OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Hermano Frid
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

♦ Nível Intermediário.

No texto a seguir fazemos uma breve introdução ao conceito de número irracional. Na sua maior parte o texto será acessível a alunos da última série do primeiro grau. As duas últimas seções talvez requeiram um pouco mais de maturidade embora não exijam nenhum conhecimento prévio adicional. Para simplificar a exposição nos restringiremos a números positivos. A extensão dos fatos abordados ao contexto geral de números positivos, negativos e 0 não requer nenhuma dificuldade adicional.

Pode-se imaginar que a idéia de número inteiro positivo tenha surgido num estágio primário da civilização, juntamente com a necessidade da prática da contagem. Por exemplo, era necessário a um pastor saber contar de algum modo o número de animais no seu rebanho. A maneira de representar o resultado dessa contagem era no início bastante diferente da que usamos agora e é provável que no começo cada pessoa tivesse sua maneira própria de fazê-lo. Contar significa estabelecer um modo de comparar quantidades de elementos de conjuntos distintos. Por exemplo, a quantidade de pedrinhas em um saco com a quantidade de animais num rebanho, ou a quantidade de alimentos conseguidos em uma caçada ou em colheita com a quantidade de membros da tribo. Também não é difícil imaginar que a ideia de fração tenha surgido na evolução da civilização humana, primeiramente e de forma mais elementar, com a ocorrência usual da necessidade de um determinado grupo de pessoas partilhar um ou mais bens de propriedade comum entre seus membros. E num estágio mais avançado, dentre outras motivações possíveis, com a necessidade de as pessoas trocarem entre si bens de tipos distintos. Por exemplo, um pastor deseja trocar com um agricultor peles de carneiro por sacos de milho numa razão de 3 peles de carneiro para cada grupo de 7 sacos de milho. Por outro lado, a idéia de um “número” que não seja nem inteiro nem fração é, em princípio, muito menos natural que a daqueles e surge num estágio muito mais avançado da civilização com a necessidade da prática da medição. Por exemplo, medir as dimensões ou a área de um terreno, comparar as distâncias entre pares de pontos distintos, etc. Procuraremos, a seguir, mostrar as propriedades básicas destes números “estranhos” em contraste com as propriedades, na maior parte já bem conhecidas, daqueles mais intuitivos, os inteiros e as frações.

1. BASE DECIMAL; DÍZIMAS

Os números reais positivos podem ser representados no sistema decimal por uma seqüência de algarismos – elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – Separados por uma vírgula. Assim, se $a_N, a_{N-1}, ..., a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, ...$, são algarismos quaisquer, um número real positivo representado no sistema decimal tem a forma $a_N a_{N-1} a_{N-2} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} ...$, (1)

onde $a_N > 0$. Nessa representação, à esquerda da vírgula temos sempre um número finito de algarismos, porém à direita podemos ter uma infinidade de algarismos. Por exemplo, 783,5231 representa o número obtido como resultado da expressão

$$7\times10^2 + 8\times10^1 + 3\times10^0 + 5\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 3\times10^{-3} + 1\times10^{-4}. \qquad (2)$$

Por outro lado, a fração $\frac{154}{999}$ tem representação decimal 0, 1545454… com uma infinidade de algarismos à direita. Essa representação se traduz como resultado de uma expressão com infinitas parcelas

$$1\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 4\times10^{-3} + 5\times10^{-4} + 4\times10^{-5} + 5\times10^{-6} + ... \qquad (3)$$

Essa expressão significa exatamente que se quisermos aproximar $\frac{154}{999}$ no sistema decimal com “precisão de 8 casas decimais, por exemplo, devemos tomar como aproximação o número 0,15454545 que é resultado da expressão

$$1\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 4\times10^{-3} + 5\times10^{-4} + 4\times10^{-5} + 5\times10^{-6} + 4\times10^{-7} + 5\times10^{-8}. \qquad (4)$$

Claro, o número 0, 1545454… é o que chamamos de uma dízima periódica e por isso pode ser obtido como uma fração $\frac{154}{999}$.

O QUE ACONTECE NO CASO DE UMA DÍZIMA NÃO-PERIÓDICA?

