MAT 01064 – Álgebra I   2012/1

Lista de Exercícios 4

Questão 1. Para as seguintes relações em $S = \{0, 1, 2, 3\}$, especifique quais das propriedades (R), (AR), (S), (AS) (T) são satisfeitas:

1. $(m, n) \in R_1$ sse $m + n = 3$
2. $(m, n) \in R_2$ sse $m \cdot n$ é par
3. $(m, n) \in R_3$ sse $m \leq n$
4. $(m, n) \in R_4$ sse $m + n \leq 4$
5. $(m, n) \in R_5$ sse $\max\{m, n\} = 3$

Questão 2. Faça diagramas representando as relações do exercício anterior.

Questão 3. Seja A um conjunto e seja R uma relação em A que é simétrica e transitiva. Mostre que se R satisfaz "$\forall x \in A, \exists y \in A$ tal que xRy"então R é reflexiva.

Questão 4. Uma relação R em A é dita circular se "$(\forall x, y, z \in A)(xRy$ e $yRz \longrightarrow zRx)$". Mostre que se R é reflexiva e circular em A, então R é de equivalência.

Questão 5. Nas relações do exercício da questão 1, determine as relações inversas.

Questão 6. Defina a relação $\approx$ em $\mathbb{Z}$ por $m \approx n \overset{def}{\Longleftrightarrow} m^2 = n^2$.

1. Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência.
2. Descreva as classes de equivalência de $\approx$.

Questão 7. Defina em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a relação $\approx$ $(m, n) \approx (k, l) \overset{def}{\Longleftrightarrow} m + l = n + k$.

1. Mostre que $\approx$ é uma relação de equivalência.
2. Faça um esboço de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que ilustra as classes de equivalência de $\approx$.

Questão 8. Seja S o conjunto de todas as funções de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Defina em S a relação $f \sim g \overset{def}{\Longleftrightarrow} |f(x) - g(x)| \leq 1, \forall x \in [0, 1]$. Verifique que $\sim$ é reflexiva e simétrica, mas não é transitiva.

Questão 9. A relação ρ definida em $\mathbb{Z}$ por $x\rho y \leftrightarrow xy \neq 0$ é uma relação de equivalência ?

Questão 10. Mostre que as seguintes relações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são de equivalência. Descreva geometricamente as classes de equivalência.

1. $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
2. $(a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow ab = cd$

Questão 11. Verifique o que há de errado com a seguinte "prova" de que simetria e transitividade implicam reflexividade:

Seja ρ uma relação simétrica e transitiva definida em A. Para todo $x, y \in A$, temos

$$x\rho y \Rightarrow x\rho y \text{ e } y\rho x \quad \text{(por simetria)} \quad \Rightarrow x\rho x \quad \text{(por transitividade)}.$$

Questão 12. Desenhe diagramas de Hasse para os seguintes subconjuntos do conjunto $\mathbb{P} = \mathbb{N}^*$ parcialmente ordenado pela divisibilidade.

(i) $\{1, 2, 3, 6, 12\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ (iii) $\{1, 2, 3, 5, 12, 60\}$ (iv) $\{1, 2, 3, 6, 8\}$

Questão 13. Faça diagramas de Hasse para os seguintes conjuntos parcialmente ordenados.

1. $(A, |)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 24\}$ e $m|n$ significa m divide n.
2. O conjunto dos subconjuntos de $\{3, 7\}$ com $\subseteq$ como ordem parcial.

Questão 14. A figura abaixo mostra diagramas de Hasse de três conjuntos parcialmente ordenados.

1. Quais são seus elementos maximais ? 2. Quais são seus elementos minimais ?
3. Quais deles têm elemento máximo ? 4. Quais deles têm elemento mínimo ?
5. Quais elementos cobrem o elemento e?
2. Ache, caso existam: $\sup\{d, c\}$, $\sup\{w, y, v\}$, $\inf\{a, g\}$, $\sup\{p, m\}$
3. Consider os subconjuntos $X = \{a, c, g\}$, $Y = \{m, n\}$ e $Z = \{v, x, y\}$. Determine, caso existam, elementos maximais, minimais, máximos, mínimos, cotas superiores, cotas inferiores, supremos e ínfimos para os conjuntos X, Y e Z.

