UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ENSINO DE FUNÇÕES E DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Acadêmico Igor G. Cunha

Acadêmica Priscila Moraes

Orientadora Prof. Dra. Vera Clotilde Garcia

Porto Alegre

2008

Acadêmico Igor G. Cunha

Acadêmica Priscila Moraes

O ENSINO DE FUNÇÕES E DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Trabalho para conclusão da disciplina de Pesquisa em Educação Matemática, apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina, oferecida no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof. Dra. Vera Clotilde Garcia

Porto Alegre

2008

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é estudar funções e sua relação com as transformações geométricas euclidianas no plano, transformações que preservam a linha reta, os ângulos e as proporções das medidas das figuras: reflexão, simetria, homotetia, translação e rotação. Queremos com este trabalho ampliar os significados de função, produzidos pelos professores na sua formação e transmitidos no ensino médio. É desejável que os alunos percebam que existem funções com domínios não numéricos (pontos do plano) e sem representação analítica da forma y = f(x), com x real. Para tanto faremos uma introdução aos conceitos de transformações geométricas euclidianas, utilizando o software GeoGebra, que reúne elementos do cálculo, da álgebra e da geometria.

Propõe-se com esta pesquisa que o conceito de função como uma relação especial entre conjuntos não necessariamente numéricos adquira maior relevância e significado, na medida do estudo das transformações geométricas como exemplos de função. A pesquisa analisa resultados obtidos a partir da aplicação de atividades propostas em uma turma de graduação, cursando o 5° semestre, do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. A análise dos resultados obtidos mostrou que é possível, em pouco tempo, desenvolver o estudo desejado e que os conceitos trabalhados podem contribuir para uma ampliação das experiências dos estudantes e da sua compreensão do campo conceitual no que se refere às funções de domínio não numérico.

Palavras-chave: funções de domínio não-numérico, transformações geométricas.

ABSTRACT

This research intends to study the functions and the relation of those with the geometrical transformations in a plan (symmetry, homothecy, translation and rotation). The meanings of functions, produced by teachers, can be maximized, while they work with a class of functions, the geometrical Euclidian transformations, with non-numerical domains and non-analytical form based, like y = f(x) being x a real number. The work uses the GeoGebra software, which includes calculation, algebra and geometry elements, were applied on the research.

The practical use, within a pre-service course of math students, of the functions with non-numerical domains and the geometric transformations is comprised. The research analyses the results of an experience within a graduation class. The results analysis proved the premise is true and the comprised concepts are useful to upgrade the experiences and enhance the comprehension of the conceptual field of the functions with non-numerical domains.

Key words: functions with non-numerical domains, geometric transformations.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 6

2. Questão Norteadora 9

3. Metodologia 10

4. ANÁLISES PRÉVIAS

4.1.Nível Epistemológico 11

4.2.Nível Didático 13

4.3.Nível Cognitivo 17

4.4.Constrangimentos 18

5. Concepções e análises *a priori*

5.1.Bases teóricas das escolhas globais 20

5.2.A proposta didática 21

6. Plano de atividades para os tópicos função e transformações geométricas 23

6.1.Introdução 23

6.2.Atividade lúdica inicial 24

6.3.Início das atividades 25

6.4. Comentários sobre a experiência 51

6.5.Principais perguntas e dificuldades 53

6.6.Comentários gerais dos alunos 57

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS 58

8. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 62

INTRODUÇÃO

Ao cursarmos a disciplina Educação matemática e Tecnologia, no 6° semestre do Curso Matemática-Licenciatura, nos deparamos com uma questão: Como criar uma proposta de atividade de um conteúdo de matemática usando softwares educativos? Para responder a esta questão, concentramos os estudos no software Graphmática. Realizamos então, um trabalho visando o aluno e os benefícios que ele obteria utilizando-se deste software para estudar funções. Esta experiência foi significativa, uma vez que atuamos como professores e como aprendizes, partindo dos questionamentos que tínhamos e, que ainda aparecem nos nossos alunos hoje, a respeito do conteúdo para elaborar as atividades.

A disciplina Pesquisa em Educação Matemática colocou outra questão: escolha um tema de matemática e um grupo de alunos, investigue o ensino usual deste tema, para este grupo, e que já foi feito no sentido de melhorar as práticas; desenvolva uma seqüência de ensino para propor algo novo. Partindo da experiência acima descrita, num primeiro momento, escolhemos o ensino de funções com o uso de softwares: uma abordagem educativa utilizando o Graphmática para o ensino de funções. Porém, nos deparamos com uma questão significativa ao analisarmos as pesquisas feitas a respeito do tema que havíamos escolhido. A grande maioria dos textos encontrados trata do ensino de funções com domínio numérico, como se todas as funções tivessem domínio real. Por este motivo sentimos necessidade de ampliar os significados atribuídos a função, reforçando a definição correta e mais geral: função é uma relação qualquer, arbitrária, entre dois conjuntos quaisquer, não necessariamente numéricos, que obedece a uma única condição, a condição de univocidade, para cada elemento do conjunto de partida existe um e só um elemento do conjunto de chegada. Nesta linha, decidimos desenvolver um trabalho com transformações geométricas euclidianas, envolvendo alunos da Licenciatura, para demonstrar que elas são exemplos de funções. Estaremos assim, estabelecendo um elo entre Álgebra, Cálculo e Geometria, disciplinas do Curso que em geral não se comunicam.

O problema gerador deste trabalho é, justamente, a escassez de materiais encontrados sobre o tema, além da dificuldade que muitos alunos encontram quando estudam funções. Além disso, a geometria das transformações pressupõe conhecimentos prévios da geometria tradicional, tais como congruência e semelhança e têm as transformações como objetos de estudo e não ferramentas.

Destacamos que os PCN (Brasil, ano 2006) sugerem que o aluno do ensino médio , no que se refere às transformações, deveria poder identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis (que podem não ser numéricas) e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. Deve ainda, perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem.

Justifica-se o uso do software, pois acreditamos que educar é colaborar para que professores e alunos transformem suas vidas em processos permanentes de aprendizagem. Esperamos possibilitar aos alunos que estabeleçam seus próprios espaços, sejam pessoais sejam profissionais, através da comunicação, troca de opiniões, construindo novos conhecimentos.

Desta perspectiva, percebemos a importância de repensar a educação hoje, mudar antigos métodos para que estes novos conhecimentos possam ser estabelecidos. A presença da tecnologia em nossas vidas é constante, temos computadores, softwares, internet, celular, câmeras digitais, players... os alunos têm tido contato com estes recursos cada vez mais cedo. Por este motivo, não há como deixá-los de lado. É preciso que os professores integrem tecnologias na educação. Cada docente pode encontrar sua forma mais adequada de integrar diferentes recursos e procedimentos metodológicos.

Os softwares representam um ramo muito significativo da tecnologia, uma vez que podem tornar as aulas mais interativas. Neste contexto, os alunos se sentem mais à vontade com os conteúdos que estão sendo trabalhados, e não são mais somente receptores, são agentes do seu próprio conhecimento, manipulando os softwares, investigando as atividades, trabalhando no seu ritmo. Aqui, é interessante ressaltar a idéia da comunicação e interação entre os alunos, uma vez que em um ambiente informatizado eles têm maior liberdade para conversar e trocar idéias sobre a atividade em questão.

Falando mais especificamente do software e do conteúdo que serão abordados no trabalho, percebemos função é um conceito amplo e articulador das diferentes áreas da Matemática; é muito mais do que uma "fórmula" e um gráfico e que o trabalho com o GeoGebra permite estabelecer estas conexões. É claro que o software sozinho não é suficiente para a aprendizagem. São fundamentais tanto o papel do professor como o produtor da seqüência de ensino e como orientador do trabalho quanto sua interação com o aluno.

Por este motivo é imprescindível, para a nossa formação como professores, que estejamos aptos a explorar os softwares de modo que professor e aluno unam-se para a construção de um objetivo. O software entra como apoio ao aluno em sua aprendizagem.

QUESTÃO NORTEADORA

O objetivo maior deste trabalho é ampliar o significado usual dado para funções: relações entre conjuntos numéricos, toda função é real de variável real, toda função tem uma fórmula y=f(x) e um gráfico no plano cartesiano XOY.

