CORRELAÇÃO DO LÓGICO E DO HISTÓRICO NO ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

Marisa da Silva Dias
diasma@usp.br
Faculdade de Educação – USP
Antonio Sérgio Cobianchi
cobi@debas.faenquil.br
Faenquil-Lorena

RESUMO

Este texto compõe elementos das pesquisas de doutoramento e pós-doutoramento em Educação que estão sendo realizadas pelos autores. Partindo das concepções de professores em relação à didática e ao conceito de números reais, buscamos desencadear uma discussão de sua prática em sala de aula. Essa discussão pretende colaborar para uma proposta de ensino na construção do conjunto dos números reais que permita dar significado a existência do mesmo. O objetivo é aproximar os elementos históricos que favoreçam a compreensão da evolução dos conceitos para possibilitar o estudo no movimento do pensamento na apreensão do objeto, também em situações de ensino e aprendizagem. A proposta está inserida na colocação do problema da correlação entre o lógico e o histórico no desenvolvimento do conhecimento e do ensino de números reais.

INTRODUÇÃO

Números reais e continuidade, tema presente nos sistemas de ensino fundamental, médio e superior, ainda não é uma questão resolvida no ensino, apesar da existência de alguns trabalhos em Educação Matemática que tratam desse importante conteúdo da Matemática. Quase todas as pesquisas existentes sobre esse assunto levantam problemas em relação ao ensino e à aprendizagem de números reais em todos os níveis de ensino. Algumas delas, como as de Cobianchi e Dias, sugerem alguns elementos que poderiam ser levados em consideração para uma proposta de ensino desse conjunto numérico.

As pesquisas de Cobianchi e Dias procuraram verificar como o assunto números reais é tratado por professores. Esse texto está baseado em alguns dos resultados dessas duas pesquisas e discute uma proposta de ensino desse conceito.

CONCEPÇÕES SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

A importância desse conceito

As concepções dos professores sobre a importância do conhecimento dos números reais e de seu ensino, em Cobianchi (2001), revelam uma preocupação com a apreensão desse conteúdo. Muitas delas consideram essa questão como fundamental para o ensino da Matemática, embora em nenhuma resposta dada apareça uma interpretação no que consiste essa importância para seu ensino e aprendizagem. Por outro lado, observa-se que uma parcela desconhece a importância em se ensinar e, logicamente, em aprender números reais.

Nos comentários dos entrevistados encontramos afirmações que designam, ao conjunto dos números reais, uma característica soberana em relação aos outros conjuntos. As justificativas concentram-se na direção de que esse assunto é muito importante para entender o mundo que nos cerca.

Algumas justificativas dessa importância foram relatadas como sendo uma decorrência natural para a ampliação dos conjuntos numéricos e um suporte para entendimento e aplicação em outros conceitos da Matemática. A concepção de um conjunto amplo e que comporta “todas as soluções de quaisquer problemas” também apareceu na pesquisa de Dias (2002).

Outros depoimentos revelaram que a aprendizagem desse conteúdo permite uma compreensão da lógica e do desenvolvimento de raciocínio. Semelhantes a essa concepção, certos depoimentos ressaltaram que, com o aprendizado desse conjunto, o universo dos alunos passa por um processo de enriquecimento: “você sai de um mundo até então limitado para um conhecimento infinitamente rico” (COBIANCHI, 2001, p. 300).

Outros ainda destacaram que os números reais foram criados por uma necessidade, mas não dizem no que consiste tal necessidade.

O ensino

A grande maioria dos professores entrevistados em Cobianchi (2001) e em Dias (2002) introduz didaticamente a definição do conjunto dos números reais da mesma maneira, a união dos conjuntos dos números racionais com os dos irracionais, ou uma variação dessa, como a união dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Os irracionais, por sua vez, são definidos pela impossibilidade de representação desse número como uma fração de inteiros.