Neste caso, assim como no periódico, temos uma infinidade de algarismos à direita da vírgula e assim só nos é possível escrever a representação decimal até uma certa casa decimal, porém, diferentemente do que acontece no caso periódico, não há repetição indefinidamente de um determinado grupo de algarismos e, assim, o número em questão *não pode ser obtido como uma fração* $\frac{p}{q}$ *com e* e q diferente de 0. Os números que podem ser obtidos como frações são chamados *racionais;* os que não podem ser obtidos como frações são chamados *irracionais*.

2. POR QUE PRECISAMOS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS?

Responderemos esta pregunta através de um exemplo. Euclides provou que o número positivo cujo quadrado é 2, isto é, *o número positivo x que satisfaz a equação*

$$x^2 = 2, \tag{5}$$

não é racional. Euclides argumentou da seguinte forma: Suponhamos que o número x satisfazendo (5) seja racional. Então existem inteiros positivos p e q, primos entre si, tais que $\frac{p^2}{q^2} = 2.$ ou seja $p^2 = 2q^2.$ (6)

Portanto p^2 é par e p também é par; p pode ser escrito na forma $p = 2k$. Assim,

$$(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \cdot \tag{7}$$

Pela mesma razão que acabamos de expor, concluímos que q também deve ser par. Mas isto nos leva a uma contradição pois p e q são primos entre si por hipótese! Assim, a suposição de que $x = \frac{p}{q}$ nos leva a uma contradição e, portanto, deve ser descartada, considerada falsa.

Chegamos à conclusão que $\sqrt{2}$, que é como representamos o número positivo cujo quadrado é 2, é *um número irracional!!*

3. COMO OBTER APROXIMAÇÕES RACIONAIS PARA $\sqrt{2}$

Podemos obter aproximações cada vez melhores de $\sqrt{2}$ (o número x que satisfaz (5)) através do seguinte procedimento que é um caso particular de um esquema inventado por *Newton* conhecido como *método de Newton.* (Com base nesse método podemos programar as máquinas de calcular para produzirem aproximações de $\sqrt{2}$ tão precisas quanto o avanço da eletrônica nos permitir). primeiro "chutamos" um número x_0 como uma primeira aproximação de x que nos pareça razoável; por exemplo, $x_0 = 1.$ Em seguida observamos que

$$x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) \cong 2x_0(x - x_0),$$

onde o símbolo $\cong$ significa "é aproximadamente igual a". Assim,

$$x^2 - x_0^2 \cong 2x_0(x - x_0),$$

e, portanto, dividindo a "equação aproximada" por $2x_0$ e arranjando os termos, obtemos

$$x \cong \frac{x^2 - x_0^2}{2x_0} + x_0. \qquad (8)$$

substituindo $x^2 = 2$ e $x_0 = 1$ em (8), obtemos

$$x \cong \frac{2-1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Assim temos uma segunda aproximação $x_1 = \frac{3}{2}$. Encontramos também x_2 :

$x_2 \cong \frac{2 - \frac{9}{4}}{3} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 \cong -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 \cong \frac{-1}{12} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 \cong \frac{17}{12}$. Da mesma forma, podemos obter uma quarta aproximação x_3, fazendo

$$x_3 = \frac{x^2 - x_2^2}{2x_2} + x_2 = \frac{2-(17/12)^2}{17/6} + \frac{17}{12} = \frac{288-289}{2\times 12\times 17} + \frac{17}{12} = \frac{288-289+2\times 289}{2\times 12\times 17} = \frac{577}{408}.$$

Assim, $x_3 = \frac{577}{408}$ seria a aproximação seguinte: Sua representação decimal é a dízima periódica $x_3 = 1{,}414\underbrace{2156862745098039}_{período}\underbrace{21568627...9}....$

Agora se você pegar uma máquina de calcular e pedir (através dos devidos comandos) que ela calcule $\sqrt{2}$, você obterá, se sua máquina puder exibir 33 dígitos (incluindo a vírgula ou ponto), a expressão decimal

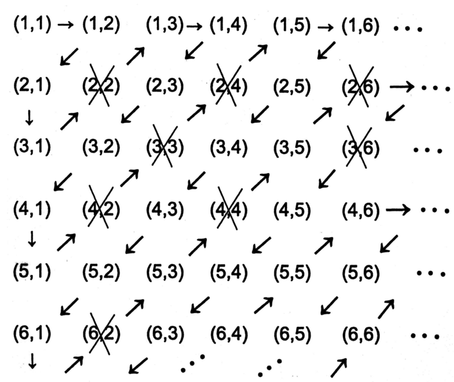
1,4142135623730950488016887242097.

