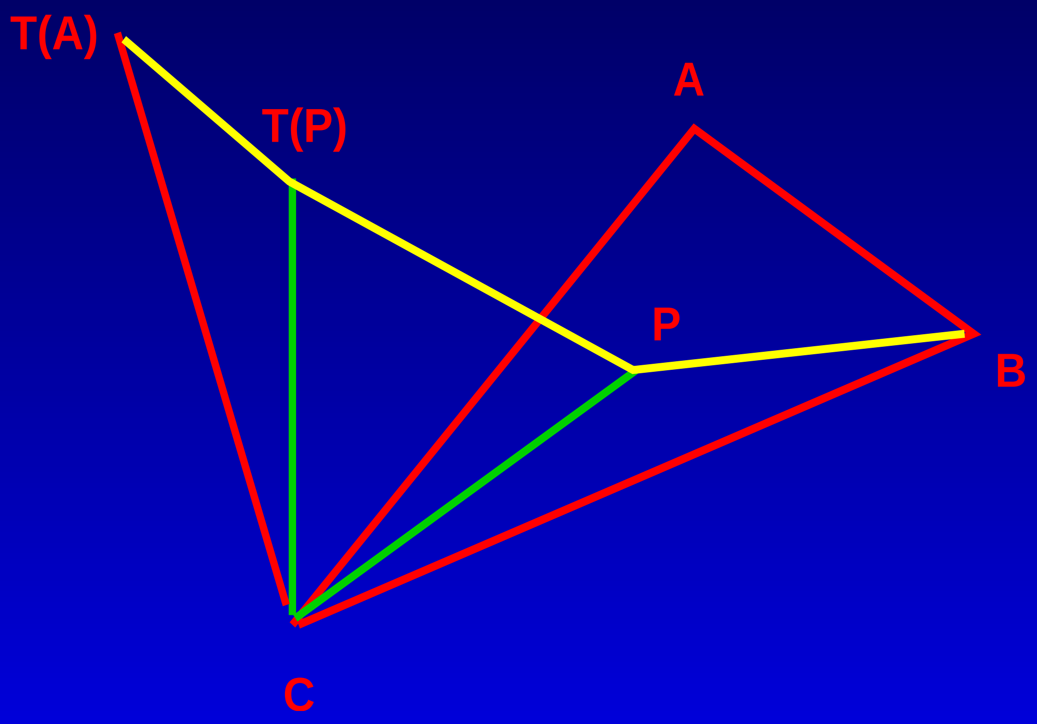


Solução

Então

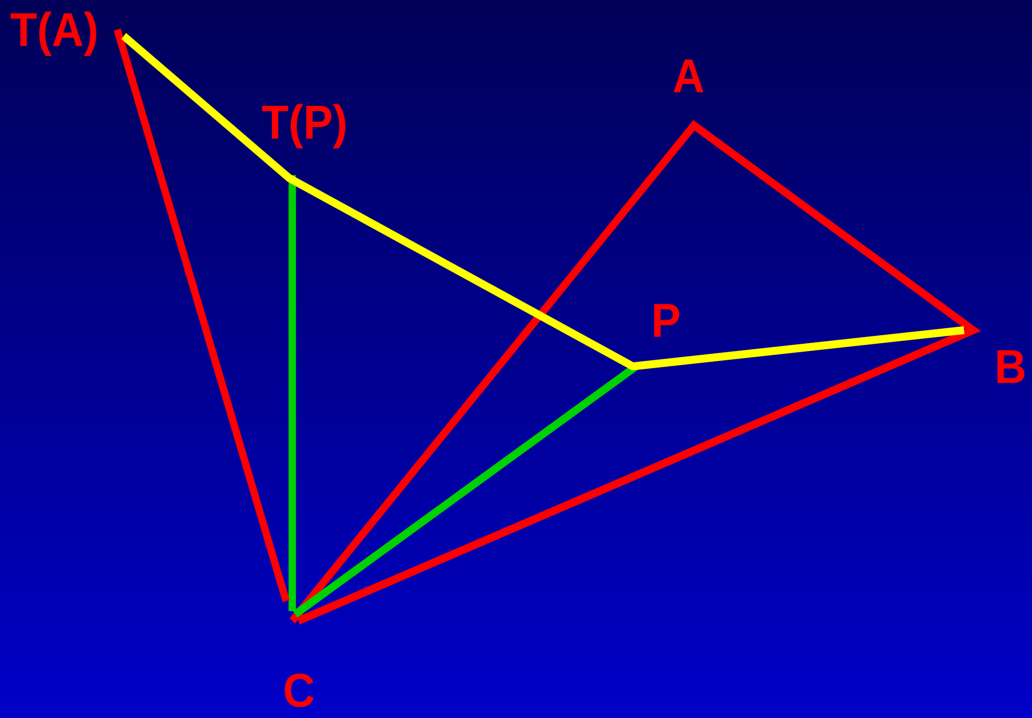
$$\overline{AP} + \overline{CP} + \overline{BP} =$$

$$= \overline{T(A)T(P)} + \overline{T(P)P} + \overline{PB}$$



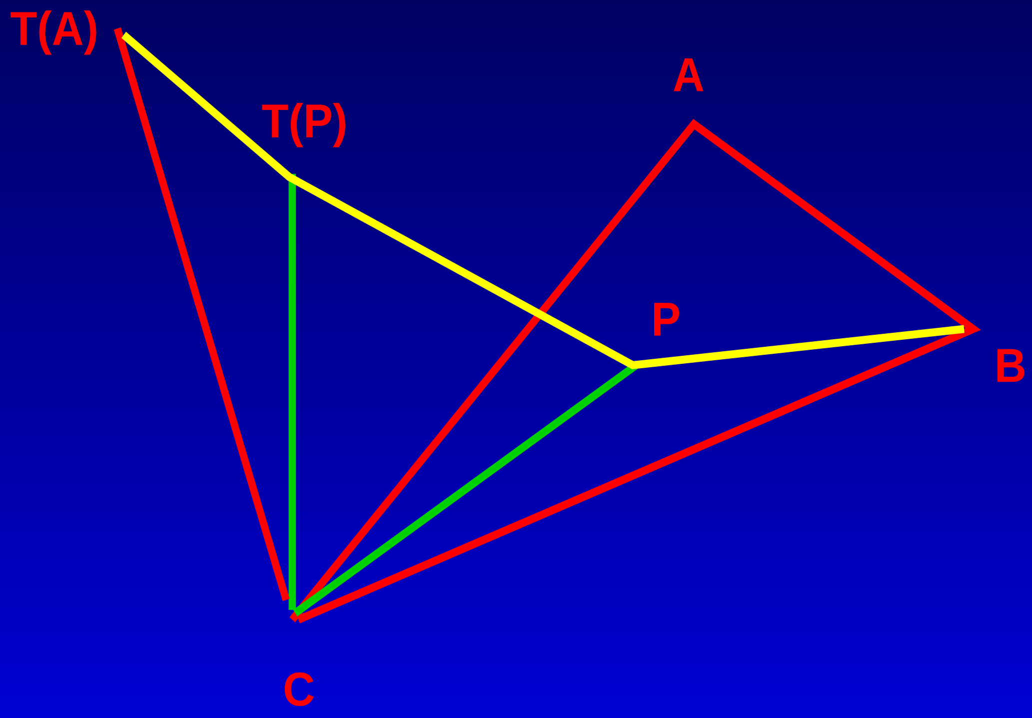
Solução

Mas essa soma é minimizada quando os pontos $T(A)$, $T(P)$, P, B são colineares !