Esta maneira de exposição é motivada pela lacuna existente em cursos de licenciatura com relação a esse tema, e pela maneira que os livros didáticos o abordam.

Essa particularidade no tratamento didático dos conjuntos de números reais e de números irracionais revela concepções que se mostraram insuficientes em certas situações apresentadas em Dias (2002), tanto operacional como conceitualmente.

Os professores entrevistados em Dias e em Cobianchi ao refletirem sobre questões envolvendo propriedades dos números reais expuseram dificuldades em relação à ordem, à densidade, ao infinito, às definições de número racional e de número irracional, e, ao próprio conceito de número e suas representações. Convém observar que noções de ordem, densidade, continuidade fazem parte de um elenco de conceitos que deveriam ser discutidos quando se pretende ensinar esse conjunto numérico. Cabe destacar também que Richard Dedekind, um dos formalizadores da teoria dos números reais, necessitou usar esses conceitos na sua construção.

A preocupação de refletir no ensino concepções não adequadas com o conceito de números reais, também destacada pelo professor em Dias (2002), reforça a necessidade de estudos para a construção de procedimentos pedagógicos em relação a esse conceito. Essa também é nossa preocupação, principalmente por que se pôde observar, em Dias (2002), a semelhança de concepções dos professores com as de estudantes encontradas nas pesquisas consultadas.

Algumas concepções

Para orientar nossa discussão, apresentamos alguns métodos expostos pelos professores, entrevistados em Cobianchi (2001) e Dias (2002), sobre o ensino dos números reais, bem como concepções dos mesmos.

Como dissemos anteriormente, o objetivo didático é chegar na definição dos números reais como união dos conjuntos dos números racionais com dos irracionais. Para isso todos os métodos caminham na direção de explicar a existência dos irracionais.

Um procedimento didático é a utilização de material concreto. Esses recursos procuram explicar a existência de alguns números irracionais que, juntamente com os racionais, irão formar o conjunto dos números reais. Alguns exemplos apresentados foram: a medição com barbante de objetos redondos para "descoberta do número π", a utilização da escala da régua, explicando que entre um decímetro há dez centímetros e entre um centímetro, dez milímetros, procurando associar com a reta aritmética e, o uso da calculadora principalmente para obter a raiz quadrada de um número.

Observamos que a utilização da calculadora ou o uso de medições empíricas pode levar a uma identificação de números distintos pela igualdade de um número com uma aproximação deste (DIAS, 2002). Medições empíricas também podem formar a concepção de que o número irracional é o resultado de uma medida.

A representação decimal infinita do número irracional, embora seja muito usada para introduzir o número irracional, pela impossibilidade de representá-lo na forma de fração de inteiros, não é muito explorada após esse momento inicial. No ensino fundamental e médio podemos observar que prevalece o uso das raízes, seja nos cálculos que envolvem o Teorema de Pitágoras, a relação lado e área de quadrado, ou as equações quadráticas de um modo geral.

Essas abordagens estão mais direcionadas a uma operacionalidade e aplicabilidade dos irracionais. Os métodos apoiados nessas abordagens podem levar a formação da concepção, como mencionada anteriormente, de que o conjunto dos números reais comporta a solução de todos os problemas.

Pudemos observar imagens conceituais (DIAS, 2002) desse conjunto como sendo de uma "reta racional" por vezes discreta. Também em Cobianchi (2001), percebe-se, a partir dos depoimentos dos professores, que "os alunos sabem distinguir números, mas não pensam em continuidade, pensam apenas em grandezas discretas" (p. 428).

A operacionalidade muitas vezes está ligada a uma abstração de situações empíricas desvinculados de um pensamento teórico.

Há concepções que refletem a não distinção entre densidade e continuidade (DIAS, 2002 e COBIANCHI, 2001) e, talvez por esse motivo, a densidade seja, para alguns, concebida somente para o conjunto dos números reais.

