RADICIAÇÃO, POTENCIAÇÃO, LOGARITMAÇÃO

Potência

POTENCIAÇÃO, RADICIAÇÃO E LOGARITMAÇÂO NOS NÚMEROS REAIS

Potenciação[1]

Neste texto, ao classificarmos diferentes casos de potenciação, vamos sempre supor que a base e o expoente sejam não nulos, pois já vimos que, para $n \neq 0$, $0^n = 0$, $n^0 = 1$ e 0^0 é uma indeterminação.

Caso 1: Expoente inteiro n positivo e (-n) negativo

Condições: x real e n inteiro

$x \neq 0$ e $n > 0$

$x^n = x.x.x...x$, n vezes

$x^{-n} = (x^{-1})^n = (1/x)^n$

Todas as propriedades que já foram demonstradas para bases inteiras ou racionais continuam válidas.

Justificativa para $x^{-1} = 1/x$

Utilizando a propriedade da multiplicação de potências de mesma base, vemos que:

$$x \,.\, x^{-1} = x^{1+(-1)} = x^0 = 1$$

Mas sabemos que $x.1/x = 1$ logo $x^{-1} = 1/x$

[1] Se você quiser relembrar potenciação e resumir este assunto, veja os vídeos:
http://www.youtube.com/watch?v=3y6S_36eW8g&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=90xhMs2pELQ

Exemplos:

$(1/2)^{-1} = 2$

$(2/3)^{-2} = 9/4$

Radiciação

Condições: x real e n inteiro

$x > 0$ e $n > 0$

≈Definição:

$\sqrt[n]{x} = y$ se e só se $y^n = x$

Caso 2: Expoente racional m/n positivo

Condições: x real e m/n racional

$x > 0$ e $m/n > 0$

$$\boldsymbol{x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}}$$

$$x^{-m/n} = 1/x^{m/n}$$

As propriedades já demonstradas continuam válidas e são estendidas para números reais.

Exemplos:

$(2)^{1/3} = \sqrt[3]{2}$ Base racional, expoente racional

$(1/3)^{½} = \sqrt{(1/3)}$ Base racional, expoente racional

$(\sqrt[3]{2})^{1/4} = \sqrt[12]{2}$ Base irracional, expoente racional

$(1/2)^{(-2)} = (2^{-1})^{-2} = 2^{2} = 4$

$(1/2^3)^{(-1/3)} = (½)^{3.(-1/3)} = (1/2)^{-1} = 2$

$(2)^{-1/3} = 1/(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2^2} /2 = \sqrt[3]{4} /2$ Base racional, expoente racional negativo

$(1/3)^{-½} = 1/(\sqrt{1/3}) = \sqrt{3}/3$ Base racional, expoente racional negativo

$(\sqrt[3]{2})^{-1/4} = 1/ \sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{2^{11}} / 2$ Base irracional, expoente racional

Observamos que, neste caso, as potências com base racional e expoente racional podem produzir números irracionais.

Caso 3: Expoente real qualquer.

Condições: base x real e expoente y real

Potência x^y

$x > 0$ e $y \neq 0$

- se x e y são racionais $y = m/n$, repete caso 2
- se x ou y é irracional, define-se a potência x^y como limite de seqüências de números racionais.

Estamos interessados em definir potências cujo expoente é irracional, como por exemplo $2^{\sqrt{2}}$.

Para isto, é preciso lembrar que $\sqrt{2}$ é o limite de uma seqüência de números racionais: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; .....

Define-se $2^{\sqrt{2}}$ como o limite da seqüência de potências com expoente racional: $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; $2^{1,4142}$;...

Este número é irracional e só pode ser expresso como uma aproximação por racionais.

Podemos calcular, por exemplo: $2^{1,41}$

$1,41 = 141/100 = 1 + 41/100$

logo $2^{1,41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}} = 2 \cdot \sqrt[100]{2^{41}}$

É um número irracional, real, positivo e só podemos ter uma aproximação decimal, usando a calculadora: $2^{1,41} \approx 2,65$

Aplica-se o mesmo processo para $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Sabemos que você não conhece a definição formal de “limite de seqüências” .

Neste momento do curso, queremos apenas que você aceite a idéia de que operações sobre irracionais são efetuadas por aproximação porque estamos usando seqüências de racionais que se aproximam do número. O número de casas decimais utilizadas no número racional significa que estamos selecionando elementos mais ou menos próximos, na seqüência que se acumula sobre nosso irracional.

Exemplos:

1. $2^{(-\sqrt{2})}$ é aproximadamente $1/2^{1,41} = 0,38$
2. $(\sqrt{2})^{(-\sqrt{2})}$ é aproximadamente $1/[(1,41)^{1,41}] = 0,62$

Neste tipo de cálculo, usamos a calculadora e aproximações decimais. Nestes exemplos, 2 casas depois da vírgula.