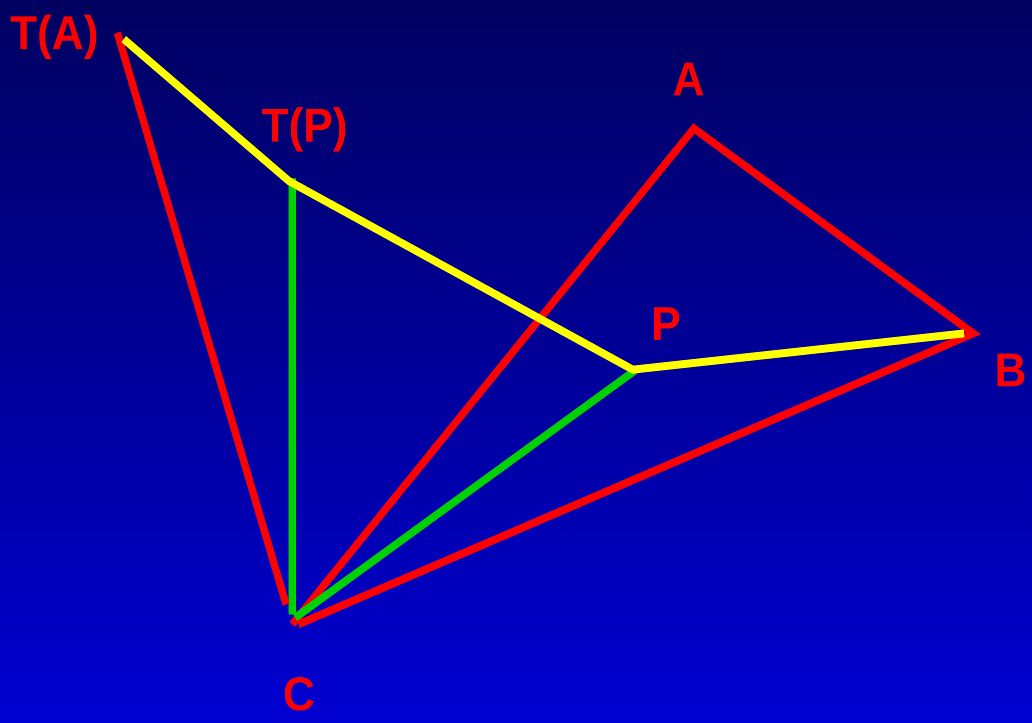
Solução

Ora, $T(A), T(P), P$ colineares e $\widehat{CT(P)P} = 60$ implicam que $\widehat{T(A)T(P)C} = 120$.



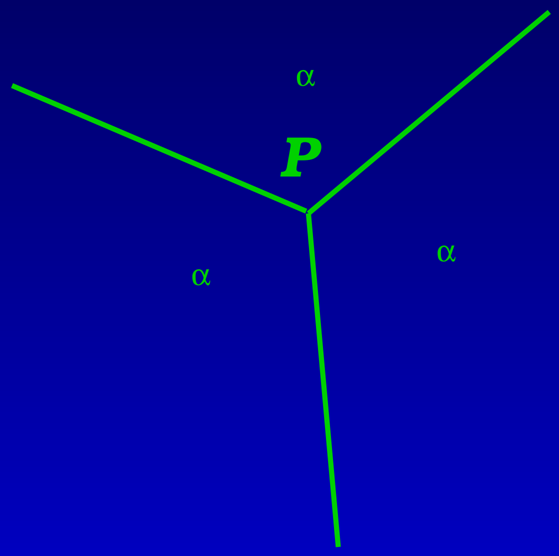
Solução

E também $T(P), P, B$ colineares e $\widehat{T(P)PC} = 60$ implicam que $\widehat{CPB} = 120$.



Solução

Solução: O Ponto de Fermat é onde as retas PA, PB, PC formando três angulos iguais, de 120 graus.



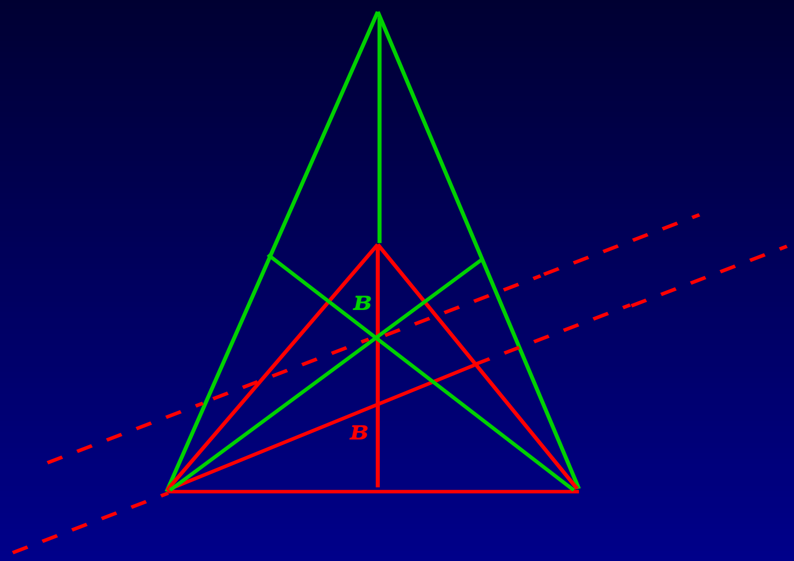
Fermat e Baricentro

O Baricentro é o ponto onde as três medianas de um triângulo se encontram.

É fácil de ver que num triângulo Equilátero Baricentro e ponto de Fermat são o mesmo ponto.