Horrível, não é? Você obterá uma expressão ainda maior se sua máquina puder exibir mais dígitos. Repare como nossas aproximações x_1, x_2 e x_3 estão cada vez mais próximas desse número!

4. OS NÚMEROS RACIONAIS PODEM SER ENUMERADOS

Isto significa que podemos dispor os números racionais numa sucessão da forma $r_1, r_2, r_3, \ldots,$ com uma infinidade de elementos. Podemos interpretar este fato como significando que a quantidade de números racionais, embora sendo infinita, é de uma "ordem de infinitude" equivalente a dos números naturais 1, 2, 3…. O argumento para a demonstração desse fato é devido a *Georg Cantor*.

Como todo racional tem uma representação única como fração $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, basta que saibamos enumerar os pares ordenados (p, q) de naturais primos entre si. A forma de obter essa enumeração está descrita pela figura abaixo:



A enumeração é obtida seguindo-se o caminho indicado pelas flechas, iniciando a partir de (1,1), tendo o cuidado de descartar os pares de naturais que não são primos entre si, como, por exemplo, (2,2), (4,2), (3,3) etc.. Com isso, teríamos

$$r_1 = \frac{1}{1} = 1,\ \ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = \frac{2}{1} = 2,\ r_4 = \frac{3}{1} = 3,\ r_5 = \frac{1}{3}, \text{ etc.}$$

5. REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS RACIONAIS

Há pouco dissemos que não era possível pôr uma dízima não periódica em forma de fração $\frac{p}{q}$ com p e q naturais primos entre si. Vamos dar uma explicação para este fato. Fixemos um natural q. Quando dividimos um número qualquer $N > q$ pelo número q. Obtemos como resto da divisão um elemento do conjunto (finito) $\{0, 1, 2,\ldots, q - 1\}$. Tomemos como exemplo $q = 7$ e $N = 17$; nesse caso os restos possíveis pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Agora vamos recordar o algoritmo da divisão com esse exemplo específico:

17 | 7
14   2,428571428571...
$\boxed{3}$0
28
20
14
60
56
40
35
50
49
10
7
$\boxed{3}$0

O que acontece é que os restos possíveis são elementos do conjunto *finito* de q elementos $\{0, 1,\ldots, q - 1\}$(no exemplo acima $q = 7$). Assim, em no máximo q iterações do algoritmo ou acabamos repetindo um elemento do conjunto de restos possíveis (no exemplo acima o primeiro a se repetir foi o 3), ou o 0 ocorre como resto e o processo termina. No primeiro caso, a partir daí passamos a repetir os restos ocorridos anteriormente na mesma ordem (3, 2, 6, 4, 5, 1, no exemplo acima). As casas decimais no quociente por sua vez também se repetem o obtemos então uma dízima periódica. No segundo caso, obtemos simplesmente um número finito de casas decimais.

6. REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS IRRACIONAIS

Todo número irracional positivo possui uma representação decimal *única* por meio de uma dízima *não periódica*. Para simplificar vamos nos restringir aos números entre 0 e 1. Já sabemos que um número cuja representação decimal possui uma quantidade finita de casas decimais pertence ao conjunto dos racionais. Da mesma forma aprendemos que um número cuja representação decimal é uma dízima periódica é também um número racional. Por outro lado, vimos no item anterior que as representações decimais de um racional são necessariamente de um dos dois tipos: ou possuem uma quantidade finita de casas decimais, ou "terminam" em uma dízima periódica. Logo, uma representação decimal para um número irracional tem necessariamente que ser uma *dízima não-periódica*. Afirmamos que essa representação é *única*. Repare que isso não ocorre em geral com os racionais. Por exemplo, 0, 21 e 0, 20999… representam o mesmo racional $\frac{21}{100}$. Suponhamos que um irracional x entre 0 e 1 possua duas representações decimais distintas:

$$x = 0, a_{-1}a_{-2}a_{-3}..., \quad (10)$$

$$x = 0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}..., \quad (11)$$

Se essas representações são distintas certamente existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_{-k} = b_{-k}$, para $k = 0,..., p-1$, e $a_{-p} \neq b_{-p}$. Para fixar idéias vamos assumir então que $a_{-p} \geq b_{-p} + 1$ e por (10) e (11)

$$x \geq 0, a_{-1}a_{-2}...a_{-p}, \quad (12)$$

$$x \leq 0, a_{-1}a_{-2}...b_{-p}999... = 0, a_{-1}a_{-2}...(b_{-p} + 1), \quad (13)$$

já que $b_{-k} = a_{-k}$ se $k = 0,..., p-1$ e b_{-k} é sempre menor ou igual a 9. Mas (12) e (13) implicam que $a_{-p} = b_{-p} + 1$ e $x = 0, a_{-1}a_{-2}...a_{-p}$.
Porém nesse caso *x* é racional e chegamos a uma contradição! Chegaríamos a uma contradição semelhante também se tivéssemos assumido $b_{-p} > a_{-p}$, argumentando da mesma forma apenas trocando os papéis dos a_{-k} e b_{-k}. A contridição tem origem no fato de termos suposto que havia duas representações decimais distintas para o mesmo irracional *x*. Logo essa possibilidade tem que ser descartada, considerada falsa, e assim concluímos que todo irracional possui uma representação decima única como dízima não-periódica.

7. OS IRRACIONAIS NÃO PODEM SER ENUMERADOS

Isto significa que não podemos dispor os números irracionais numa sucessão $s_1, s_2, s_3,...,$ mesmo admitindo uma infinidade de elementos. Quer dizer, diferentemente dos racionais, a "ordem de infinitude" da quantidade dos números irracionais é maior que a dos números naturais. Concluímos daí que *existem muito mais números irracionais do que racionais!*
Vamos tentar justificar nossa afirmação sobre a não-enumerabilidade dos irracionais. O argumento é uma adaptação de uma idéia também devida a *G. Cantor*. Suponhamos que fosse possível dispor os irracionais numa sucessão $s_1, s_2, s_3,...,$. Basta considerarmos apenas os irracionais entre 0 e 1. Criamos um número irracional *x*, também entre 0 e 1, através de uma representação decimal (portanto, uma dízima não periódica) da seguinte forma. O número *x* tem representação decimal dada por $x = 0, x_{-1}x_{-2}x_{-3}...$ onde x_{-p} é escolhido dentro do conjunto {0, 1, …, 9} de modo que x_{-p} é diferente de $(s_p)_{-p}$ onde este último é o algarismo que aparece na casa decimal de ordem *p* do irracional s_p (*p*-ésima

elemento da sucessão $s_1, s_2, ... s_p, ...$). A escolha de cada x_p também deve atender a condição de não permitir que nenhum grupo de algarismos dentre os já escolhidos $x_{-1}, x_{-2}, ..., x_{-(p-1)}$ possa se tornar o gerador de uma dízima periódica. Desta forma obtemos uma dízima não periódica representando um único irracional que, no entanto, não pode constar na lista $s_1, s_2, s_3, ...,$. De fato, se $x = s_r$, para algum $r \in \mathbb{N}$, então como $x_{-r} \neq (s_r)_{-r}$ teríamos um absurdo (uma contradição)!.

8. ESTUDO SUPLEMENTAR: O IRRACIONAL π

O número π é definido como sendo a área limitada por um círculo de raio 1. Ele é certamente o irracional *transcendente* mais conhecido. A expressão transcendente significa, neste contexto, um número irracional que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Por exemplo, os irracionais $\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}$ não são transcendentes pois são raízes das equações polinomiais $x^2 = 2, x^2 - 2x - 2 = 0,$ respectivamente. Neste último caso dizemos que os números são *algébricos*. A demonstração de que π é um número irracional, apesar de não ser trivial, pode ser feita usando-se apenas o cálculo diferencial elementar que é ensinado no primeiro período dos cursos de ciências exatas. A primeira demonstração de que π é irracional só foi obtida em 1766 por *J. H. Lambert*, de forma não completamente rigorosa, tendo sido finalmente (re)obtida de modo rigoroso pelo famoso matemático *A. M. Legendre* e publicada em 1855. A prova de que π é transcendente é muito mais complexa e só foi obtida em 1882 por *F. Lindermann.*

O fabuloso matemática grego *Arquimedes* foi o primeiro a obter uma aproximação razoável de π por numeros racionais. Ele provou que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

usando dois polígonos regulares de 96 lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo de raio 1.

