Propriedades dos números complexos

Dados os seguintes números complexos z = a + bi, w = c + di

- **A parte real de z é a metade da soma de z com seu conjugado**

  Re(z) = (z + $\bar{z}$) / 2

(z + $\bar{z}$)/2 = [(a + bi) + (a - bi)]/2 = [(a + a) + i(b - b)]/2 = (2a + i0)/2 = 2a/2 = a = Re(z)

- **A parte imaginária de z corresponde ao quociente da subtração entre z e seu conjugado e o número 2i.**

  Im(z) = (z - $\bar{z}$) / 2i

(z - $\bar{z}$)/2i = [(a + bi) - (a - bi)]/2i = [(a - a) + i(b + b)]/2i = (0 + 2bi)/2i = 2bi/2i = b = Im(z)

- **A soma de z com seu conjugado é o dobro da parte real de z.**

  z + $\bar{z}$ = 2 Re(z)

z + $\bar{z}$ = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + i(b - b) = 2a + i0 = 2a = 2Re(z)

- **O conjugado do conjugado de z é ele mesmo**

O conjugado de z = a + bi é $\bar{z}$ =a - bi.
O conjugado de $\bar{z}$ = a - bi será z = a + bi, ou seja, z.

- **O conjugado da soma é a soma dos conjugados**

  $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

  $\overline{z+w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (bi + di)} =$

$(a + c) - (b + d) i = (a- bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$

- **O conjugado do produto é o produto dos conjugado**

$\overline{z.w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} =$

$(ac - bd) - i(ad+ bc) = = (a - bi)(c - di) = \bar{z} . \bar{w}$

- **O módulo do quadrado de z é o quadrado do módulo de z**

$|z^2| = |z|^2$

$|z^2| = |(a + bi)^2| = |(a^2 - b^2) + i(2ab)| = = \sqrt{[} (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2] =$

$\sqrt{[}(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2] = \sqrt{(}a^2 + b^2)^2 = a^2 + b^2 = [\sqrt{(}a^2 + b^2)]^2 = \mathbf{|z|^2}$

- **O produto de z por seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z**

$z . \bar{z} = |z|^2$

$z . \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + i(-ab + ba) = (a^2 + b^2) + i0 = a^2 + b^2 = \mathbf{|z|^2}$

- **O inverso de z é igual ao quociente do conjugado pelo quadrado do módulo de z**

$z^{-1} = \bar{z} / |z|^2$

$z^{-1} = (a - bi)/(a^2 + b^2) = (a - bi)/[\sqrt{(}a^2 + b^2)]^2 = z/ |z|^2$

- **O módulo do produto é o produto dos módulos**

$|z . w| = |z| .|w|$

$|z . w| = |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + i(ad + bc)| = ([\sqrt{a}c - bd)^2 + (ad + bc)^2] =$

$([\sqrt{a}c)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2adbc + (bc)^2] = ([\sqrt{a}c)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2] =$

$([\sqrt{}a^2 + b^2)(c^2 + d^2)] = (\sqrt{}a^2 + b^2)(\sqrt{}c^2 + d^2) = |a + bi|.|c + di| = |z|.|w|$