Números complexos na forma algébrica

A gênese do complexos

Durante dois mil anos a matemática cresceu sem se importar com o fato de que as raízes quadradas dos negativos não podiam ser calculadas.

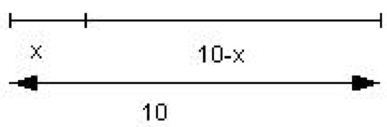
Os gregos, não reconheciam os números negativos e nem precisavam deles, pois seu interesse estava na geometria e, para a descrição de quantidades como áreas e volumes, os números positivos eram suficientes.

Os números imaginários passaram por uma evolução semelhante. A impossibilidade de resolver a equação $x^2+a = 0$ quando "a" é positivo era conhecida há séculos, mas as tentativas de superar as dificuldades demoraram a acontecer. Foi apenas no século XIX que os matemáticos aceitaram e formalizaram estes números.

Os números complexos aparecem em muitos episódios da história da matemática. Um deles é um problema proposto em 275 d.C., pelo matemático Diophanto, em sua obra *Arithmetica,* que consistia em determinar os catetos x, y de um triângulo retângulo com área igual a 7 e perímetro igual a 12. Ao chegar a um raiz de número negativo, decidiu que o problema não tinha solução. Realmente, não existe um triângulo com estas medidas, mas é possível, hoje com os números complexos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.xy = 7 \\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 12 \end{cases}$$

No século XVI, o matemático Girolamo Cardano considera o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes, cujo produto destas partes seja igual a 40.



Ou seja, resolver a equação

$$x(10-x)=40$$

O que exige achar as raízes do polinômio

$$x^2-10x+40$$

as quais são: x= $5\pm\sqrt{-15}$.

Cardano chamou estas expressões de raízes *sofísticas*, pois para ele elas eram "tão sutis quanto inúteis".

No século XVII, o matemático Bombelli definiu $\sqrt{-1}$.

Bombelli determinou algumas regras de operações para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$\left(\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right)=-1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right)=1$$

$$\left(-\sqrt{-1}\right)\left(-\sqrt{-1}\right)=-1$$

$$(\pm 1)\left(\sqrt{-1}\right)=\pm\sqrt{-1}$$

$$(\pm 1)\left(-\sqrt{-1}\right)=\mp\sqrt{-1}$$

Sobre a adição, enunciou a soma de dois números complexos:

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)+\left(c+d\sqrt{-1}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$

Mais tarde, o matemático suíço Leonhard Euler, definiu

$$\sqrt{-1}\ \mathbf{=\ i}$$

e o número complexo da forma z=a+bi.

A partir daí, números até então supostamente inexistentes, tornaram-se um objeto matemático.

Exemplos:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2i$$
$$\sqrt{-36} = \sqrt{36.(-1)} = \sqrt{36}.\sqrt{-1} = 6i$$
$$\sqrt{-2} = \sqrt{2.(-1)} = \sqrt{2}.\sqrt{-1} = \sqrt{2}i$$

Em fins do século XVIII, Carl Friedrich Gauss, em sua tese de doutorado em matemática, mostra que toda a equação com coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz **(Teorema Fundamental da Álgebra).**

Aplicando esta definição e fatorando um polinômio de grau n (escrevendo-o como um produto de polinômios de graus menores), Gauss mostra que as equações polinomiais de grau n têm exatamente n raízes.

Exemplos:

1. $z^2 + 1 = 0$, deve ter duas raízes complexas $z_1 = \sqrt{-1}$ e $z_2 = -\sqrt{-1}$.
2. $z(z^2 + 1) = 0$ ou seja $z^3 + z = 0$ tem três soluções:

   $z = 0$, $z = \sqrt{-1}$, $z = -\sqrt{-1}$
3. $x^2 + 2x + 2 = 0$ tem duas soluções $x_1 = -1 + i$ e $x_2 = -1 - i$
4. $Z^n = 0$, n natural, tem *n* raízes, todas iguais a zero. Em outras palavras, a raiz z = 0 tem multiplicidade n.
5. Analogamente $z^n = 1$ tem n raízes.

   Uma delas nós conhecemos $z_1 = 1$.