A questão norteadora é: introduzir os conceitos das transformações geométricas euclidianas no plano e identificar seus efeitos sobre figuras do plano, pode contribuir para ampliar este significado, levando o aluno a perceber função como uma relação qualquer ente conjuntos quaisquer, cuja única condição é ser unívoca?

Para tanto faremos uso do software GeoGebra. Este um software de matemática foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg e reúne num só programa geometria, álgebra e cálculo. É um sistema dinâmico de geometria onde se podem fazer construções de pontos, vetores, segmentos, retas, circunferências, transportar distâncias, tirar paralelas e perpendiculares e construir gráficos. As construções geométricas virtuais produzidas com o GeoGebra não ficam estáticas: elas podem ser movimentadas. Os pontos geométricos iniciais de uma construção podem ser arrastados com o mouse sem destruir as relações matemáticas que vigoram entre eles e os demais objetos. Além disso, possui dois ambientes: uma janela de geometria e outra de álgebra. Uma expressão na janela de álgebra corresponde a um objeto na janela de geometria e vice-versa.

Utilizando este software queremos trabalhar a questão norteadora da pesquisa, estudando as transformações geométricas e desenvolvendo a percepção de que toda transformação geométrica euclidiana é uma função, cujo domínio não é numérico. Mais do que isto, os alunos terão oportunidade de estabelecer relações entre Álgebra, Cálculo e Geometria.

METODOLOGIA

O termo Engenharia Didática (Artigue, 1994, 1996), criado na área de Didática das Matemáticas, da França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia, momentos em que é preciso construir soluções.

A engenharia didática se caracteriza como uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas desenvolvidas no contexto de sala de aula.

Para Carneiro (2005), a aplicação dos princípios da Engenharia Didática permite articular prática docente com reflexão e espírito de investigação. É o professor produzindo conhecimento novo e analisando a própria prática.A Engenharia Didática pode ser descrita como um esquema sobre concepção, realização, observação e análise de uma seqüência de ensino. No trabalho com a engenharia didática o professor faz da sua ação pedagógica um objeto de investigação, através do qual estabelece uma dependência entre saber teórico e saber prático na busca da construção do conhecimento. Por este motivo, a teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos de ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; 3) implementação da experiência; 4) análise a posteriori e validação da experiência.

ANÁLISES PRÉVIAS

Nível Epistemológico

As funções de uma variável real representam um papel fundamental nos temas abordados no Ensino Fundamental e Médio dentro da disciplina de Matemática. Ao observar várias situações cotidianas percebe-se também sua aplicabilidade direta para resolver vários problemas que nos cercam.

Fazendo uma análise histórica, Euler (1707-1783), contribuiu muito no que diz respeito às notações; em particular, a expressão f(x) para uma função de x Ele define função de uma quantidade real como qualquer expressão analítica formada de uma quantidade variável e de números ou quantidades constantes. Esta definição mostrou-se limitada e foi abandonada.

Outro matemático que definiu função foi Lejeune Dirichlet, que, em 1837, sugeriu uma definição muito ampla de função. Segundo Dirichlet, se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então se diz que y é função da variável independente x. Observamos que essa definição de função é muito semelhante ao que encontramos na maioria dos livros didáticos.

A principal e destacada diferença entre as definições de Euler e Dirichlet é que, na primeira a função é uma equação e na segunda é uma regra qualquer. Mas, ambas restringem x e y a números reais. Ambas são limitadas e foram substituídas por uma ainda mais geral.

No século XX, um grupo de jovens matemáticos franceses fundou, em 1935, a Associação Bourbaki, a fim de organizar toda a matemática conhecida, publicaram em

1939, o primeiro livro da coleção Théorie des ensembles (fascicule de résultats), que contém todas as definições e todos os principais resultados. Nele encontra-se a moderna definição de função:

Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja x pertencente a E, existe um elemento y pertencente a F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.

Na definição de Bourbaki, x e y são quaisquer e não se restringem a números reais; porém, apesar de ser a definição mais moderna e mais geral ela não é trabalhada nas escolas.

Nível Didático

Durante a revisão bibliográfica percebemos que existe uma grande quantidade de materiais voltados para o uso de softwares na educação matemática, como Paques et al (2002) ; e Santanché (2001); Lima (2006); Fernandes (2006);

Encontramos também muitas pesquisas referentes ao ensino de funções exclusivamente, e o ensino de funções mediado por tecnologias, por exemplo: Haetinger, e Mariani (2006); Lima e Magina (2006); Santos, Almeida e Silva (2007); Berleze (2007); Afonso et al (2006); Rezende (2007).

Analisando as pesquisas encontradas, concluímos que os autores destacam a importância do uso de tecnologias na educação e enfocam o ensino de funções reais de domínio real.

Por termos encontrado muitas pesquisas e artigos com o tema que havíamos escolhido: "Ensino de funções reais de variável real através de softwares", concluímos que seria interessante e enriquecedor trabalharmos com o ramo das funções cujo domínio e imagem têm mais de uma dimensão. Para isso, faremos uso das transformações geométricas com o auxílio do software GeoGebra. Vamos salientar que as transformações geométricas são funções cujo domínio e imagem não são conjuntos de números reais, mas sim pontos do plano, que podem ser expressos por pares de coordenadas.

Este enfoque foi justificado ao estudarmos a história da evolução do conceito de função.

A importância deste novo foco está, justamente, na falta de materiais encontrados sobre o assunto e de sua relevância durante o processo de aprendizagem do aluno, uma vez que amplia o conceito de função. Neste aspecto, encontramos o artigo de Zuffi e Pacca

(2000, 2002) em que são apresentados resultados obtidos com a observação da prática pedagógica de três professores de Matemática do Ensino Médio, ao usarem a linguagem matemática no ensino de funções. Esta pesquisa constata que a linguagem utilizada pelos professores de Matemática, em sala de aula, está mais próxima daquela que eles próprios experimentaram quando alunos do nível escolar médio, do que dos significados que se pretendiam atingir em seus cursos de Licenciatura. Uma questão importante que surgiu a partir do trabalho com os professores foi que os modelos que predominaram, ao ensinarem funções, estavam mais próximos do conceito de EULER para função. Ou seja, expressão algébrica em conjuntos numéricos com números inteiros. Além disso, destacam que casos com funções descontínuas, além de oferecerem dificuldades de tratamento e de compreensão, por parte dos alunos, não foram apresentadas pelos professores participantes. Todos os modelos que surgiram tratavam-se de expressões analíticas simples.

A ênfase dos professores foi atribuir valores específicos para a variável independente e calcular a imagem, e, posteriormente, partir para o gráfico. Portanto, evidencia-se que os professores não exploraram casos mais gerais de funções definidas em conjuntos que não o conjunto dos números reais ou em conjuntos não numéricos.

Deste modo, embora a definição proposta inicialmente para os alunos fosse ampla (usavam a definição de função como relação entre conjuntos), acabava sendo substituída por exemplos considerados mais relevantes, ou seja, numéricos, pelo ponto de vista dos professores, mas que não atingiam as várias possibilidades da definição geral de função.

Ao fazerem uso da linguagem matemática, idéias inerentes ao conceito de função não ficavam devidamente explicitadas nas expressões utilizadas pelos professores. Não tratavam das noções de correspondência, das propriedades que caracterizam particularidades na relação funcional, para que esta seja considerada função; não investigavam domínio, contradomínio e imagem; nem observavam "leis" ou "regras" como executantes de transformações globais entre dois conjuntos – os quais poderiam ser, inclusive, não-numéricos, a infinidade de pares que estão representados através de gráficos ou de uma expressão algébrica de função. As pesquisadoras destacam ainda que não se deve atribuir exclusivamente aos professores a "culpa" por eventuais falhas conceituais na aprendizagem, pois, existe grande possibilidade de que os seus professores universitários, por sua vez, também possam ter tido uma formação deficiente nesse sentido.

Nível Cognitivo

Analisando o conceito histórico de função, percebemos que, pouco se fala a respeito de funções cujo domínio não seja numérico. O que consta nos livros didáticos é o conceito, ao qual estamos acostumados a pensar, de função real de variável real. Por este motivo, fica difícil avaliar quais seriam as dificuldades encontradas pelos alunos ao trabalharem funções através das transformações geométricas, uma vez que este conteúdo não aparece no currículo escolar. Porém, acreditamos que algumas dificuldades seriam semelhantes às encontradas quando se ensina funções na escola, por exemplo, a dificuldade dos alunos em conceituar funções. Muitos associam este conceito a equações com elementos desconhecidos que devem ser calculados. Poucos alunos têm certeza de quais são as variáveis dependentes e independentes envolvidas.