Mas a posição do Baricentro é exatamente a $\frac{1}{3}$ de cada mediana, portanto num triângulo isósceles mais alto o baricentro estará mais alto:

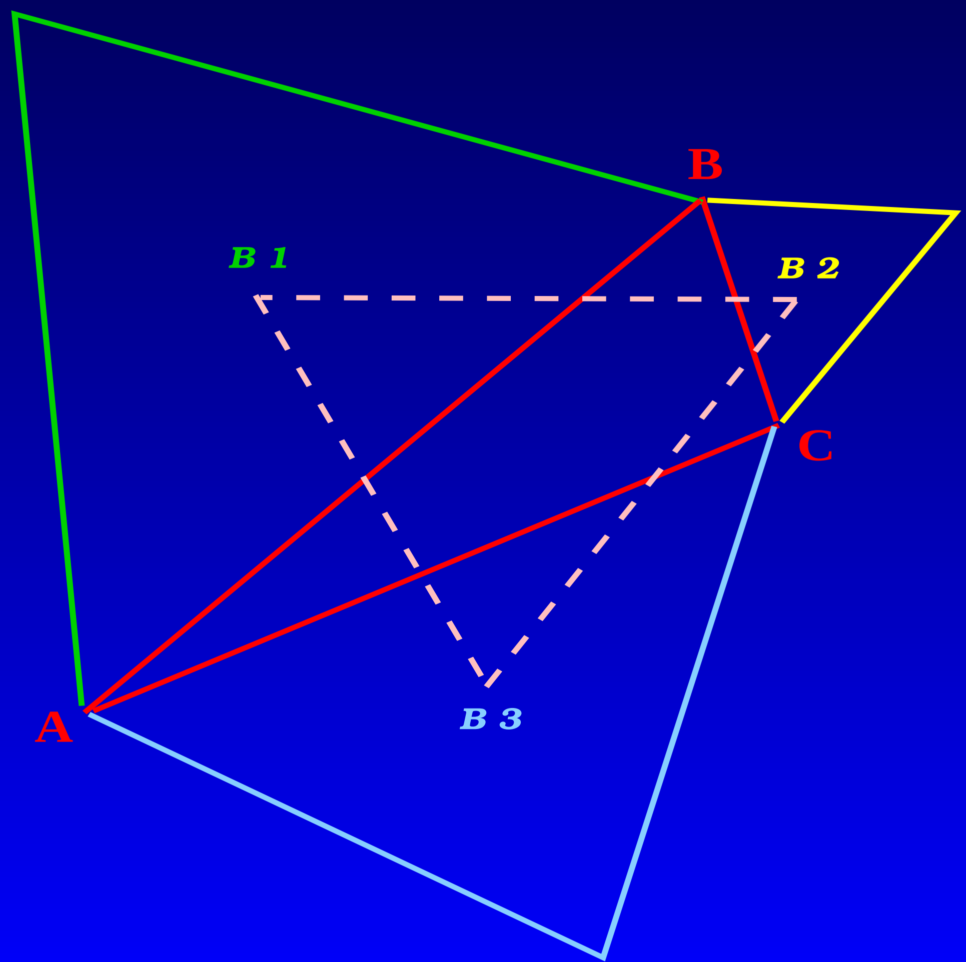
Fermat e Baricentro



Não poderá coincidir com o Fermat, pois as semi-retas que formam angulos de 120 não passarão pelos vértices !

Teorema de Bonaparte

Seja um ΔABC qualquer. Levante em seus lados triângulos equiláteros $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$, cujos Baricentros são $\mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2,\ \mathcal{B}_3$.



Teorema de Bonaparte

Problema 3

Teorema (de Napoleão Bonaparte):
$\Delta \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$ é um triângulo Equilátero.

Provaremos isso usando apenas Rotações em pontos bem escolhidos.
Por isso precisamos ver o que resulta quando compomos as Rotações.

Composição de Rotações

Quando compomos Rotações num mesmo ponto obtemos uma nova rotação no ponto:

$$R_{P,\beta} \circ R_{P,\alpha} = R_{P,\alpha+\beta},$$

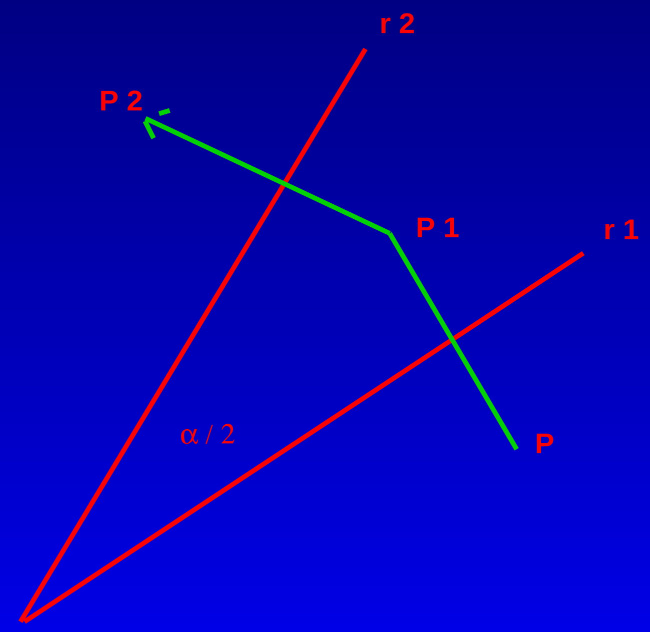
onde α, β são ângulos orientados.

Mas o que acontece se os pontos onde fazemos duas Rotações são pontos diferentes ?