A concepção do conjunto dos números reais acaba por ser formada como um "amontado de numerais". O significado dos números, a formação dos conjuntos e suas propriedades não são discutidos de forma a proporcionar uma compreensão de sua existência.

UMA DISCUSSÃO

A importância do estudo do conceito de números reais foi revelada por professores do ensino fundamental, médio e superior. E, ainda, pudemos observar a dificuldade de tratamento no ensino desse conceito. Os professores entrevistados em Cobianchi e em Dias revelam suas dificuldades na abordagem conceitual e didática desse assunto.

Nossa discussão pretende colaborar para uma proposta de ensino e aprendizagem sobre a construção do conjunto dos números reais, que permita dar significado a existência do mesmo. Para isso, buscamos uma aproximação com os elementos históricos que permitam compreender a evolução dos conceitos, com o objetivo de interagir com propostas didáticas para o ensino desse conjunto numérico. Com os fundamentos históricos, almejamos proporcionar relações sobre a prática do ensino do conjunto dos números reais, e a lógica de sua construção. Nesse sentido, procuramos estudar o desenvolvimento histórico do conceito de número irracional.

A proposta está inserida na perspectiva lógico-histórica (KOPNIN, 1978) que tem por pressuposto a possibilidade do estudo no movimento do pensamento no sentido da apreensão do objeto. Para Kopnin, o histórico é entendido no seu processo de mudança, etapas de seu surgimento e desenvolvimento e, o lógico como meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico. Processo este não no sentido de guiar o pensamento impondo-lhe o desenvolvimento histórico, mas permitindo que a formação das idéias componha a lógica do movimento do pensamento.

A importância do estudo da história dos números reais será necessária para podermos acompanhar o movimento do pensamento no desenvolvimento desse conceito, sua essência, sua necessidade na evolução humana.

Tópicos históricos

A evolução dos conceitos que levaram ao estabelecimento formal do conjunto dos números reais passa, necessariamente, pelos processos envolvendo o desenvolvimento da noção de continuidade. A idéia de continuidade foi justificada de diferentes maneiras, desde a Grécia Antiga, até o final do século XIX. Selecionamos quatro dessas justificativas utilizadas por Cobianchi (2001), que julgamos das mais representativas de cada período da História, em que a noção de continuidade passou por transformações.

De maneira geral as obras analisadas por Cobianchi podem sugerir elementos para serem incorporados aos procedimentos de ensino de números reais. Entre eles, os conceitos de infinidade, ordenação, densidade, enumerabilidade e continuidade.

Consideramos que a construção de Dedekind reúne conceitos na sua “forma mais madura” (KOPNIN, 1978, p. 185) que é a convergência de todas essas noções, e, portanto, propícia para o início de um estudo que pretende “reproduzir” a lógica da sua história.

A construção dos números reais, feita por Richard Dedekind (1831-1916), divulgada em 1872, tomou por ponto de partida o domínio dos números racionais. Ao invés de identificar o número real como uma seqüência convergente de racionais como era comum em alguns de seus antecessores, ele encarava o número real como se esse fosse gerado pelo poder da mente em classificar os números racionais. Esse esquema de classificação, chamado de corte, partição, separação, ou seção de Dedekind, afirma que:

“Se todos os pontos de uma reta estão em duas classes tal que todo ponto da primeira classe encontra-se à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz esta divisão”.

O que de outra forma seria:

“Se o sistema $\Re$ de todos os números reais é separado em duas classes A_1 e A_2 tal que todo número α_1 em A_1 é menor que todo número α_2 em A_2, então existe um e somente um número real α pelo qual esta separação é produzida”. (DEDEKIND, 1963, p.20).

Por que será que Dedekind estava se empenhando em definir números reais?

