

8. O discriminante da cúbica em forma reduzida $x^3 + ax + b = 0$ foi definido como sendo $D = -(4a^3 + 27b^2)$, mas vimos que, em termos das raízes da cúbica, ele se expressa como $D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$. Use esta última igualdade para dar uma nova demonstração de que $D = 0$ se e somente se existe uma raiz dupla, $D > 0$ se e somente se as três raízes são reais e distintas, $D < 0$ se e somente se existe uma raiz real e duas imaginárias.
9. (a) Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\alpha \neq \beta$. Prove que

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & x \\ \alpha^2 & \beta^2 & x^2 \end{pmatrix}$$

define um polinômio de grau 2 cujas raízes são α e β e cujo coeficiente de x^2 é $\beta - \alpha$. Escreva o polinômio $p(x)$ em sua forma fatorada.

- (b) Use o anterior para provar que se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, com $\alpha \neq \beta$, então

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

Justifique que a igualdade acima também vale se $\alpha = \beta$. **Observação:** Este é o caso particular 3×3 do famoso *determinante de Vandermonde*.

- (c) Use o anterior pra mostrar que se x_1, x_2, x_3 são as raízes da cúbica $x^3 + ax + b = 0$, então

$$\left[\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \right]^2 = -(4a^3 + 27b^2).$$

10. (a) Encontre uma solução aproximada para a cúbica $x^3 - 3x - 18 = 0$.
- (b) Justifique que $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ e $\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Utilize este fato para encontrar as soluções exatas da equação.
- Resp: $3, -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{15}}{2}$.
11. Escreva as seguintes equações quárticas na forma reduzida e monte a resolvente correspondente a cada uma delas:
- a) $x^4 + x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$;
- b) $y^4 + 2y^3 - y^2 + 2y - 1 = 0$.
12. Escreva as equações quárticas na forma reduzida cuja resolvente é cada uma das três primeiras equações cúbicas do exercício 1.
13. Determine as soluções das seguintes equações quárticas
- a) $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$;
- b) $y^4 - y^2 + 2y - 1 = 0$.