Rotações são duas reflexões

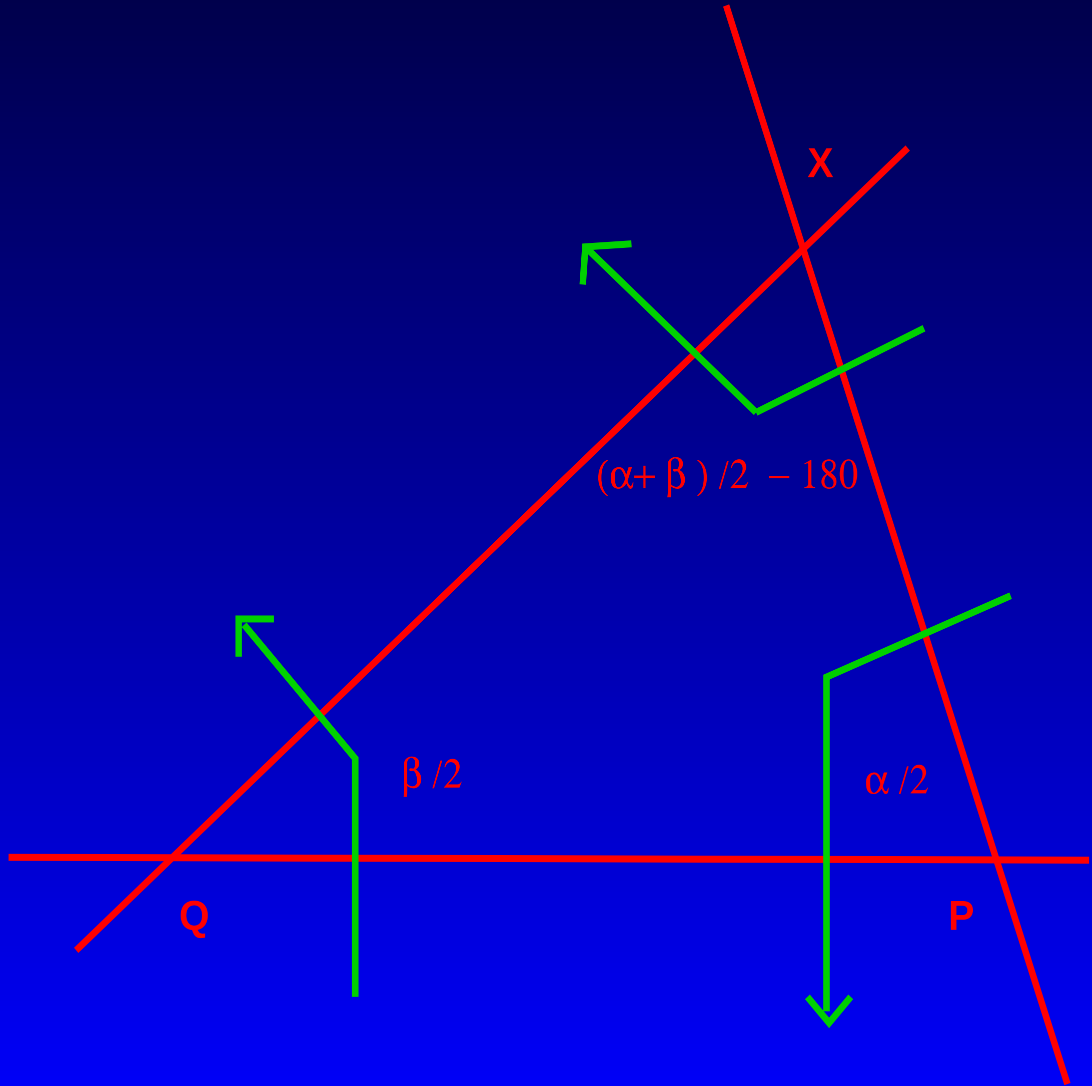
Para entendermos o que acontece, primeiro devemos nos convencer de que uma $R_{\alpha,P}$ pode ser decomposta como:

$$R_{P,\alpha} = T_{r_2} \circ T_{r_1}, \quad \text{se} \quad r_2 \cap r_1 = P, \quad \widehat{r_1 P r_2} = \frac{\alpha}{2}.$$



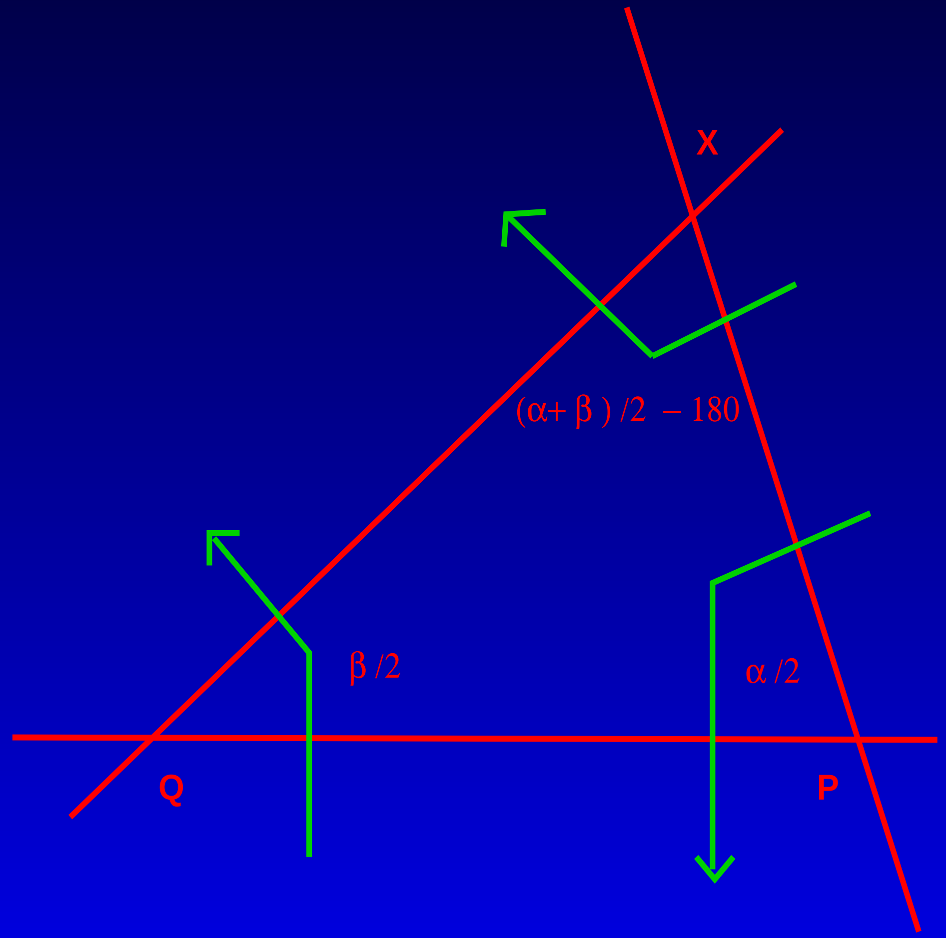
Rotações em pontos diferentes

$$R_{Q,\beta} \circ R_{P,\alpha} = R_{X,\alpha+\beta-360} = R_{X,\alpha+\beta}$$



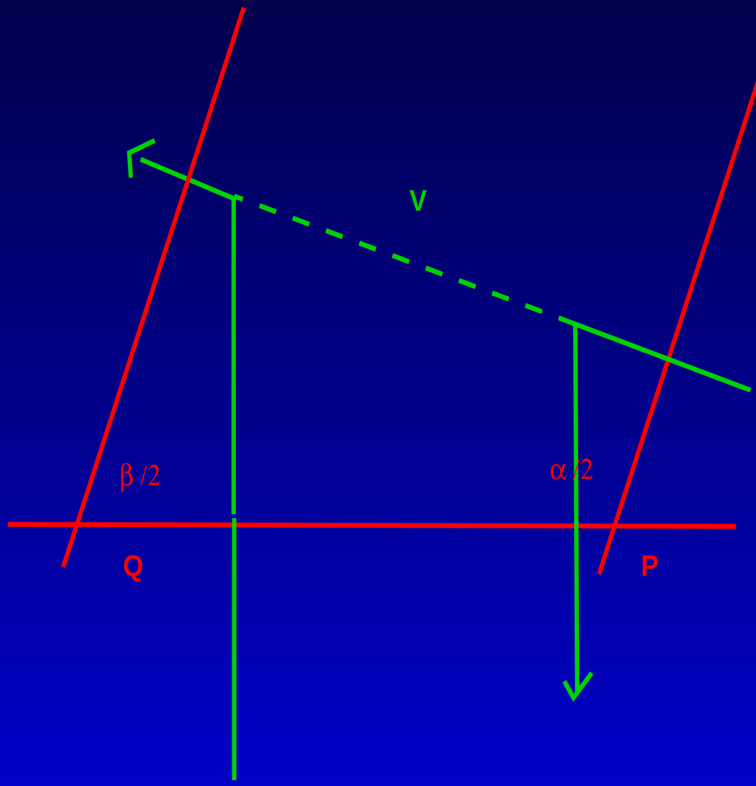
Pode dar uma translação

Se houvesse paralelismo das retas, não existiria X.