Quais são as outras? Para responder, precisamos estudar a representação trigonométrica dos números complexos. Aguarde o próximo módulo.

Como podemos notar nos episódios históricos citados acima, a história dos números complexos está fortemente relacionada aos polinômios, uma vez que a "invenção" deste novo conjunto numérico se deu através do estudo das soluções de determinadas equações polinomiais. Os números complexos também serviram como base para o estudo das raízes das equações polinomiais, resultando na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

A representação algébrica do complexo

Um número complexo representa-se por $z = a + bi$ com $a, b \in R$.

a é a parte real de z, $Re(z) = a$;

b é a parte imaginária de z, $Im(z) = b$.

O complexo z é um **número real** se e só se $Im(z) = 0$,

isto é: $z = a + 0i = a$.

O complexo z é um **imaginário puro** se e só se $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$,

isto é $z = 0+bi = bi$

O complexo z é **nulo** se e só se $Re(z) = Im(z) = 0$.

Exemplos:

$z = 0$ com $Re z = 0$ e $Im z = 0$

$z = 1$ com $Re z = 1$ e $Im z = 0$

$z = 10i$ com $Re z = 0$ e $Im z = 10$

$z = 1+2i$ com $Re z = 1$ e $Im z = 2$

$z = 0{,}5 + i\sqrt{2}$ com $Re z = 0{,}5$ e $Im z = \sqrt{2}$

$z = \sqrt{3} + \pi i$ com $Re z = \sqrt{3}$ e $Im z = \pi$

Os números complexos apareceram como uma extensão dos números reais.

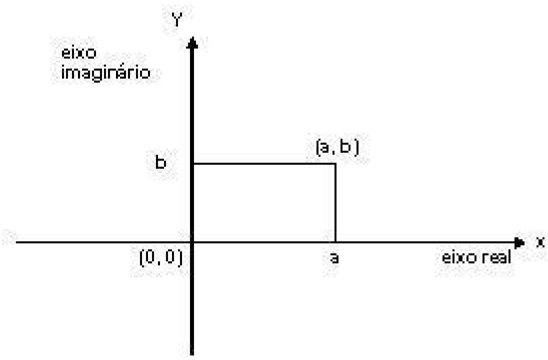
O seu conjunto representa-se por **C** e define-se como sendo

$C = \{z = a+ bi: a, b \in R \text{ e } i^2 = -1\}$

R representa o conjunto dos números reais.

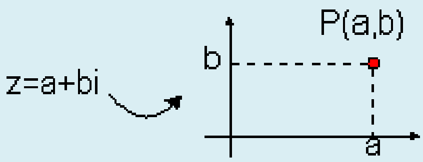
A representação geométrica do complexo

Os números complexos podem ser identificados com pares ordenados de números reais, e a representação gráfica consiste em identificar cada par ordenado (a, b) com um ponto do plano, cujas coordenadas retangulares são dadas por a e b.



Assim, a *unidade imaginária* i é simplesmente o par ordenado (0,1), que é algo que se pode visualizar no plano. Essa visualização foi fundamental para o progresso da teoria dos números complexos, do mesmo modo que, ocorreu com os números negativos, que só tornaram-se objetos de estudo quando num eixo orientado, assinalaram-se, para eles, representações gráficas à esquerda da origem.

A cada complexo z = a + bi, corresponde o ponto do plano P(a, b), que se designa por afixo de z. Pode-se, também, considerar o complexo z como o vector OP, sendo O a origem do referencial.



Ao referencial com estas características dá-se o nome de Plano Complexo.

