MAT01064 – ÁLGEBRA I – 2012/1 LISTA DE EXERCÍCIOS 8

1. Nos casos abaixo, encontre $d(x) = \text{MDC}(f(x), g(x))$ e encontre polinômios $h(x)$ e $k(x)$ tais que $h(x)f(x) + k(x)g(x) = d(x)$:

   (a) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$ e $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$

   (b) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

   (c) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$ e $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$

2. Os restos da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - 3$ e $x + 1$ são, respectivamente, 1 e 4. Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - 3)(x + 1)$. **Sugestão:** Seja $r(x)$ o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - 3)(x + 1)$. Quanto valem $r(3)$ e $r(-1)$?

3. Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{D}[x]$ polinômios não nulos e seja $d(x) = \text{MDC}(f(x), g(x))$. Dado um polinômio $c(x) \in \mathbb{D}[x]$, prove que $\exists\, h(x), k(x) \in \mathbb{D}[x]$ tais que $h(x)f(x) + k(x)g(x) = c(x)$ $\iff$ $d(x) \mid c(x)$.

4. Seja $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Prove que um polinômio $f(x)$ de grau 3 é irredutível em $\mathbb{D}[x]$ se e somente se $f(x)$ tem pelo menos uma raiz em $\mathbb{D}$. Dê um exemplo de um polinômio reduível sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ que seja redutível mas não tenha raízes (admite fatores de grau 2 mas não de grau 1).

5. Mostre que o máximo divisor comum dos polinômios

$$4x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 10x - 3 \qquad \text{e} \qquad 6x^3 - 19x^2 + 2x + 3$$

   é $x^2 - 7/2x + 3/2$. Encontre as raízes comuns dos polinômios.

6. Responda as seguintes questões:

   (a) Mostre que um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - 1$ se e somente se a soma de seus coeficientes é zero.

   (b) Obtenha uma condição análoga para que um polinômio $f(x)$ seja divisível por $x + 1$.

   (c) Obtenha a decomposição do polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ em fatores irredutíveis.

7. Obtenha a decomposição em fatores irredutíveis do polinômio $x^4 + 1$ em $\mathbb{C}[x]$ e em $\mathbb{R}[x]$.

8. Considere o polinômio $f(x) = x^6 - 1$ (lembre a representação geométrica das raízes de um número complexo).

   (a) Mostre que $f(x)$ possui somente duas raízes reais; quais são estas raízes ?

   (b) Determine a fatoração de $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$.

9. Obtenha a decomposição em fatores irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$ para os polinômios:

   (a) $x^4 - 10x^2 + 1$

   (b) $x^6 + 27$

10. Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{D}[x]$ polinômios não nulos e seja $d(x) = \text{MDC}(f(x), g(x))$. Sejam $h(x), k(x) \in \mathbb{D}[x]$ tais que $h(x)f(x) + k(x)g(x) = d(x)$. Prove que $\text{MDC}(h(x), k(x)) = 1$