

Lista de Exercícios 2

Questão 1. Verifique se A está contido em B , se A é igual a B ou se A é elemento de B para os seguintes conjuntos.

1. $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$
2. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Questão 2. Sejam A , B e C subconjuntos de um conjunto universo E .

(a) Prove que $(A\Delta B)\Delta C$ é igual ao conjunto de todos os $x \in E$ tais que x pertence a apenas um dos três conjuntos A , B ou C ou então $x \in A \cap B \cap C$. **Sugestão:** Divida em casos.

Caso 1: $x \in A$, $x \notin B$ e $x \notin C$

Caso 2: $x \notin A$, $x \in B$ e $x \notin C$

Caso 4: $x \in A$, $x \in B$ e $x \notin C$

etc.

(b) Prove que $A\Delta(B\Delta C)$ é igual ao mesmo conjunto de todos os $x \in E$ tais que pertence a apenas um dos três conjuntos A , B ou C ou $x \in A \cap B \cap C$.

(c) Conclua que vale a propriedade associativa para a diferença simétrica.

(d) Faça o diagrama de Venn para o conjunto $(A\Delta B)\Delta C$.

Questão 3. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$, e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$, determine e represente graficamente os conjuntos.

1. $A \times (B \cup C)$
2. $(A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \cap C)$
4. $(A \times B) \cup (A \times C)$

Questão 4. Mostre que se A , B e C são conjuntos, então $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ e $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Questão 5. Determine quais das afirmações são corretas e quais não são. Prove as corretas e dê um contra-exemplo para as falsas.

1. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
2. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
3. $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$

Questão 6. Determine quais das afirmações são corretas e quais não são. Prove as corretas e dê um contra-exemplo para as falsas.

1. $A \cap B = (A \cap C) \implies B = C$
2. $A \cup B = (A \cup C) \implies B = C$
3. $A \cap B = (A \cap C)$ e $A \cup B = (A \cup C) \implies B = C$

$$4. A \Delta B = (A \Delta C) \implies B = C$$

Questão 7. Mostre que o complementar relativo ou diferença não é uma operação comutativa, isto é, $A \setminus B = B \setminus A$ pode falhar.

Questão 8. Mostre que o complementar relativo ou diferença não é uma operação associativa, isto é, $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ pode falhar.

Questão 9. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Mostre que $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$

Questão 10. Dado o intervalo fechado $[-\alpha, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\alpha \leq x \leq \alpha\}$, determine os seguintes conjuntos.

$$1. \cup_{\alpha > 0} [-\alpha, \alpha] \quad 2. \cap_{\alpha > 0} [-\alpha, \alpha] \quad 3. \cap_{\alpha \geq 5} [-\alpha, \alpha]$$

Questão 11. Para cada inteiro n seja M_n o conjunto de todos os inteiros múltiplos de n . Assim, por exemplo, $M_0 = \{0\}$, $M_1 = M_{-1} = \mathbb{Z}$, $M_2 = M_{-2} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$, $M_3 = M_{-3} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$. Determine os seguintes conjuntos

$$\begin{array}{ll} 1. \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n & \cap_{n \in \mathbb{N}} M_n \\ 2. \cup_p \text{ primo } M_p & \cap_p \text{ primo } M_p \\ 3. \cup_{n \geq 6} M_n & \cup_{n \in M_5} M_n \end{array}$$