Sabemos que essa preocupação possui seus fundamentos na história. Podemos observar a crise da Escola Pitagórica proporcionada pelo surgimento do incomensurável, seguida do avanço ocasionado pelo axioma da exaustão, contribuição de Eudoxo. Esse axioma, posteriormente desenvolvido e usado por Arquimedes (287-212 a.C), afirma que: “Dadas duas grandezas desiguais de mesma espécie, se da maior se tira uma grandeza maior que sua metade e da que resta, outra grandeza maior que sua metade e se repete esse processo, restará uma grandeza menor que a menor das grandezas dadas”.

O conceito de continuidade também foi desenvolvido por Boaventura Cavalieri (1597-1647), através dos indivisíveis. Cavalieri, discípulo de Galileu, desenvolveu as idéias sobre os indivisíveis para métodos geométricos e publicou o seu tratado “Geometria Indivisilibus” em 1635. Com esse trabalho ele transformou o uso da reta e de superfícies “indivisíveis” em um conjunto poderoso de técnicas para comparar áreas e volumes. Em linguagem moderna, seus indivisíveis seriam:

“Um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e o volume pode ser considerado como composto de secções que são volumes indivisíveis ou quase atômicos".

Também no sentido do desenvolvimento do conceito de continuidade temos as contribuições de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que proporcionaram uma evolução na construção dos números reais. Cauchy definiu o infinitésimo como: "Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce infinitamente de modo a convergir para o limite zero".

O infinitésimo está relacionado com o conceito de limite. Embora a definição formal de limite, utilizada pelos livros didáticos, apresente como pressuposto o conjunto dos números reais perfeitamente definido, na história o processo não obedeceu a essa lógica. A definição de limite de Cauchy acrescentou elementos que ajudaram a formalização final dos números reais, dada por Dedekind.

A definição de limite, dada por Cauchy, foi feita de uma forma verbal:

"Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a finalmente diferir desse de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros".

Por meio dos estudos históricos podemos encontrar que a essência da formação do conjunto dos números reais, os irracionais, encontra-se na incomensurabilidade, como diz Caraça (1998), a crítica do problema da medida. Sabemos que essa descoberta levou a crise da Escola Pitagórica. Os pitagóricos, como eram chamados os estudiosos da Escola Pitagórica, não levaram adiante o estudo dos incomensuráveis, pois caso o fizessem, teriam que negar suas próprias bases filosóficas. Ora, isso foi no séc. VI a.C. somente no séc. XIX foi dada uma definição para o conjunto dos números reais fundamentando a continuidade ou completude desse conjunto. Durante esse longo período, estudiosos desenvolveram conceitos e idéias, como as citadas acima, que influenciaram na definição dos números reais. Embora o salto do campo numérico dos racionais, para o campo dos reais seja o conceito de continuidade ou completude, há outros conceitos envolvidos. Sabemos que a síntese do campo dos reais não se concebe por uma particularidade.

Observamos que o conjunto dos números reais é tratado tanto em livros didáticos como pelos relatos de professores (COBIANCHI, 2001; DIAS, 2002) de uma forma muito particular, por isso a compreensão parcial e muitas vezes titubeante desse conceito.

O estudo das produções históricas relacionadas à reta real, que aqui apenas citamos uma pequena parte, nos permite refletir sobre a forma lógica da construção desse conceito que poderá nortear o processo do desenvolvimento das atividades orientadoras de ensino (MOURA, 1996, 2001) que, ao nosso ver, devem compor a proposta pedagógica.

REFERÊNCIAS

CARAÇA,B.J. *Conceitos fundamentais da Matemática.* Lisboa: Tipografia Matemática Ltda,1998.

COBIANCHI, A. S. *Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores*. Rio Claro, 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

DEDEKIND, R. *Essays on the theory of numbers*. New York: Dover Publications, 1963.

DIAS, M da S. *Reta real: conceito imagem e conceito definição.* São Paulo, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como ação formadora. In: Castro, A. D.; Carvalho, A. M. P. (Eds). *Ensinar a ensinar*. São Paulo: Pioneira Thomson Lerning Ltda., 2001. p. 143-162.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora, *Bolema*, n. 12, 1996. p. 29-43.