Acreditamos que, com este trabalho mostrar que, no caso das funções, o professor pode propor um novo caminho para o ensino, no nível médio, norteado pelos objetivos de: 1) ampliar os significados de função de tal modo que os alunos percebam que existem funções com domínios não numéricos (pontos do plano) e sem representação analítica da forma $y = f(x)$ com x real; 2) introduzir no nível médio o ensino das transformações geométricas; 3) evidenciar que uma transformação geométrica plana é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos.

Constrangimentos

A Engenharia Didática enquanto referencial para pesquisa permite ao professor revisar e melhorar as soluções intuitivas que ele poderia dar para certo problema de ensino. Neste caso, estamos insatisfeitos com o modo usual como o conceito de função tem sido tratado na escola (e na Universidade).

Ao seguir os passos da Engenharia Didática como referencial, analisamos o problema, buscando variáveis que influem no ensino, analisando-as, relacionando-as para enfim propor um plano de ensino, que será experimentado com cuidado, com observações e documentação. Na análise final, ele poderá ser modificado e aprimorado e, finalmente, colocado à disposição dos professores, pois muitos dentre eles, estão com o mesmo problema.

Na análise epistemológica, estudamos a evolução histórica do conteúdo e detectamos os obstáculos históricos que fazem parte desta evolução. Por exemplo, no caso das funções fica claro que o conceito: evoluiu historicamente desde uma concepção vinculada a expressões analíticas e domínios numéricos até uma relação unívoca qualquer entre dois conjuntos; está extremamente relacionado com o crescimento do Cálculo Diferencial e Integral, o que reforça esta visão numérica; está relacionado com modelagem matemática aplicada às outras ciências, que também buscam expressões analíticas que permitam a compreensão dos fenômenos. Esta forte vinculação entre função e expressão analítica foi, na história, um obstáculo para a evolução do nível de abstração do conceito. Apenas no século XIX o conceito se tornou mais genérico, definindo função como uma relação unívoca entre dois conjuntos quaisquer. Esta definição inclui, por exemplo, as transformações geométricas, aproximando as funções da geometria.

Na análise didática, detectamos as características do ensino usual em livros didáticos. E também detectamos novas diretrizes e tendências expressas em dissertações de

Mestrado, teses de Doutorado, artigos de revistas especializadas e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, Brasil, 2006) a respeito do ensino de matemática. Por exemplo, no caso das funções, descobre-se que o ensino usual enfatiza duas concepções: relações entre conjuntos numéricos ou relações entre variáveis. Nos dois casos, privilegia expressões analíticas e gráficas. A produção recente na área de Educação/Ensino de Matemática e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) consideram que os conteúdos relacionados às funções deveriam ser ensinados para desenvolver a compreensão dos fenômenos das outras ciências e do cotidiano, apontando para a busca de relações entre variáveis e suas representações algébricas e gráficas. Nessa perspectiva, inúmeros trabalhos recentes sugerem o uso de softwares gráficos. Os PCN não dão ênfase às transformações geométricas e o ensino deste conteúdo, quando feito, é de forma muito intuitiva e lúdica, no nível fundamental.

Na análise cognitiva, a idéia é entender as dificuldades do aluno para aprender o tema em pauta. No caso das funções, os estudos nesta direção tratam das dificuldades relativas ao estudo das variáveis e suas representações, sem focar as transformações geométricas e outros exemplos não numéricos.

A partir destes estudos propomos um novo caminho para o ensino norteado pelos objetivos de: ampliar os significados de função de tal modo que os alunos percebam que existem funções com domínios não numéricos (pontos do plano) e sem representação analítica da forma $y = f(x)$ com x real; introduzir no nível médio o ensino das transformações geométricas; evidenciar que uma transformação geométrica plana é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos. A proposta pode: iniciar com a utilização do software GeoGebra para um primeiro contato com as transformações geométricas planas, a nomenclatura, e seus efeitos sobre uma figura geométrica plana dada; continuar com a análise de cada transformação no plano coordenado, observando seus efeitos sobre os vértices da figura e por fim vincular relações entre as coordenadas do plano (x,y) com funções e com transformações.

CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Base teórica das escolhas globais

A teoria que escolhemos para justificar nosso trabalho é a teoria das "situações didáticas" de Brousseau que se refere ao ensino e aprendizagem de matemática de forma mais contextualizada. O conteúdo é apresentado ao aluno de modo mais significativo, uma vez que, quando trabalhado isoladamente, ele perde o real valor didático.

Situação didática se refere a um conjunto de relações entre alunos, um meio e um sistema educacional representado pelo professor, com o objetivo de que os alunos adquiram um conhecimento determinado. Além disso, a teoria reconhece e defende a existência de alguns momentos em que os alunos realizam tarefas e organizam conhecimentos independentemente da orientação do professor. A essa situação o autor chama de adidática, quando o professor tem o interesse de que os alunos aprendam, mas ela se diferencia da situação didática porque o aluno se relaciona com o problema a partir de seus conhecimentos de maneira motivada, sem a intervenção direta do professor.

A escolha desta teoria, para dar suporte ao nosso trabalho, se deve ao fato de que acreditamos que quando se trata do uso de tecnologias na educação, a motivação do aluno e o surgimento das situações adidáticas, são imprescindíveis para o aprendizado do aluno. O uso do software aliado às transformações geométricas no ensino de funções vai ao encontro da idéia do ensino mais contextualizado, de forma a promover o interesse espontâneo dos alunos.

A proposta didática

Refletindo sobre os estudos realizados, tomamos as seguintes decisões didáticas, para orientar nossa proposta. A idéia básica consiste em recorrer à(s):

A) Noção intuitiva das transformações geométricas, associadas a movimentos de figuras, no plano. Disponível no site:

   http://www.bbc.co.uk/schools/ks2bitesize/maths/activities/transformation.shtml

B) Definições formais das transformações geométricas euclidianas planas;

C) Aplicações das definições em problemas simples, utilizando o software GoeGebra

D) Aplicações de outras funções planas, utilizando o software, que não são transformações geométricas euclidianas;

E) Dirigir e experimentar a proposta com alunos do Curso de Licenciatura da UFRGS

Antes de aplicar as proposta, formulamos as seguintes hipóteses:

1) O trabalho tem potencial para fazer surgir, entre os alunos da Licenciatura, relações entre as disciplinas de Cálculo, Álgebra e Geometria;

2) O trabalho tem potencial para ampliar os significados atribuídos à noção de função;

3) O trabalho valoriza as definições formais e favorece, nos alunos, a necessidade da leitura cuidadosa da teoria para obter compreensão e sucesso na prática;

4) O trabalho traz para os alunos da Licenciatura a formalização e exploração de um conteúdo novo, não tratado no Curso.

Esta proposta foi inspirada pelo trabalho de Carneiro, Soares e Fronza (2005).

PLANO DE ATIVIDADES PARA OS TÓPICOS

FUNÇÃO E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

INTRODUÇÃO

Nosso trabalho propõe um enfoque diferente, no ensino de funções, daquele que é usualmente enfatizado. Nossa proposta consiste em tratar funções como transformações no plano, ou seja, funções que transformam figuras ou regiões em outras, causando alteração.

As atividades partem das transformações geométricas euclidianas, transformações que preservam linhas retas, ângulos, paralelismo e perpendicularismo e a proporção entre as medidas da figura inicial e de sua transformação.

Definem-se transformações geométricas como *"funções que associam a cada ponto do plano outro ponto, também do plano através de certas regras,... Se F é uma figura (portanto um conjunto de pontos) definiremos F´= T(F) como o conjunto dos pontos imagem dos pontos de F (pela transformação T)"* (WAGNER,1993, p.70)

As transformações geométricas da Geometria Euclidiana são: a reflexão, a simetria, a homotetia, a translação e a rotação.

ATIVIDADE LÚDICA INICIAL

Conheça as transformações geométricas da Geometria Euclidiana, fazendo atividades do site abaixo:

http://www.bbc.co.uk/schools/ks2bitesize/maths/activities/transformation.shtml

Na primeira atividade você deve tentar refletir a casa para que ela cubra sua sombra, para isso, escolha uma linha de reflexão, posicione-a e clique em “reflect” (refletir).

