MAT 01064 – Álgebra I 2012/1

Lista de Exercícios 3

1. Defina o conceito de relação injetora e relação sobrejetora.

2. Sejam $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{5, 6, 8, 10\}$. Para cada relação $R_i \subseteq A \times B$ abaixo

   - explicite os elementos da relação
   - faça uma representação gráfica da relação
   - determine o domínio da relação
   - determine a imagem da relação
   - determine se a relação é injetora (respectivamente sobrejetora; respectivamente funcional).

   a) $R_1 = \{(x, y); y \text{ é divisível por } x\}$
   b) $R_2 = \{(x, y); xy = 40\}$
   c) $R_3 = \{(x, y); y = x + 3\}$
   d) $R_4 = \{(x, y); y = 2x\}$
   e) $R_5 = \{(x, y); x \leq y\}$

3. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$. Dê um exemplo de uma relação em A que é:

   a) injetora
   b) sobrejetora
   c) funcional
   d) reflexiva
   e) simétrica
   f) anti-simétrica
   g) transitiva
   h) injetora e
   i) funcional e sobrejetora
   j) reflexiva e anti-simétrica
   k) transitiva e simétrica
   l) injetora e reflexiva

4. Considere uma relação $R \subseteq A \times A$; denotemos por $\breve{R}$ a relação recíproca de R.

   a) Mostre que o conjunto $\Delta_R := R \cap \breve{R}$ define uma relação simétrica.

   b) No caso onde R é a relação funcional correspondente à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4$, represente graficamente R e $\breve{R}$. Encontre Δ_R.

5. Quais das relações abaixo são reflexivas, anti-simétricas, simétricas , ou transitivas ?

a) $R_1 = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$

b) $R_2 = \{(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$

c) $R_3 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$

d) $R_4 = \{(a,c),(c,a)\}$

6. Seja R a relação de equivalência das congruências módulo n, ou seja, dizemos que $(a,b) \in R \iff a$ e b tem o mesmo resto na divisão por n. Dado $a \in \mathbb{Z}$ denotaremos por $[\,a\,]_n$ a classe de equivalência de a com respeito a relação R. Descreva a classe de equivalência $[\,4\,]_n$, onde:

   a) $n = 3$, b) $n = 5$, c) $n = 6$, d) $n = 8$, e) $n = 9$.

7. No seguinte exercício vamos brincar um pouco. Considere o conjunto A dos alunos de álgebra I. Nas relações $R \subseteq A \times A$ definidas abaixo, indique se há exemplos de relações de equivalência ou de ordem pacial; em cada caso, quando a resposta for pela negativa, indique também qual das propriedades falha.

   a) $a\,R\,b$ se a idade do aluno a for maior que a idade do aluno b.

   b) $a\,R\,b$ se o aluno torcer pelo mesmo time.

   c) $a\,R\,b$ se o aluno a estiver apaixonado pelo aluno b.

   d) $a\,R\,b$ se o aluno a já olhou para o aluno b.

   e) $a\,R\,b$ se o aluno a e o aluno b fizeram o mesmo número de disciplinas na licenciatura.

8. Verifique se as coleções de conjuntos abaixo definem uma partição do conjunto dos números inteiros. Justifique sua resposta. Caso sua resposta seja negativa use algum elemento da coleção para dar um exemplo de uma partição de $\mathbb{Z}$.

   a) o conjunto dos números inteiros positivos e o conjunto dos números inteiros negativos.

b) o conjunto dos números inteiros divisíveis por 3, o conjunto dos números inteiros que tem resto 1 na divisão por 3 e conjunto dos números inteiros que tem resto 2 na divisão por 3.

c) o conjunto dos números inteiros que não são divisíveis por 3, o conjunto dos números pares e conjunto dos números inteiros que tem resto 3 na divisão por 6.

9. Seja $R \subseteq N^* \times \mathbb{N}^*$ dada por: $(a, b) \in R$ se e somente se a divide b, ou seja b é divisível por a. $(a, b) \in R$ será denotada por $a|\, b$.

   - Mostre que a relação R (ou seja $|$) é uma relação de ordem.
   - Quais dos elementos abaixo são comparáveis no conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}, |\,)$? Justifique.

     a) 5 e 15, b) 6 e 9, c) 8 e 16, d) 7 e 17, e) 10 e 15.

10. Determine dois elementos não comparáveis nos conjuntos parcialmente ordenados abaixo.

    a) $(\mathbb{P}(\{0, 1, 2\}), \subseteq)$

    b) $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |\,)$.