Solução

Esse Paralelismo surge quando $\frac{\alpha+\beta}{2} = 180$.

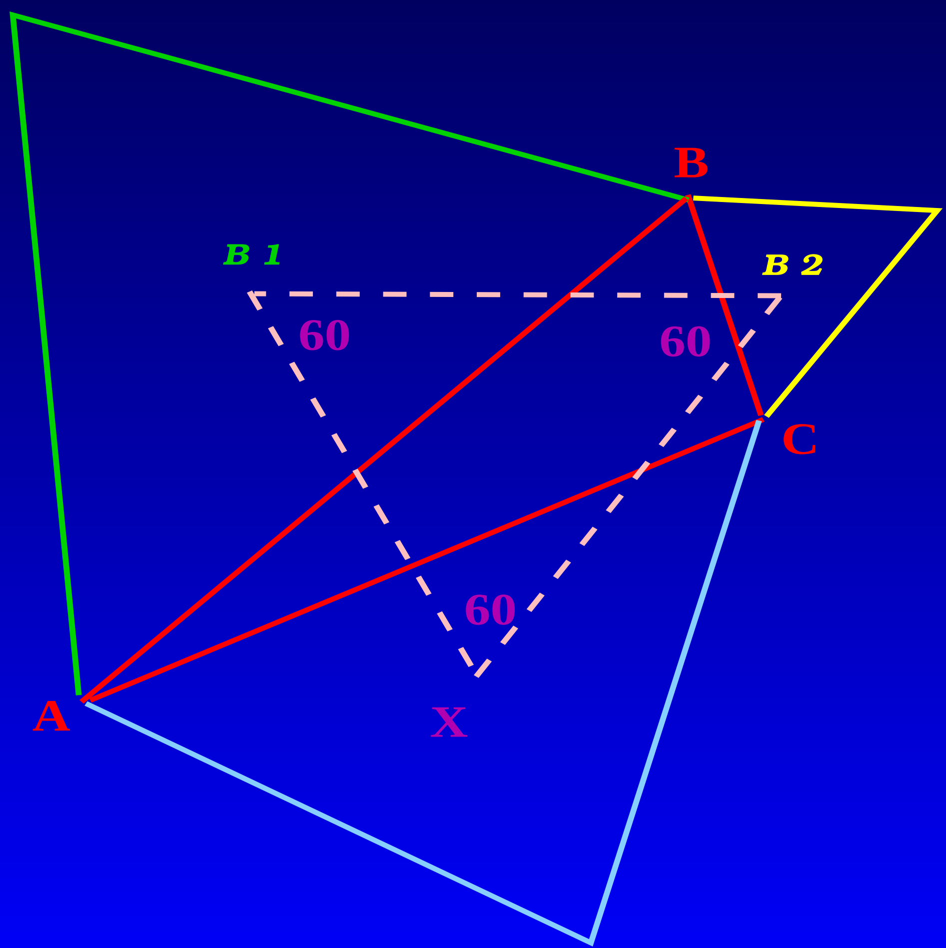


Nesse caso $R_{Q,\beta} \circ R_{P,\alpha}$ é uma Translação por V.

Prova do Teorema

Considere o ponto $X \in \Delta_3$ que forma um triângulo equilátero com $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

Queremos provar que $X = \mathcal{B}_3$.



Solução

Por absurdo, suporemos que $X \neq \mathcal{B}_3$.
Note que, pelo que já vimos,

$$R_{\mathcal{B}_2,+120} \circ R_{\mathcal{B}_1,+120} = R_{X,+240}.$$

Mas se $X \neq \mathcal{B}_3$:

$$R_{\mathcal{B}_3,+120} \circ R_{X,+240} = T_V,$$

pois

$$180 = \frac{120 + 240}{2}.$$

Solução

Chegaremos assim numa contradição, pois:

$$T_V = R_{\mathcal{B}_3,+120} \circ R_{\mathcal{B}_2,+120} \circ R_{\mathcal{B}_1,+120}$$

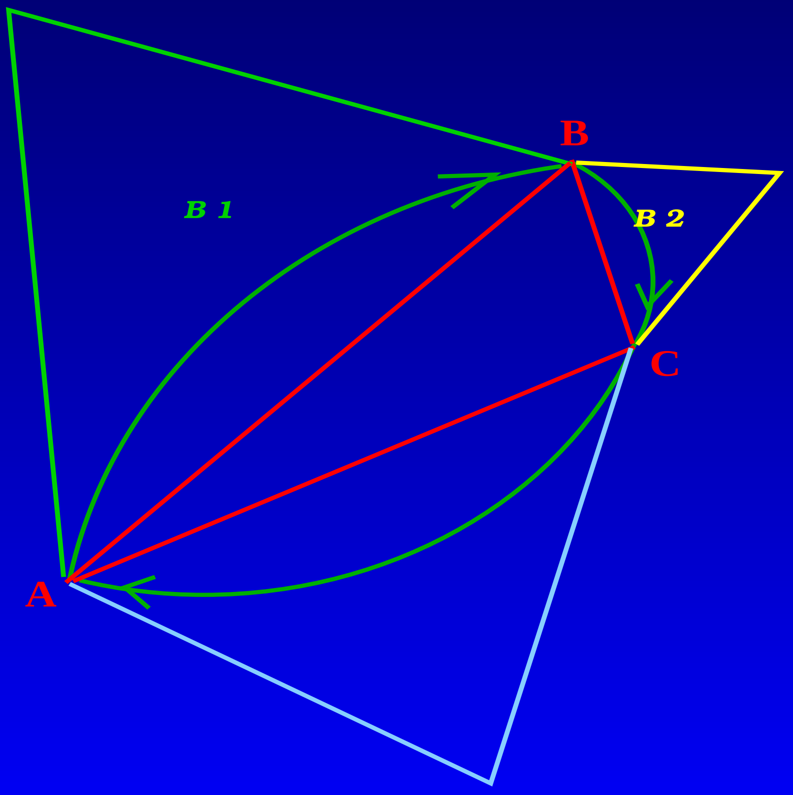
logo

Solução

$$\left(R_{\mathcal{B}_3,+120} \circ R_{\mathcal{B}_2,+120} \circ R_{\mathcal{B}_1,+120}\right)(A) =$$