Na segunda atividade, você deve girar a casa sobre o ponto azul para que ela cubra a sombra. Escolha um ângulo e uma direção e clique no botão”rotate” (rodar).

Na terceira atividade, você deve transladar a casa, para que ela cubra a sua sombra. Utilize as setas vermelhas para escolher números e direções e clique em “translate” (transladar).

ATIVIDADE 01

REFLEXÃO

“*Seja R uma reta no plano π. A reflexão em torno do eixo R é a transformação $\rho : \pi \rightarrow \pi$, que associa a cada ponto X do plano o ponto X’ tal que R é a mediatriz do segmento XX’.***”** (LIMA, 2001)

Para a realização dos desenhos, utilize-se do software GeoGebra. Para todas as questões, identifique quais são as novas coordenadas dos vértices do quadrado A e complete as tabelas.

1) Dado o quadrado A de lado 1, com vértice na origem, encontre sua imagem através da reflexão do quadrado A em relação ao eixo das ordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

2) Considere o mesmo quadrado A, trace a reta y = 2 e encontre a imagem do quadrado A através da reflexão em relação à reta traçada.

(x,y)				

Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

3) Desta vez, trace a reta y = - 2 e encontre a imagem do quadrado A através da reflexão em relação à reta traçada.

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

4) Faça a reflexão do quadrado A em relação ao eixo das abscissas e encontre a imagem.

(x,y) Vértices quadrado domínio				

F(x,y) Vértices quadrado imagem				

5) Em cada tabela, compare as novas coordenadas com as antigas. Encontre uma expressão algébrica para as transformações que você observou acima.

ATIVIDADE 02

SIMETRIA

"A simetria em torno do ponto O é a transformação φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\varphi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX'." (LIMA, 2001)

1) Dado um quadrado A de lado 1, encontre a imagem de sua reflexão em relação ao ponto A=(0,0).

2) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

3) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

ATIVIDADE 03

HOMOTETIA

"Fixado um ponto O no plano π e dado um número real $k > 0$, a homotetia de centro O e razão k é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = H_{o,k}(A)$ tal que $OA' = k. AO$." (WAGNER, 1993)

OBS: Vamos considerar k>0 para não precisar referir noções de orientação nesta definição.

1) Dado um quadrado A de lado 1, encontre sua imagem através da homotetia com centro em A=(0,0) e fator 2.

2) Faça o mesmo procedimento anterior; porém, utilize fator 3.

3) Repita o procedimento descrito em (1); porém, utilize como centro o seu ponto B.

4) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas, em cada caso.

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

5) Encontre uma expressão algébrica que traduza as transformações que você observou.

ATIVIDADE 04

TRANSLAÇÃO

"Seja AB um segmento orientado, no plano π ou no espaço E. (Orientado significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A, e depois B.) A translação determinada por AB é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau : \pi \rightarrow \pi$, ou $\tau : E \rightarrow E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (AB, XX') e (AX, BX') sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo".(LIMA, 2001)

1) Dado um quadrado A de lado 1, agora, construa o vetor de coordenadas u= (2,3), encontre a imagem do quadrado A através da translação em relação ao vetor u.

2) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado imagem				

3) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

ATIVIDADE 05

ROTAÇÂO

"*Fixemos um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α, a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto A' = R_α(A) de forma que se tenha A'O = AO, AôA' = α e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo*". (WAGNER, 1993)

Dado um quadrado A de lado 1, como na figura abaixo, determine a imagem do quadrado A em relação à rotação, no sentido anti-horário, com centro em A=(0,0) e ângulo de 90º.

1) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio				
F(x,y) Vértices quadrado				

imagem				

2) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

3) Repita os procedimentos descritos acima; porém, utilize como centro o seu ponto B e ângulo de rotação de 45º no sentido anti-horário.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

1) Complete a tabela abaixo, encontrando as imagens dos vértices do quadrado dado dados sob efeito das transformações.

Vértices	Função	Novos vértices
(0,0); (0,1);(1,0),(1,1)	f(x,y) = (2x,3y)	
(2,1),(2,3),(0,3),(0,1)	f(x,y) = (x,2y)	
(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)	f(x,y) = (3x,y)	

2) Desenhe, com o software GeoGebra, os quadriláteros iniciais e finais.

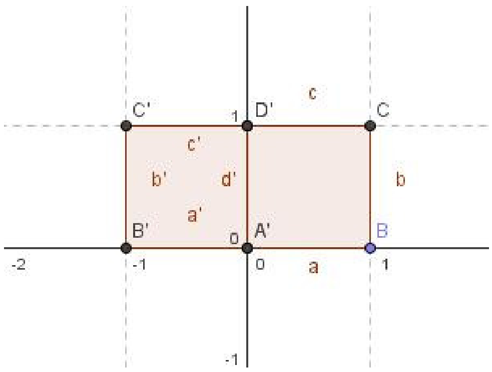
3) Observe as deformações que você encontrou no item anterior e conclua que nem toda função é uma transformação geométrica.

AS RESPOSTAS: CADERNO DE UM ALUNO

CADERNO DE QUESTÕES 1

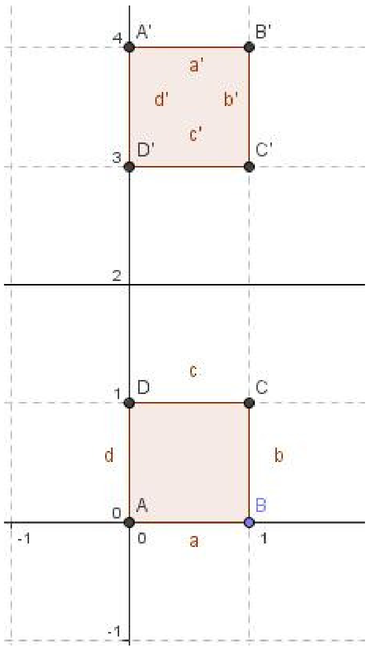
1) Dado o quadrado A de lado 1, com vértice na origem, encontre sua imagem através da reflexão do quadrado A em relação ao eixo das ordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0, 0)	(0, 1)	(-1, 1)	(-1, 0)



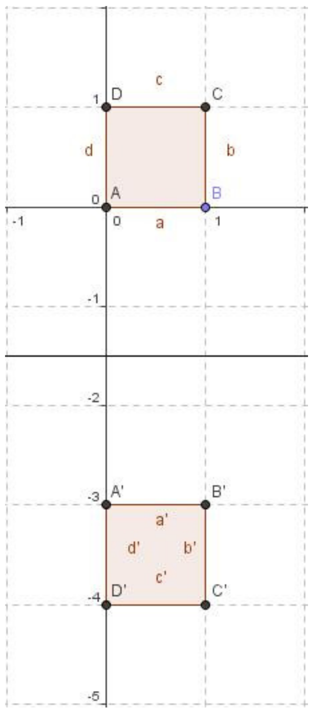
2) Considere o mesmo quadrado A, trace a reta y = 2 e encontre a imagem do quadrado A através da reflexão em relação à reta traçada.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0, 4)	(0, 3)	(1, 4)	(1, 3)



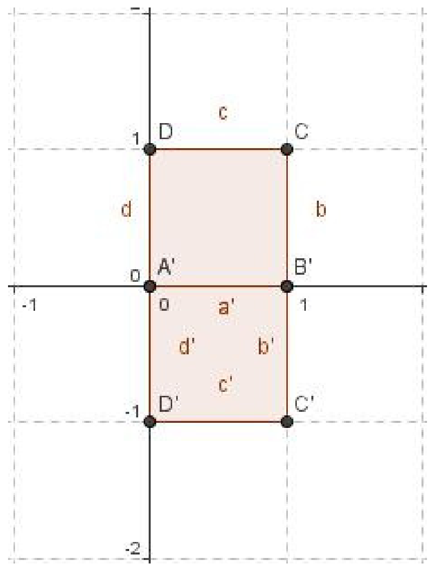
3) Desta vez, trace a reta y = - 2 e encontre a imagem do quadrado A através da reflexão em relação à reta traçada.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,-3)	(0,-4)	(1,-3)	(1,-4)



4) Faça a reflexão do quadrado A em relação ao eixo das abscissas e encontre a imagem.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,0)	(0,-1)	(1,0)	(1,-1)



5) Em cada tabela, compare as novas coordenadas com às antigas. Encontre uma expressão algébrica para as transformações que você observou acima.