Podemos obter aproximações cada vez melhores de π, com o auxílio de uma máquina de calcular bastante rudimentar, capaz apenas de fazer as operações básicas (+, –, ·) e mais a operação de extrair raiz quadrada, da seguinte forma. A idéia é aproximarmos o círculo de raio 1 por polígonos regulares de 2^n lados inscritos neste círculo. Primeiramente, é fácil verificar que para a área e o perímetro do polígono regular de 2^n lados inscritos num círculo de raio 1 temos

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\,\text{Perímetro} \times \sqrt{4 - l^2},$$

onde l é o comprimento do lado do polígono. Como l se aproxima mais e mais de 0 a medida que n cresce, vemos que para o círculo de raio 1 devemos ter (fazendo $l = 0$ na fórmula acima)

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\,\text{Perímetro}$$

Assim, podemos também definir π como sendo a metade do perímetro do círculo de raio 1. Por outro lado, usando o teorema de *Pitágoras* que diz que em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, se l_n denota o comprimento do lado do polígono regular de 2^n lados, é fácil mostrar que

$$l_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}. \qquad (14)$$

Para $n = 2$ temos o polígono regular de 4 lados, quadrado, inscrito no círculo de raio 1, cujo lado, facilmente obtido usando-se o teorema de Pitágoras, é

$$l_2 = \sqrt{2}.$$

Por meio de (14) obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
l_3 &= \sqrt{2-\sqrt{2}},\\
l_4 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},\\
l_5 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\\
l_6 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},\\
l_7 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}},\\
l_8 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}},\\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Para obter uma boa aproximação de π calculemos, por exemplo, o valor da metade do perímetro do polígono de $2^8 = 256$ lados, inscrito no círculo de raio 1, cujo lado tem comprimento igual a l_8. Podemos obter um valor aproximado para l_8 executando a seguinte seqüência de operações numa calculadora

2 sqrt + 2 = sqrt + 2 = sqrt + 2 = sqrt
+ 2 = sqrt + 2 = sqrt + / – + 2 = sqrt,

e obtemos

$$l_8 = 0.0245430765714398521588165239020064.$$

Agora, multiplicaremos o resultado obtido para l_8 por 256, que é o número de lados da polígono em questão, e em seguida dividimos por 2 o que nos dá

$$\pi \simeq 3.14151380114430107632851505945682$$

o que fornece uma aproximação com erro menor que 0, 0001 já que é sabido que

$$3,1415 < \pi < 3,1416.$$

Considerações finais: Exceto pelas duas últimas seções, o texto acima foi elaborado a partir de um “pedido” de minha filha, Marina, atualmente na 8a. série do primeiro grau, urgida por um trabalho de casa em grupo passado por sua professora. O referido trabalho, felizmente, resultou bastante diferente do que foi exposto acima, que acabou servindo apenas como uma entre várias referências usadas pelo grupo. No entanto, as 7 primeiras seções foram bem compreendidas por ela e seu grupo; as duas últimas foram escritas depois que o prazo para a entrega do trabalho havia esgotado e, portanto, não chegaram a ser “testadas”. Para concluir gostaria de deixar aqui meus agradecimentos ao estimado professor e colega Elon Lages Lima pelas sugestões sobre uma versão preliminar destas notas.

EXERCÍCIOS:

1) Usando o mesmo argumento de Euclides descrito em **2.** prove que $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ são irracionais.
2) Usando o método de Newton, descrito em 3, obtenha aproximações correspondentes ao x_3 do texto para os irracionais $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ e compare com o resultado fornecido pela máquina de calcular.
3) Pesquise sobre a vida e a obra dos grandes matemáticos mencionados no texto: *Arquimedes, Pitágoras, Euclides, Isaac Newton* e *Georg Cantor*.
4) Prove a fórmula (14).