

MAT01064 – ÁLGEBRA I – 2012/1 LISTA DE EXERCÍCIOS 6

1. Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões seguintes:

(a) $\frac{1}{2 + 3i}$

(b) $\frac{1 + i}{3 - 2i}$

(c) $\frac{3 - i}{-1 + 2i}$

(d) $\frac{4 - 3i}{-1 + i} - \frac{1 - i}{\sqrt{2} - i}$

(e) $\left(\frac{1}{1 + i}\right)^2$

(f) $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2$

2. Calcule a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:

(a) $-i(2 - 3i)^2$,

(b) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^2}{-2 + i}$.

3. Represente graficamente os números complexos $z_1, z_2, z_1 z_2$ e z_1/z_2 para:

(a) $z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = (1 - i)/5\sqrt{2}$

(b) $z_1 = (1 + i)\sqrt{3}/2, \quad z_2 = (\sqrt{3} + i)/2$

(c) $z_1 = (1 + i)/2\sqrt{2}, \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

4. Escreva os seguintes números complexos na forma polar e represente-os geometricamente:

(a) $-2 + 2i$

(b) $\frac{1}{-1 - i\sqrt{3}}$

(c) $-1 - i$

(d) $\frac{-3 + 3i}{1 + i\sqrt{3}}$

(d) $\frac{-4}{\sqrt{3} - i}$

5. Calcule as raízes dos seguintes números complexos e represente-as geometricamente:

(a) $\sqrt{-4}$

(b) $(1 + i\sqrt{3})^{1/2}$

(c) $\sqrt[3]{i}$

(d) $\sqrt[3]{-i}$

(e) $(-1 + i\sqrt{3})^{1/4}$

(f) $\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}$

6. Encontre todas as soluções da equação $P(z) = 0$ nos casos em que $P(z)$ é cada um dos polinômios seguintes:

(a) $z^6 - 64$

(b) $z^3 - 1$

(c) $5z^3 + 8$

(d) $z^2 - 2z + 2$

(e) $2z^2 + z + 1$

(f) $z^2 + (1 - 2i)z + (1 + 5i)$

(g) $z^4 + 9$

7. (a) Obtenha fórmulas para $\cos 3\theta$ e $\sin 3\theta$ em função de $\sin \theta$ e $\cos \theta$.

(b) Faça o mesmo para $\cos 4\theta$ e $\sin 4\theta$.

(c) Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $T_n(x)$ de grau n e coeficientes inteiros tal que $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$, $\forall \theta$. Calcule $T_n(x)$ para $n \leq 5$. Mostre que

$$T_n(x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots$$

Os polinômios da sequência $T_n(x)$ são chamados de *polinômios de Chebyshev de primeira espécie*.

(d) Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $U_n(x)$ de grau n e coeficientes inteiros tal que $\frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}\theta} = U_n(\cos\theta)$, $\forall\theta$. Calcule $U_n(x)$ para $n \leq 5$. Mostre que

$$U_n(x) = \binom{n+1}{1}x^n - \binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots$$

Os polinômios da sequência $U_n(x)$ são chamados de *polinômios de Chebyshev de segunda espécie*.

8. Seja $z = \cos 72^\circ + i \text{sen} 72^\circ$.

(a) Mostre que $z^5 = 1$.

(b) Prove que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

(c) Seja $y = z + \frac{1}{z}$. Mostre que $y^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$. Dividindo a igualdade provada no item (b) por z^2 , mostre que $y^2 + y - 1 = 0$.

(d) Resolva a equação do segundo grau obtida para y no item (c).

(e) Para cada valor encontrado para y no item (d), use a igualdade $y = z + \frac{1}{z}$ para encontrar dois valores possíveis para a raiz quinta de 1. Conclua que as raízes quintas de 1 são

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad z_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$z_3 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad z_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

(f) Utilizando a conclusão obtida no item (e), justifique que

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{e} \quad \text{sen} 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$