1) $f(x,y)=(x,y)$ $g(x,y)=(-x,y)$

2) $f(x,y)=(x,y)$ $g(x,y)=(x,-y+4)$

3) $f(x,y)=(x,y)$ $g(x,y)=(x,-y+3)$

4) $f(x,y)=(x,y)$ $g(x,y)=(x,-y)$

ATIVIDADE 02

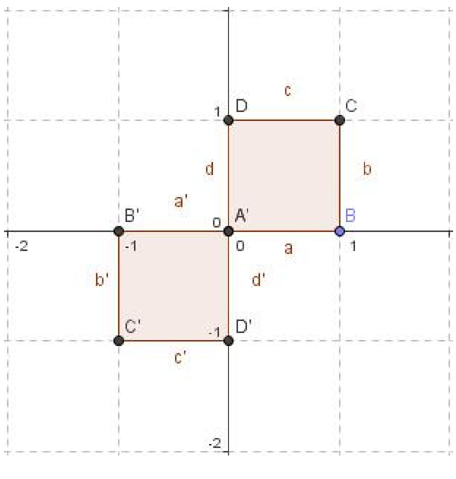
SIMETRIA

"A *simetria* em torno do ponto O é a transformação φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\varphi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX'."

1) Dado um quadrado A de lado 1, encontre a imagem de sua reflexão em relação ao ponto A=(0,0).

2) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,0)	(0,-1)	(-1,0)	(-1,-1)



3) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

$f(x,y) = (x,y)$ $g(x,y) = (-x,-y)$

ATIVIDADE 03

HOMOTETIA

"Fixado um ponto O no plano π e dado um número real $k > 0$, a *homotetia de centro O e razão k* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = H_{o,k}(A)$ tal que $OA' = k.\ AO$. (WAGNER, 1993)

OBS: Vamos considerar k>0 para não precisar referir noções de orientação nesta definição.

1) Dado um quadrado A de lado 1, encontre sua imagem através da homotetia com centro em A e fator 2.
vértice

2) Faça o mesmo procedimento anterior; porém, utilize fator 3.

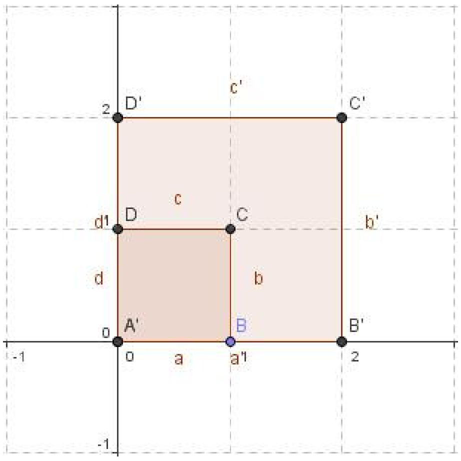
3) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas, em cada caso.

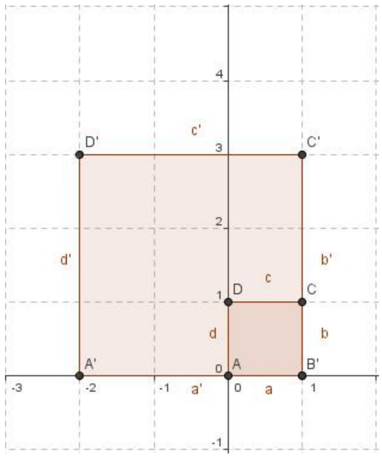
(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,0)	(0,2)	(2,0)	(2,2)

centro A (origem 0,0)

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(-2,0)	(-2,3)	(1,0)	(1,3)

centro B (1,0)





4) Encontre uma expressão algébrica que traduza as transformações que você observou.

$f(x,y)=(x,y)$ $g(x,y) = (2x, 2y)$

$f(x,y)=(x,y)$ $g(x,y) = (3x-2, 3y)$,

ATIVIDADE 04

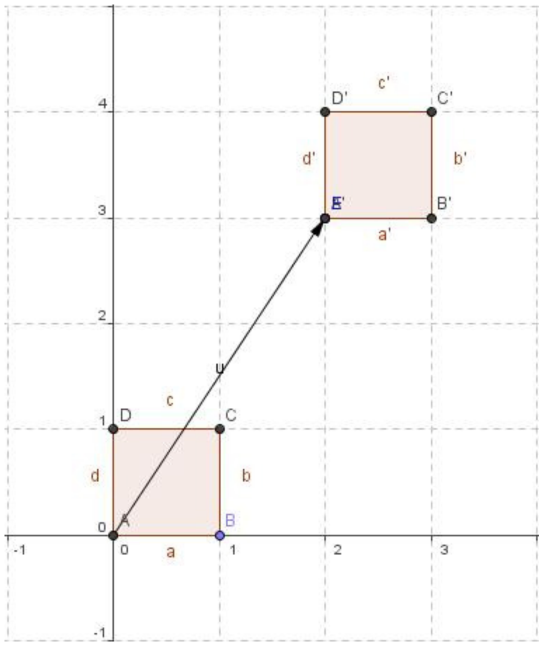
TRANSLAÇÃO

"Seja *AB* um segmento orientado, no plano π ou no espaço *E*. (*Orientado* significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro *A*, e depois *B*.) A *translação* determinada por *AB* é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau : \pi \to \pi$, ou $\tau : E \to E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (*AB, XX'*) e (*AX, BX'*) sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo".

1) Dado um quadrado A de lado 1, agora, construa o vetor de coordenadas u= (2,3), encontre a imagem do quadrado A através da translação em relação ao vetor u.

2) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(2,3)	(3,3)	(3,4)	(2,4)



3) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

$f(x,y) = (x,y)$ $\quad$ $g(x,y) = (x+2, y+3)$

ATIVIDADE 05

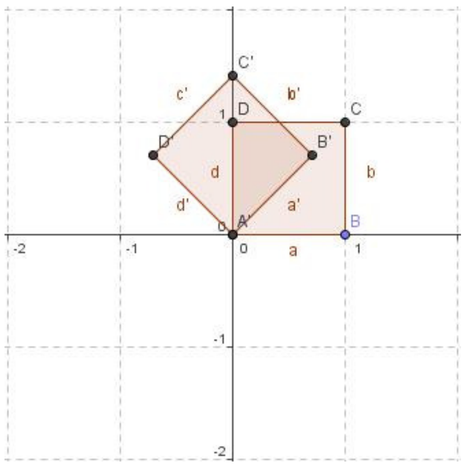
ROTAÇÂO

"Fixemos um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α, a *rotação de centro O e amplitude* α é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto A' = $R_\alpha(A)$ de forma que se tenha A'O = AO, AôA' = α e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo".

Dado um quadrado A de lado 1, como na figura abaixo, determine a imagem do quadrado A em relação à rotação, no sentido anti-horário, com centro em ~~B~~ (0,0) e ângulo de 45°.

1) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,0)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$(0, \sqrt{2})$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



2) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

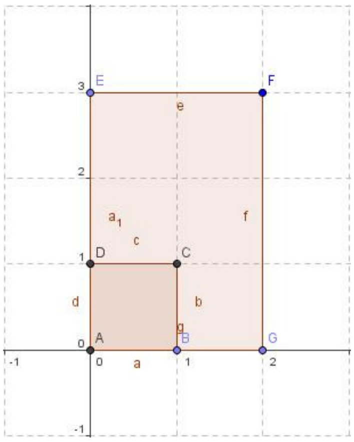
Centro (0,0)

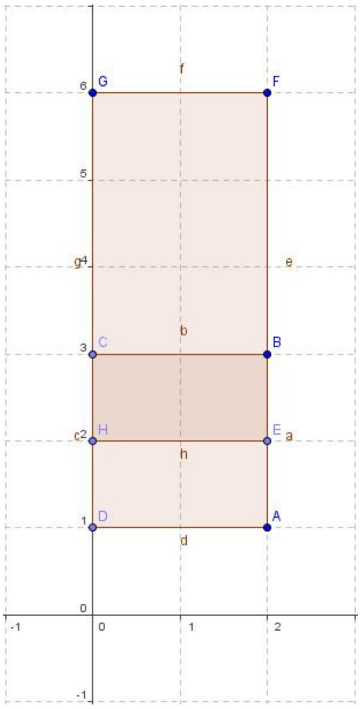
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y}^{\text{p/o } x}, \overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y}^{\text{p/o } y}\right)$$