Questão 15. Inspirados na ordem de um dicionário, definimos a ordem <u>lexicográfica</u>: Sejam $(S, \preceq_1)$ e $(T, \preceq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados pelas ordens $\preceq_1$ e $\preceq_2$, respectivamente. Então define em $S \times T$:

$$(s, t) \preceq (s', t') \text{ se } s \prec_1 s' \text{ ou } s = s' \text{ e } t \preceq_2 t'.$$

1. Mostre que a ordem lexicográfica é uma ordem.
2. A ordem lexicográfica é uma ordem total?
3. Considere $S = T = \mathbb{N}$ com a ordem $\leq$ usual e a ordem lexicográfica em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Estabelaça relações de ordem entre os elementos $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7)$.

Questão 16. Sejam $(S, \preceq_1)$ e $(T, \preceq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados pelas ordens $\preceq_1$ e $\preceq_2$, respectivamente. Então define em $S \times T$ a ordem <u>produto</u>:

$$(s, t) \preceq (s', t') \text{ se } s \preceq_1 s' \text{ e } t \preceq_2 t'.$$

1. Mostre que a ordem produto é uma ordem.
2. A ordem produto é uma ordem total?
3. Considere $S = T = \mathbb{N}$ e a ordem lexicográfica em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Estabelaça relações de ordem entre os elementos $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (3, 6, (3, 7)$.
4. Faça um gráfico representando todos os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que são menores que $(5, 2)$ na ordem produto.
5. Faça um gráfico representando todos os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que são menores que $(5, 2)$ na ordem lexicográfica.

Questão 17. Sejam $S = \{0, 1, 2\}$ e $T = \{3, 4\}$ com as ordens usuais. Liste os elementos em ordem crescente dos seguintes conjuntos (i) na ordem lexicográfica, (ii) na ordem produto.

(a) $S \times T$ (b) $S \times S$ (c) $T \times S$

Questão 18. Seja $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ com a ordem usual. Liste os elementos 11,000,10,0010,1000 de $\mathbb{B}^*$ em ordem crecente (i) na ordem lexicográfica, (ii) na ordem produto.

Questão 19. Determine quais das relações a seguir são funções :

1. $\{(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} |\ y = x^2\}$
2. $\{(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} |\ y^2 = x^3\}$
3. $\{(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} |\ y^2 = x\}$
4. $\{(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} |\ y^2 = x \text{ e } x > y\}$

Questão 20. Seja $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$. Quantas funções de A em B existem ? Em geral, se $|A| = m$ e $|B| = n$, quantas são as funções de A em B ?

Questão 21. Das funções da **Questão 1**, quais são invertíveis?

Questão 22. Das funções de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2\}$, alguma pode ser invertível? Justifique.

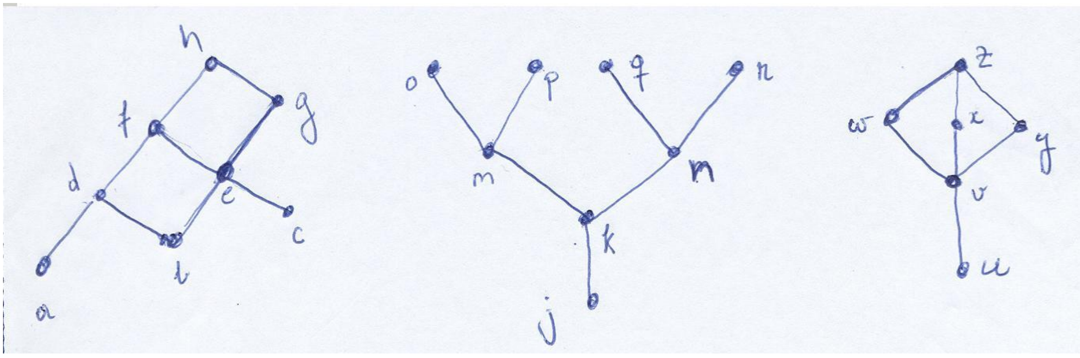

Figura 1: Figura do Exercìcio 14.