Caso 4: Base real negativa

É preciso investigar o caso das potências com base real negativa.

Já vimos que para bases positivas, racionais ou reais, a potência pode sempre ser definida, para qualquer expoente real não nulo.

O que ocorre com a base negativa?

Não há problemas, se o expoente for inteiro:

$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)$.

Mas com expoente racional, é preciso atenção:

$(-4)^{1/2}$ não é um número real, pois $\sqrt{(-4)}$ não é número real

(todo real elevado ao quadrado resulta em número positivo e (-4) é negativo).

Devido a este fato, todas as definições anteriores indicam a escolha da base como número real positivo.

Contra-exemplos:

$(-2)^{\sqrt{2}}$ não é um número real pois não é definido

$(-3)^{1,5}$ não é um número real pois não é definido

$(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ não é um número real pois não é definido

OPERAÇÕES COM RADICAIS

As operações com radicais ficam mais claras, quando os representamos por potências, com base positiva:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

$\sqrt[p]{x^q} = x^{q/p}$

Multiplicação

1. Radicais com mesma base e expoentes diferentes. Transformam-se em potências de mesma base. Mantém a base e soma os expoentes:

$\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[p]{x^q} = x^{m/n} \; x^{q/p} = x^{m/n + q/p} = x^{(mq + nq)/np}$

Exemplo :

$7\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 7 \cdot 3^{3/2} \cdot 3^{1/3} = 7 \cdot 3^{3/2+1/3} = 7 \cdot 3^{11/6} = 7\sqrt[6]{3^{11}}$

Vale para a divisão

$\sqrt{3^3} / \sqrt[3]{3^2} = 3^{3/2} / 3^{2/3} = 3^{3/2 - 2/3} = 3^{5/6} = \sqrt[6]{3^5}$

2. **Radicais com mesmo expoente e bases diferentes. Transformam-se em potências de mesmo expoente. Multiplica as bases e mantém o expoente.**

$\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[n]{y^m} = x^{m/n} \; y^{m/n} = (xy)^{m/n} = \sqrt[n]{(xy)^m}$

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35}$

Vale para divisão

$\sqrt{5} : \sqrt{7} = \sqrt{(5/7)}$

Veja o exemplo para bases iguais e expoentes também iguais:

Regra 1: $\sqrt[3]{5} . \sqrt[3]{5} = 5^{1/3} . 5^{1/3} = 5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Ou

Regra 2: $\sqrt[3]{5} . \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(5.5)} = \sqrt[3]{5^2}$

Adição e subtração

É impossível aplicar regra semelhante na adição

$\sqrt{5} + \sqrt{7} \neq \sqrt{35}$

$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ diferente de $\sqrt{13}$

Só é possível adicionar e subtrair radicais com bases iguais e expoentes iguais.

$\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

LOGARITMAÇÃO[2]

Dados dois reais a e b, positivos, com a ≠1, define-se o logaritmo de b com base a:

$\text{Log}_a\, b = L$ se e só se $a^L = b$

Exemplos:

$\text{Log}_{10}\, 100 = 2$ pois $10^2 = 100$

[2] Se você quiser relembrar e resumir este assunto, veja os vídeos:
http://www.youtube.com/watch?v=ELy7nXpgYYw&feature=channel
http://www.youtube.com/watch?v=ca18qhF71N8&feature=related

$\text{Log}_2\, 8 = 3$ pois $2^3 = 8$

$\text{Log}_{10} \sqrt{2} \approx 0{,}15$ por aproximação

$\text{Log}_{10} (1/3) \approx -0{,}48$

$\text{Log}_{½}\, 4 = -2$ pois $(1/2)^{(-2)} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

$\text{Log}_{½}\, (1/8) = 3$ pois $(1/2)^3 = 1/8$

$\text{Log}_{10} (-1)$ não corresponde a um número real, pois não existe número real L tal que $10^L = -1$

Como a definição exige que a base seja positiva, não existe número real correspondente a logaritmo negativo.

Procure o **Texto Logaritmos** e estude mais sobre o assunto.

Conseqüência deste estudo, percebe-se a insuficiência do campo dos reais para dar significado a diferentes símbolos:

Existem simbolos formados com números reais, utilizando as operações de potenciação, radiciação e logaritmação que não correspondem a números reais.

Os números reais são insuficientes para dar sentido a símbolos como estes:

1) $(-2)^{\sqrt{2}}$
2) $(-3)^{1,5}$
3) $(-1)^{½}$
4) $\text{Log}_{10} (-1)$

Estes símbolos terão significado no campo dos números complexos.