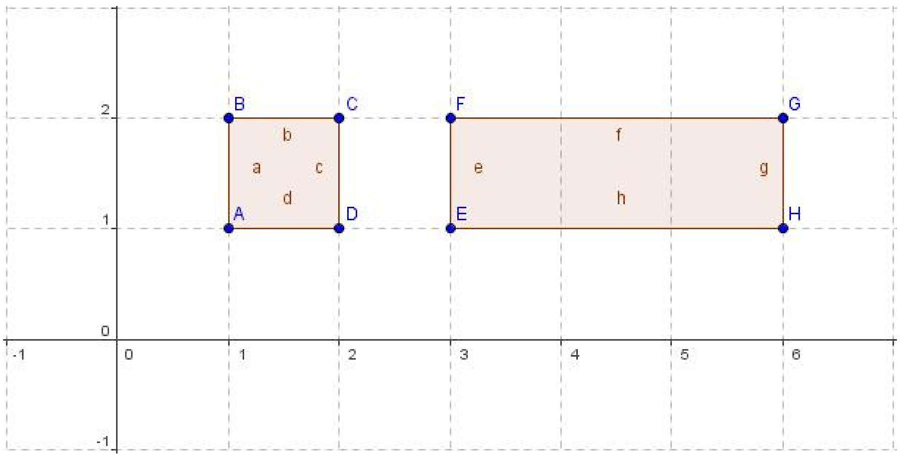
ATIVIDADE COMPLEMENTAR

1) Complete a tabela abaixo, encontrando as imagens dos vértices do quadrado dado dados sob efeito das transformações.

	Vértices	Função	Novos vértices
A	(0,0); (0,1);(1,0),(1,1)	f(x,y) = (2x,3y)	(0,0); (0,3)(2,0) (2,3)
	(2,1),(2,3),(0,3),(0,1)	f(x,y) = (x,2y)	(2,2);(2,6); (0,6);(0,2)
	(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)	f(x,y) = (3x,y)	(3,1)(3,2)(6,2)(6,1)







2) Desenhe, com o software GeoGebra, os quadriláteros iniciais e finais.

3) Observe as deformações que você encontrou no item anterior e conclua que nem toda função é uma transformação geométrica.

(A) estamos multiplicando x por 2 e y por 3!

(B) Subi uma unidade em y e multipliquei y por 2.

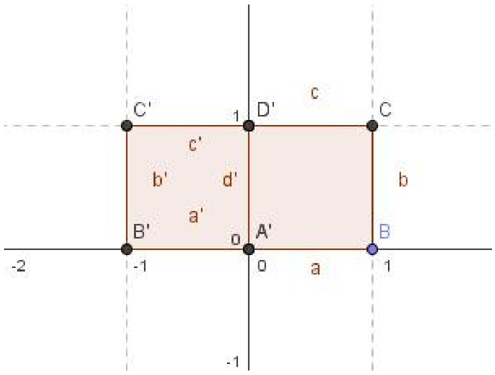
(C) Deslocamos x em duas unidades e multiplicamos por 3.

CADERNO DE QUESTÕES 2

1) Dado o quadrado A de lado 1, com vértice na origem, encontre sua imagem através da reflexão do quadrado A em relação ao eixo das ordenadas.

	A	B	C	D
(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,1)	(1,1)	(1,0)	(0,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,0)

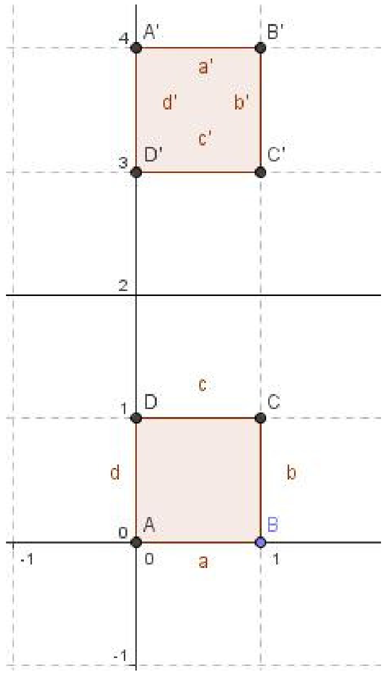
$f(x,y) = (-x, y)$



2) Considere o mesmo quadrado A, trace a reta y = 2 e encontre a imagem do quadrado A através da reflexão em relação à reta traçada.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,1)	(1,1)	(1,0)	(0,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,3)	(1,3)	(1,4)	(0,4)

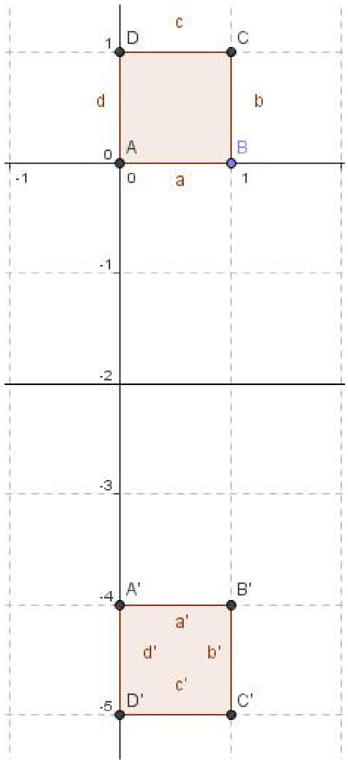
$f(x, y) = (x, -y+4)$



3) Desta vez, trace a reta $y = -2$ e encontre a imagem do quadrado A através da reflexão em relação à reta traçada.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,1)	(1,1)	(1,0)	(0,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,-5)	(1,-5)	(1,-4)	(0,-4)

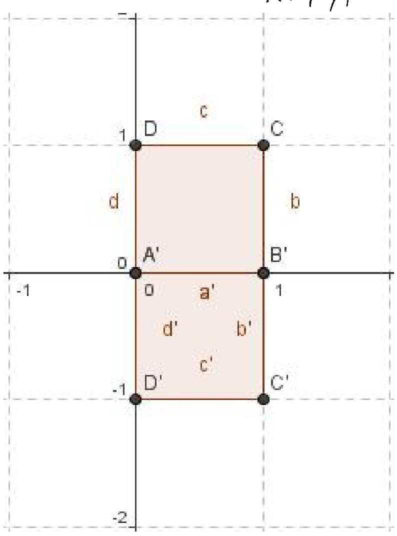
$f(x,y) = (x, -y-4)$



4) Faça a reflexão do quadrado A em relação ao eixo das abscissas e encontre a imagem.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,1)	(1,1)	(1,0)	(0,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,-1)	(-1,-1)	(1,0)	(0,0)

f(x,y) = (x,-y)



5) Em cada tabela, compare as novas coordenadas com às antigas. Encontre uma expressão algébrica para as transformações que você observou acima.

ATIVIDADE 02

SIMETRIA

"A *simetria* em torno do ponto *O* é a transformação φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto φ(*X*) = *X'* tal que *O* é o ponto médio do segmento *XX'*."

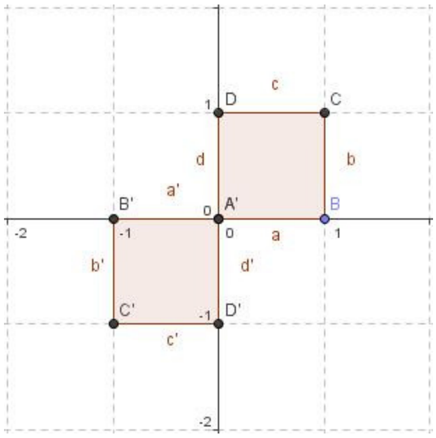
1) Dado um quadrado A de lado 1, encontre a imagem de sua reflexão em relação ao ponto A=(0,0).

2) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

	A	B	C	D
(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,0)

3) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

$f(x,y) = (-x, -y)$



ATIVIDADE 03

HOMOTETIA

"Fixado um ponto O no plano π e dado um número real k > 0, a *homotetia de centro O e razão k* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto A' = $H_{o,k}$(A) tal que OA' = k. AO. (WAGNER, 1993)

OBS: Vamos considerar k>0 para não precisar referir noções de orientação nesta definição.