$$= \left(R_{\mathcal{B}_3,+120} \circ R_{\mathcal{B}_2,+120}\right)(B) =$$

$$= R_{\mathcal{B}_3,+120}\,(C) = A$$



Solução

ou seja:

$$T_V(A) = A,$$

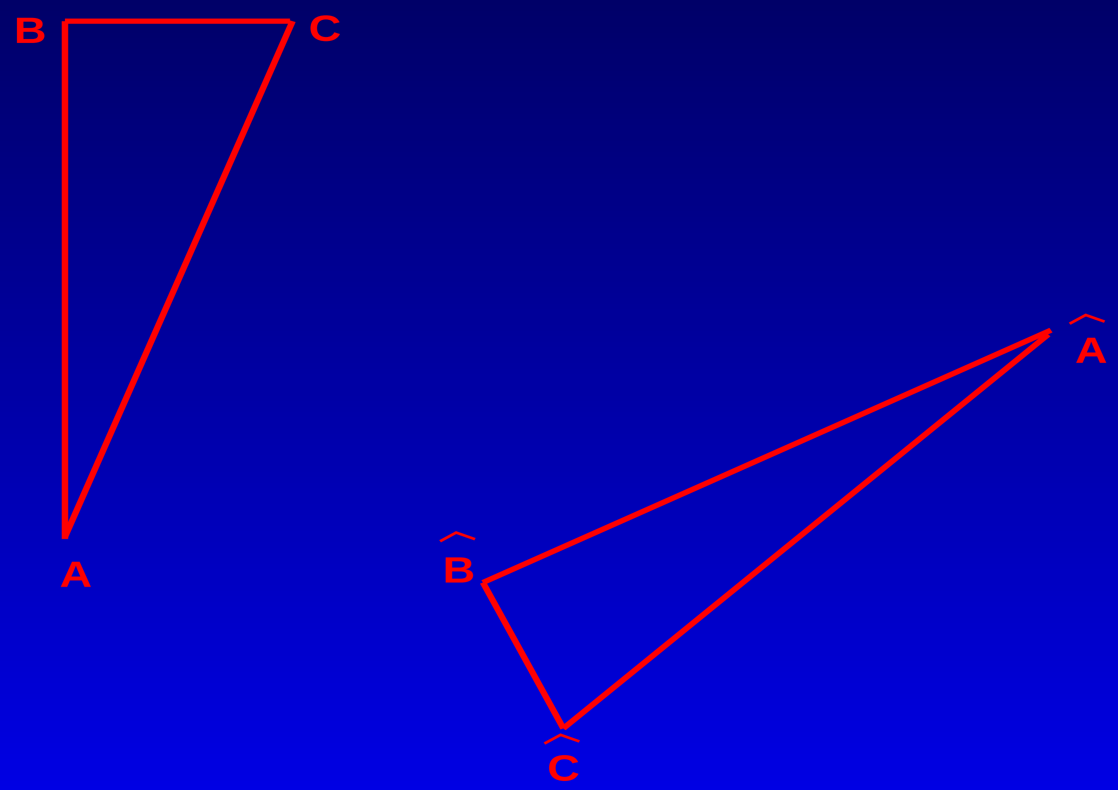
e no entanto numa translação tudo se move !

Contradição.

Logo $X = \mathcal{B}_3$.

Reflexões geram os Movimentos

Considere a composição de um número arbitrário de movimento rígidos, que leva um triângulo ΔABC num triângulo $\Delta \hat{A}\hat{B}\hat{C}$.



Reflexões geram os Movimentos

Problema 4:

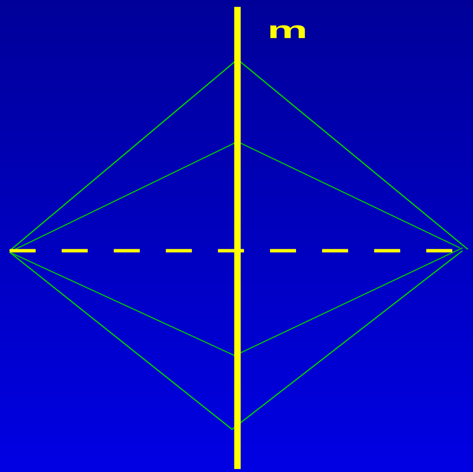
Leve ΔABC em $\Delta \hat{A}\hat{B}\hat{C}$ usando apenas $0, 1, 2$ ou 3 Reflexões em retas.

Mediatriz

Lembro que o lugar geométrico dos pontos no plano Euclidiano que equidistam de dois pontos fixados P_1, P_2 é uma reta.

Ela é chamada de mediatriz do segmento $[P_1 P_2]$.

A mediatriz é ortogonal ao segmento $[P_1 P_2]$ e passa pelo ponto médio do segmento $[P_1 P_2]$.



Solução

Temos direito a fazer até 3 jogadas, então:

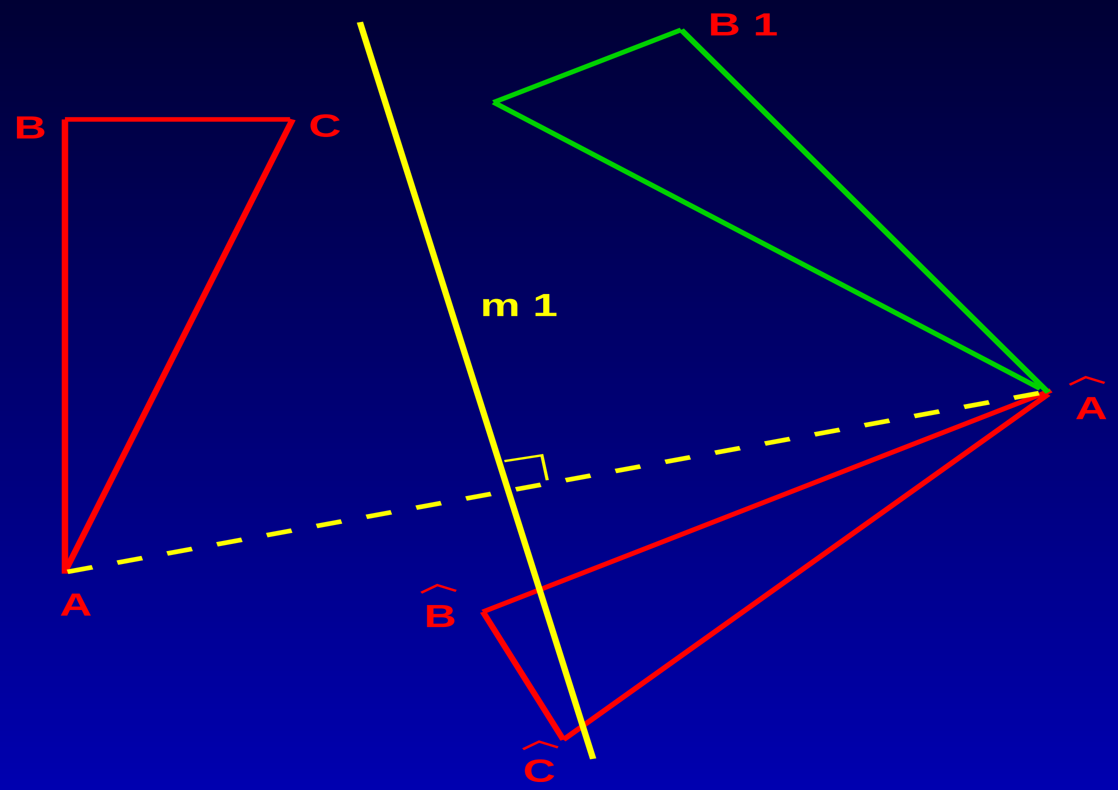
Jogada n. 1: Considere m_1 a reta mediatriz de $[A\hat{A}]$ (se $A = \hat{A}$ economizo essa jogada).