Igualdade de Números Complexos

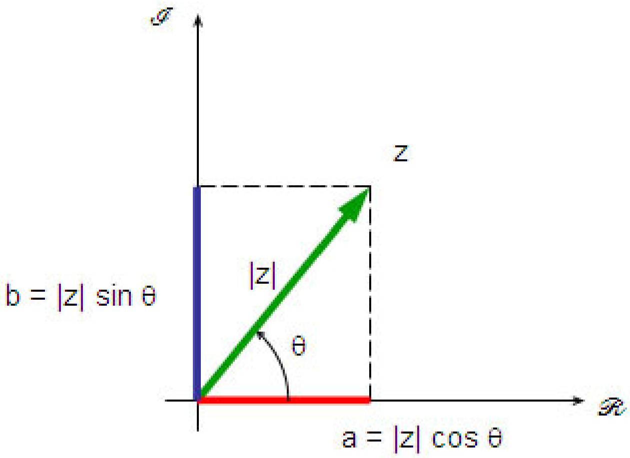
Dados dois complexos z = a + bi e w = c + di tem-se:

z = w se e só se a = c e b = d

Módulo de um Número Complexo

Dado um complexo z = a + bi, o módulo de z é a distância do ponto P(a,b), correspondente a z, no plano complexo , à origem do plano.

O módulo de z, cujo símbolo é, $|z|$ é obtido a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras, sobre o triângulo retângulo cujos catetos medem "a" e "b". O módulo de z é a medida da hipotenusa deste triângulo.



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Simétrico de um Número Complexo

O simétrico do número complexo z = a + bi é o número -z = -(a + bi), ou seja -z = (-a) + i(-b).

Exemplo:

z = 0 com Rez = 0 e Im z = 0 e o simétrico de z é (–z) = 0

z = 1 com Rez = 1 e Im z = 0 e o simétrico de z é (–z) = -1

z = 1+2i com Rez = 1 e Im z = 2 e o simétrico de z é (–z) = -1-2i

z = 0,5 + i√2 com Rez = 0,5 e Im z = √2 e o simétrico de z é

(–z) = - 0,5 - i√2 1

Conjugado de um Número Complexo

O conjugado do complexo z = a + bi é denotado por $\bar{z}$ = a - bi.

Exemplos:

z = 1+2i	tem conjugado	$\bar{z}$ = 1 - 2i
z = 0,5 + i√2		$\bar{z}$ = 0,5 - i√2

A visualização das representações algébricas e geométricas dos complexos e das suas operações deve ser feita com auxílio deste aplicativo.

http://www.catedu.es/matematicas_blecua/index_ciencias.htm

INSTRUÇÕES DE USO

Ao entrar no site, você encontrará duas barrinhas horizontais na lateral esquerda:

Primero

Segundo

Presione em Primero.

Você vai encontrar um título em vermelho: Numeros complejos

Pressione.

Você vai encontrar três importantes aplicativos para os números complexos.

1. **Numeros complexos na forma binômica**

z = a = bi

Neste tópico, você pode fazer variar os valores de a e b, num complexo $z = a + bi$.

O aplicativo mostra a correspondente variação da representação geométrica de z e de seu conjugado.

Procure alguns complexos como exemplos importantes: $z = 1$; $z = i$; $z = 1 + i$.

2. **Operações com complexos**

Neste tópico, você pode visualizar no plano, o resultado das operações de dois complexos, dados na forma algébrica.

Observe que a adição corresponde a encontrar a diagonal do paralelogramo e que a multiplicação corresponde a uma rotação, um giro.

3. **Potências de i**

Neste tópico, você pode variar n para calcular i^n e visualizar a variação da representação geométrica.

Verifique que só existem 4 diferentes valores para i^n.

Quatro Operações com Complexos: extensão das operações com reais

Consideremos os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

Adição

Algebricamente, a soma é na forma: $\mathbf{z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i}$

Justificativa:

Basta aplicar as propriedades comutativa e associativa da adição e a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d) i$$

Exemplo:

$(1 + 3i) + (-5 + 0,4 i) = = -4 + 3,4 i$

Subtração

A subtração de z_1 por z_2 não é mais que a soma de z_1 com o simétrico de z_2, ou seja, $\mathbf{z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)}$.

Justifica-se do mesmo modo que a adição.

Exemplo:

$(1 + 3i) - (-5 + 0,4 i) = = 6 + 2,6 i$

Multiplicação

1. Potências de $i = \sqrt{(-1)}$:

$i^1 = 1$ $\quad$ $i^5 = i$

$i^2 = (-1)$ $\quad$ $i^6 = (-1)$

$i^3 = (-i)$ $\quad$ $i^7 = (-1)$

$i^4 = 1$ $\quad$ $i^8 = 1$

$i^{4n} = 1$ para n = 1,2,3...