1) Dado um quadrado A de lado 1, encontre sua imagem através da homotetia com centro em B e fator 2.

2) Faça o mesmo procedimento anterior; porém, utilize fator 3.

3) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas, em cada caso.

	A	B	C	D
(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,-1)	(0,1)	(2,1)	(2,-1)

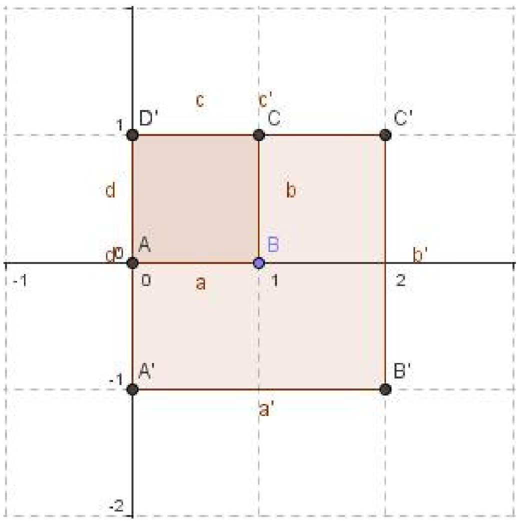
(2)

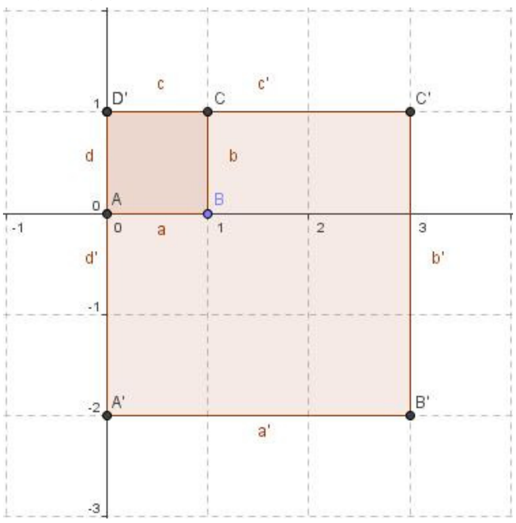
$f(x,y) = (2x, 2y-1)$

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(0,-2)	(0,1)	(3,1)	(3,-2)

(3)

$f(x,y) = (3x, 3y-2)$





4) Encontre uma expressão algébrica que traduza as transformações que você observou.

ATIVIDADE 04

TRANSLAÇÃO

"Seja AB um segmento orientado, no plano π ou no espaço E. (*Orientado* significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A, e depois B.) A *translação* determinada por AB é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau : \pi \to \pi$, ou $\tau : E \to E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (AB, XX') e (AX, BX') sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo".

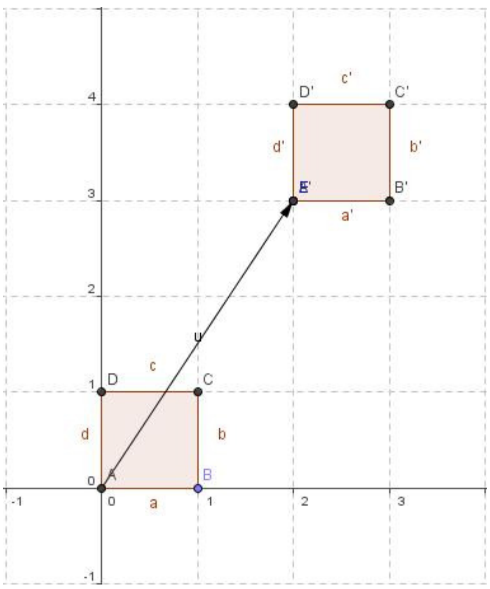
1) Dado um quadrado A de lado 1, agora, construa o vetor de coordenadas u= (2,3), encontre a imagem do quadrado A através da translação em relação ao vetor u.

2) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,3)

$f(x,y) = (x+2, y+3)$

3) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.



ATIVIDADE 05

ROTAÇÂO

"Fixemos um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α, a *rotação de centro O e amplitude* α é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto A' = $R_\alpha(A)$ de forma que se tenha A'O = AO, AôA' = α e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo".

Dado um quadrado A de lado 1, como na figura abaixo, determine a imagem do quadrado A em relação à rotação, no sentido anti-horário, com centro em B e ângulo de 45°.

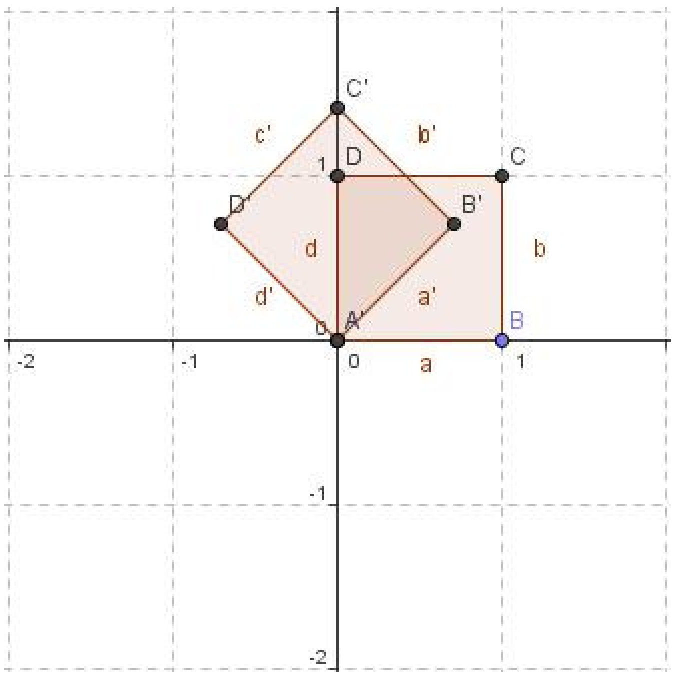
1) Identifique quais são as novas coordenadas dos vértices e estabeleça uma relação entre as novas e as antigas coordenadas.

(x,y) Vértices quadrado domínio	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)
F(x,y) Vértices quadrado imagem	$\sqrt{2}/2$ $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0,71, 0,28)	(0,1)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0,71, 1,71)	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1,41, 1)

$F(x,y) =$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1)+1\right)$

ou

$(\operatorname{sen}\theta(x-y+1), \operatorname{sen}\theta(x+y-1)+1)$



2) Encontre uma expressão algébrica que traduza a transformação que você observou.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,71$

$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,28$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$0 \to 0,71$

$1 \to 0,71$

$1 - 0,71$

$1 - 1,41$

$(0,0) \to \frac{\sqrt{2}}{2}(0 - 0 + 1) = \sqrt{2}/2$ ok

$\to \frac{\sqrt{2}}{2}(0 \cdot 0 - 1) + 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ok

$0,71x - 0,71$

$0,71(x+1)$

$(1,1) \to \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 1 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ok

$\to \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - 1) + 1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ok

$(x\cos\theta - y\,sen\,\theta\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x\frac{\sqrt{2}}{2} - y\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y + 1)$

$(x\,sen\,\theta + y\cos\theta + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

$x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

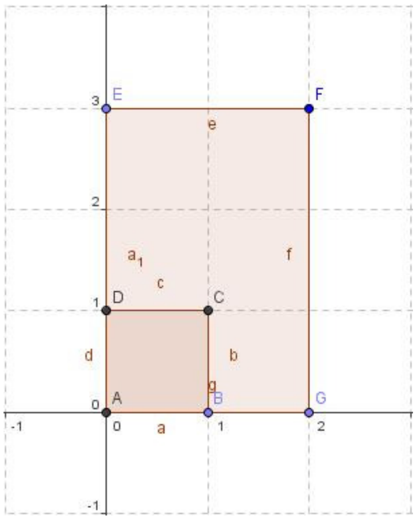
$(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1) + 1)$