Faça a Reflexão em m_1, denotada T_{m_1}.

Note que $T_{m_1}(A) = \hat{A}$.

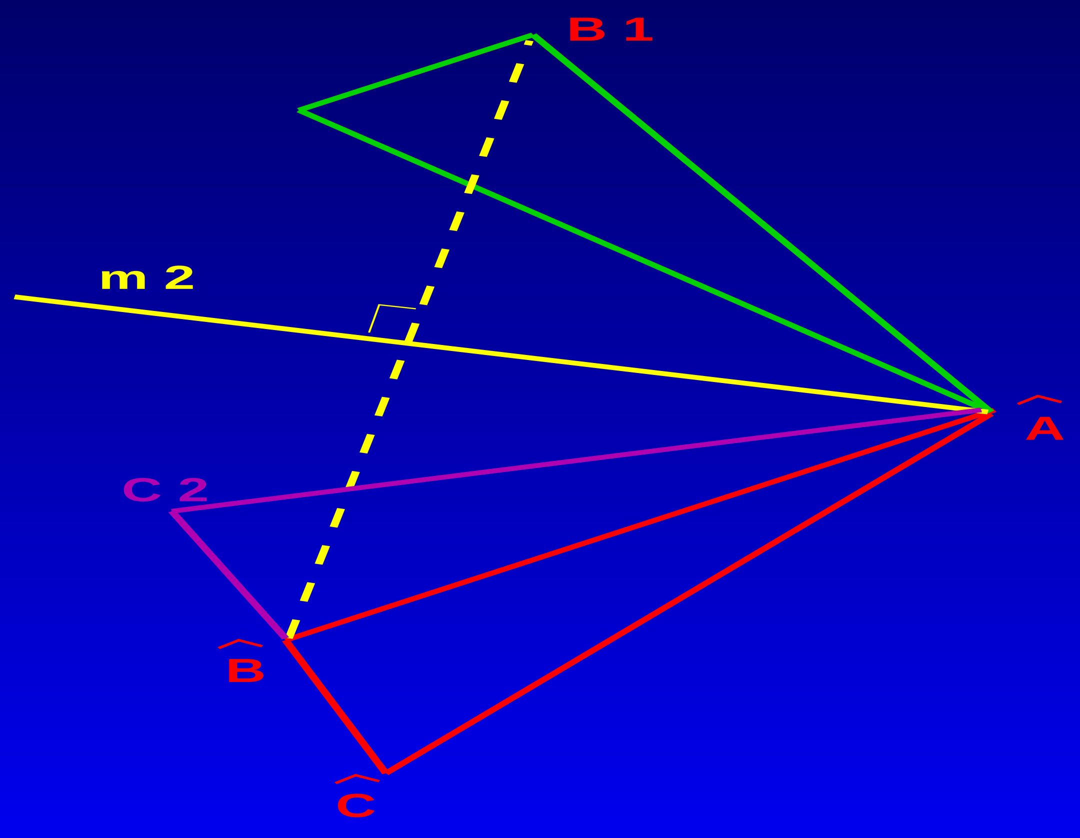
Denote $T_{m_1}(B) = B_1$.

Solução



Solução

Jogada n. 2: Considere m_2 a mediatriz de $[B_1\hat{B}]$ (se $B_1 = \hat{B}$, economizo essa jogada).
Aplique ao anterior a Reflexão T_{m_2}.



Solução

É importante notar para o que seguirá que

$$\hat{A} \in m_2,$$

De fato,

$$\overline{\hat{A}\hat{B}} = \overline{AB} = \overline{\hat{A}B_1},$$

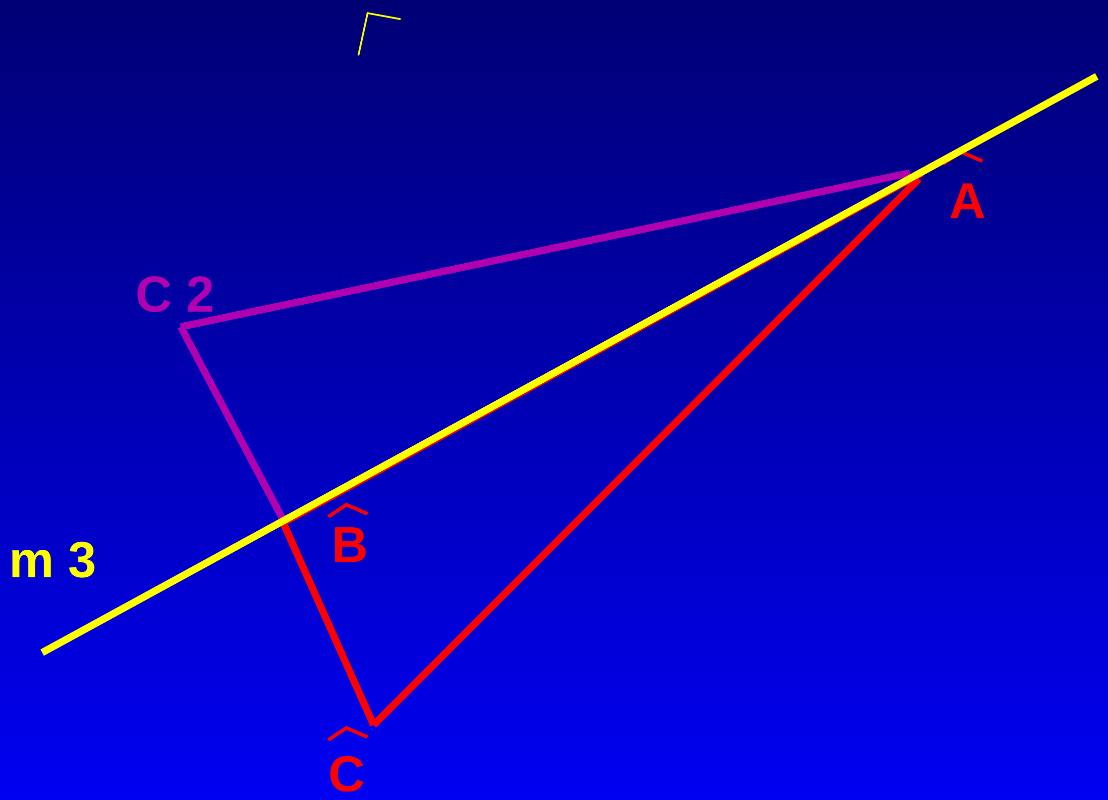
logo $\hat{A}$ equidista de $\hat{B}$ e de B_1.
Logo $T_{m_2}(\hat{A}) = \hat{A}$, assim como