De um modo geral, os valores das potências de i se repetem de 4 em 4, assim podemos dizer que:

$$i^{(k + 4n)} = i^k$$

para n inteiro não negativo e para k = 1,2,3,4

Por exemplo: $i^{22} = i^{(2 + 4.5)} = i^2 \cdot i^{20} = i^2 = (-1)$

2. O produto de z_1 por z_2 é o número complexo

$$z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Justificativa:

Basta aplicar a propriedade distributiva entre os termos:

$(a+bi) . (c+di)$, igualando $i^2 = -1$

Exemplos:

$(1 + 3i) . (-5 + 0,4 i) = 1.(-5) + 3.0,4.i^2 + 3.(-5) i + 1. 0,4 i =$

$(-5 - 1,2) + (-15 + 0,4) i = -6,2 - 14,6 i$

Divisão

1. Inverso de um Número Complexo

Sendo $z = a + bi$ com a e b não nulos, o seu inverso é

$$z^{-1} = 1/z = (a - bi)/(a^2 + b^2)$$

Justificativa

Partimos de $z = a+bi$.

Por extensão das propriedades dos números reais, podemos representar

z^{-1} como $\frac{1}{z}$ **=** $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a+bi}}$

Mas nada sabemos sobre o significado deste símbolo: $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a+bi}}$

Precisamos então transformá-lo na expressão padrão para complexos: Re $(\frac{1}{z})$ +i Im $(\frac{1}{z})$.

Para descobrir a parte real e a parte imaginária, recorremos ao que sabemos sobre produtos notáveis:

$$(a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) \text{ (Verifique!)}$$

$$\text{Isto é: } \bar{\boldsymbol{z}}\,.\,\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|^2$$

Multiplicando e dividindo o novo número desconhecido

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a+bi}} \quad \text{por} \quad (a\text{-}bi),$$

no numerador e no denominador, obtemos um número complexo na forma algébrica padrão:

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a+bi}} = \frac{\boldsymbol{a-bi}}{(\boldsymbol{a+bi})\,(\,\boldsymbol{a-bi})} = \frac{\boldsymbol{a-bi}}{(a^2 + b^2)} = = z^{-1}$$

Re (1/z) = $a/(a^2 + b^2)$

Im (1/z) = $(-b) / (a^2 + b^2)$

Isto é: $z^{-1} = \frac{\boldsymbol{a-bi}}{(a^2 + b^2)} = \bar{z} / |z|^2$

$$\mathbf{1/z =} = \bar{z} / |z|^{\mathbf{2}}$$

Exemplos:

$(1 + 2i)^{-1} = (1 - 2i) / 5$

$i^{-1} = -1\ i = -i$

O quociente entre z_1 e z_2 é
o produto de z_1 pelo inverso de z_2, ou seja,

$$z_1/z_2 = z_1.z_2^{-1}$$

Tomemos dois complexos da forma $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

Vejamos que para obter $z_1/z_2 = z_1.z_2^{-1}$, basta multiplicar z_1 por $1/z_2$

$$\mathbf{z_1} / \mathbf{z_2} = (a + bi) \cdot \frac{c-di}{(b^2 + d^2)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(b^2 + d^2)} = \frac{[ac + bd) + (ad - bc)\, i\,]}{(b^2 + d^2)}$$

Exemplos

$(2+3i) / (1-2i) = (2+3i) . 1/(1-2i) = (2+3i) . (1 + 2i)/ 5 = (-4 + 7i) / 5$

Todas as propriedades[1] válidas para os números reais permanecem válidas no conjunto dos complexos.

Desta forma, os complexos também constituem uma estrutura de CORPO, com as operações de + e X.

---

[1] Se você quiser conhecer outras propriedades dos complexos, consulte o texto
Propriedades dos complexos.

Bibliografia:

Números Complexos, uma abordagem científica extraído do site http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/numeroscomplexos.htm#Representação%20Trigonométrica

LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto de, MORGADO, Eduardo César. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM,2001.

ROSA, M. S. **Números Complexos: Uma Abordagem Histórica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_mario_servelli_rosa.pdf