$$T_{m_2}(B_1) = \hat{B}$$

Solução

Denote $C_2 = T_{m_2}(C)$

Jogada n.3: Considere m_3 a mediatriz de $[C_2\hat{C}]$ (se $C_2 = \hat{C}$ economizo esta jogada). Aplico T_{m_3} ao anterior.



Solução

Note que

$$\hat{A} \in m_3 \quad \text{e} \quad \hat{B} \in m_3.$$

De fato:

$$\overline{AC} = \overline{\hat{A}\hat{C}} = \overline{\hat{A}C_2}$$

diz que $\hat{A} \in m_3$ e

$$\overline{BC} = \overline{\hat{B}\hat{C}} = \overline{\hat{B}C_2}$$

diz que $\hat{B} \in m_3$.

Solução

Logo terei $T_{m_3}(\hat{A}) = \hat{A}$ e $T_{m_3}(\hat{B}) = \hat{B}$, bem como:

$$T_{m_3}(C_2) = \hat{C}$$

Solução:
A composição $T_{m_3} \circ T_{m_2} \circ T_{m_1}$ levou ΔABC em $\Delta \hat{A}\hat{B}\hat{C}$.

Dimensão $n \geq 3$.

Nos Espaços Euclidianos n dimensionais E^n os pontos tem n coordenadas:

$$P = (p_1, \ldots, p_n).$$

Se define a distância entre dois pontos $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ por:

$$\overline{P\,Q} := \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \ldots + (p_n - q_n)^2}.$$

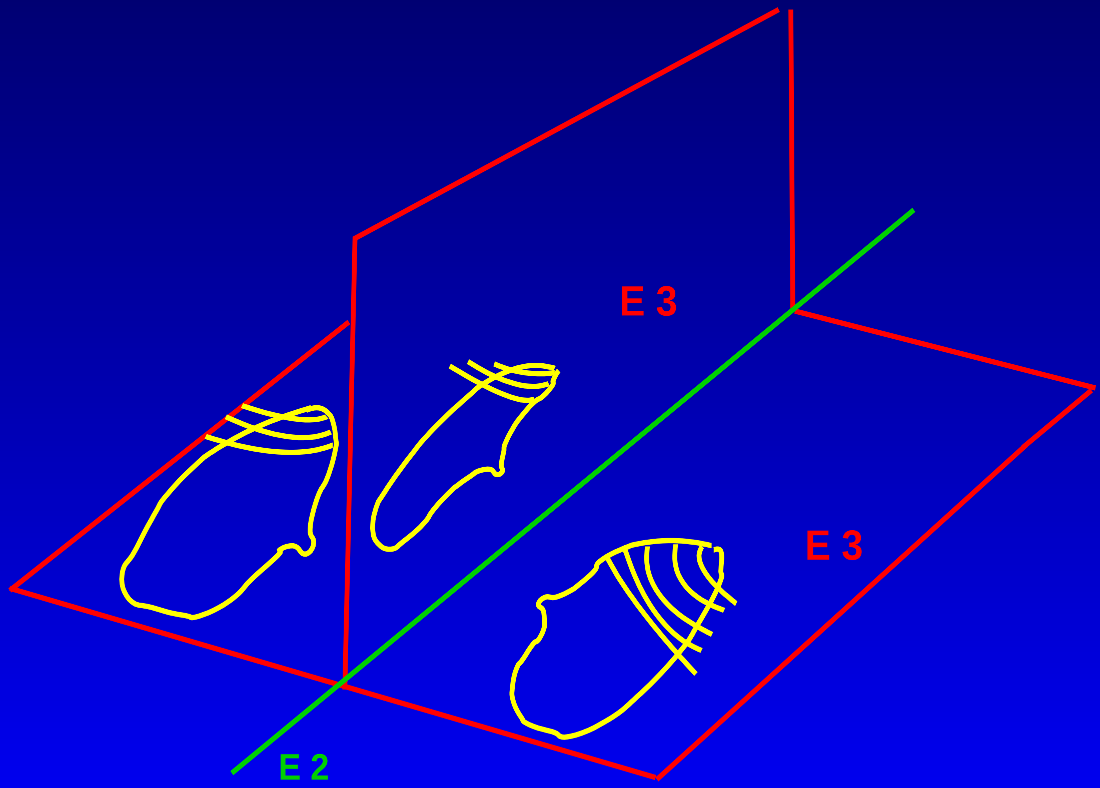
Dimensão $n \geq 3$.

Os movimentos Rígidos ou Isometrias são as transformações de E^n que preservam as distâncias e tamanhos.

Temos intuição do que são esse movimentos em E^3, mas certamente não em E^4 !
Por exemplo, sabemos que podemos mudar de destros a canhotos se nos refletimos num espelho plano dentro de E^3.

E^4

Já no E^4 existe uma Rotação que transforma um destro num canhoto !
Como não posso desenhar em dimensão 4, faço um esquema para ilustrar isso:



Problema 4 Generalizado

Sejam $n+1$ pontos $A_1, \ldots, A_{n+1}$ em posição geral de E^n levados em $n+1$ pontos $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_{n+1}$ atráves de uma composição de movimentos rígidos de E^n.

Problema 4 geral: Conseguir o mesmo efeito usando no máximo $n+1$ reflexões em hiper-planos.

A Solução é na linha da que apresentamos, só que agora usando reflexões em hiper-planos mediatrizes e indução em $n \in N$.

Referência

H. S. M. Coxeter, Introduction to geometry, John Wiley and Sons Inc., 1969.