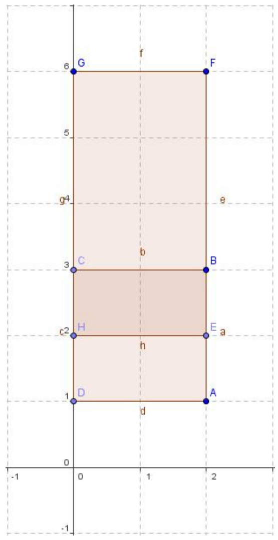
ATIVIDADE COMPLEMENTAR

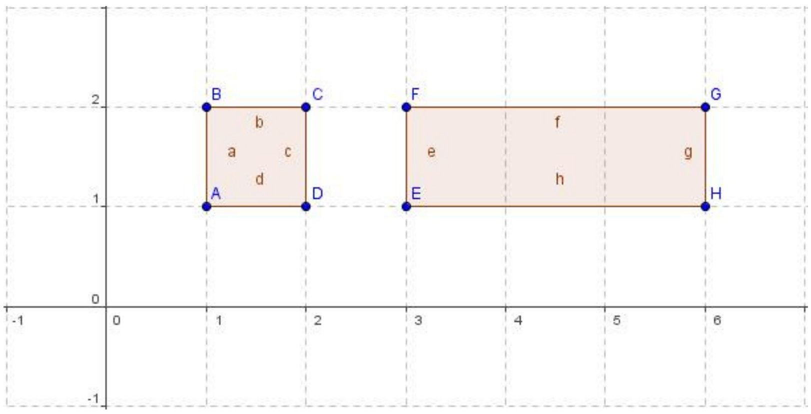
1) Complete a tabela abaixo, encontrando as imagens dos vértices do quadrado dado dados sob efeito das transformações.

Vértices	Função	Novos vértices
(0,0); (0,1);(1,0),(1,1)	f(x,y) = (2x,3y)	(0,0), (0,3), (2,0) (2,3)
(2,1),(2,3),(0,3),(0,1)	f(x,y) = (x,2y)	(2,2) (2,6) (0,6) (0,2)
(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)	f(x,y) = (3x,y)	(3,1) (3,2) (6,2) (6,1)

2) Desenhe, com o software GeoGebra, os quadriláteros iniciais e finais.







3) Observe as deformações que você encontrou no item anterior e conclua que nem toda função é uma transformação geométrica.

ANÁLISE

O caderno de questões 1 foi o único caderno completo. Percebe-se que o aluno conseguiu traduzir, através de expressões algébricas, as transformações geométricas ocorridas. Além disso, a diferença entre os demais cadernos é que, na última questão, de verificação, o/a aluno/a conseguiu expressar por palavras o que havia observado.

Já o segundo caderno de questões, está bem escrito e representa uma média dos demais cadernos. Contém todos os pontos e modificações ocorridas através das transformações geométricas sugeridas.

Os objetivos pretendidos com estas atividades foram alcançados, os alunos conseguiram analisar e definir o efeito das transformações geométricas sobre figuras geométricas planas. Além disso, representaram estas transformações como funções de domínio não numérico e estabeleceram relações entre transformações geométricas e funções, compreendendo que toda transformação geométrica é função. Analisando os cadernos dos alunos, constatamos que todos se deram conta se que transformações geométricas são funções; porém, como observado na maioria dos cadernos, a última atividade, na qual eles deveriam concluir que nem toda função é uma transformação geométrica, ficou em branco. O que nos leva a concluir que muitos não compreenderam a volta da afirmação.

COMENTÁRIOS SOBRE A EXPERIÊNCIA

Durante a realização da experiência conseguimos observar, através da gravação feita da aula, que os alunos apresentaram interesse nas atividades propostas. Interessaram-se por estabelecer relações entre os elementos trabalhados nas atividades.

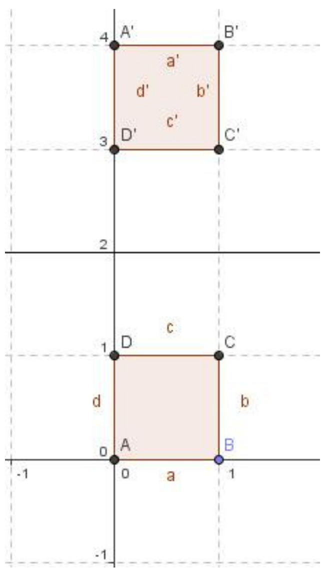
A experiência foi realizada no Instituto de Matemática da UFRGS com os alunos da graduação do curso Matemática-Licenciatura durante o horário da disciplina Laboratório e prática de ensino-aprendizagem de matemática III no dia 28 de maio de 2008. Participaram 10 alunos, atualmente cursando o 5º semestre do curso.

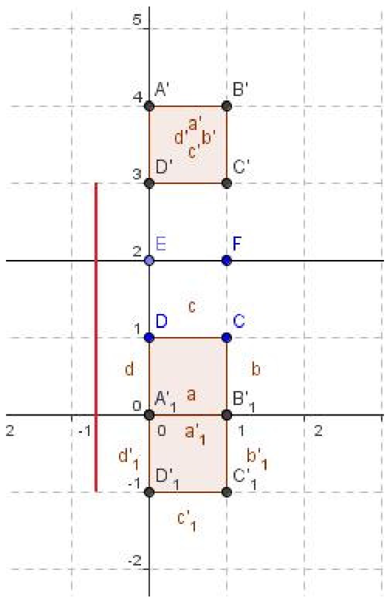
Os alunos citaram duas disciplinas já cursadas, em que tiveram contato com transformações Geométricas. Geometria I, que enfatizou os movimentos usando o Cabri Géomètre, além de aspectos da Geometria plana: pontos, retas, ângulos. Triângulos congruentes, construções com régua e compasso. Triângulos semelhantes. Funções trigonométricas de ângulos. Círculos. Lugares geométricos. Decomposição de regiões poligonais. Outra disciplina foi a Álgebra Linear que enfatizou as representações matriciais, além de abordar sistema de equações lineares. Matrizes. Fatoração LU. Vetores. Espaços vetoriais. Ortogonalidade. Valores próprios. Aplicações.

PRINCIPAIS PERGUNTAS E DIFICULDADES

SOBRE A REFLEXÃO: É um movimento no plano? Como obter a equação de uma simetria cujo eixo não passa na origem, mas é paralelo aos eixos cartesianos?

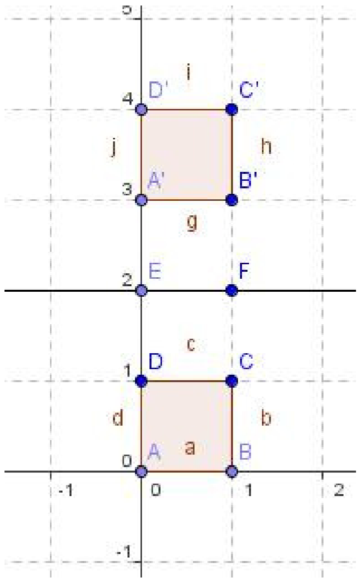
Neste caso, a maioria dos alunos respondeu prontamente à atividade, representando a simetria como uma soma, por exemplo, f(x,y) = (x,y+3), sem se darem conta do que realmente estava acontecendo durante a transformação, ou seja, que eles deveriam primeiro ver uma reflexão em torno do eixo x para depois, fazer uma translação, tornando a função f(x.y) = (x, -y+4), ou seja, tratava-se de uma composição de funções.





Reflexão feita pelo software Pensamento correto para a expressão algébrica

Os alunos, ao responderem a questão, estavam trocando os vértices, ou seja, o vértice A = (0,0) passou a ser A’ = (0,3); B = (1,0) passou a ser B’ = (4,0); C = (1,1) passou a ser C’ = (4,4) e D = (0,1) passou a ser D’ = (0,4). Eles imaginaram a questão da seguinte maneira:



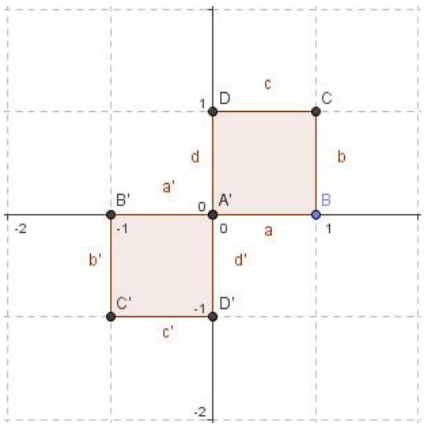
Primeiro pensamento dos alunos

Achados ao responder:

A simetria é uma composição de movimentos: simetria com relação aos eixos cartesianos e translação.

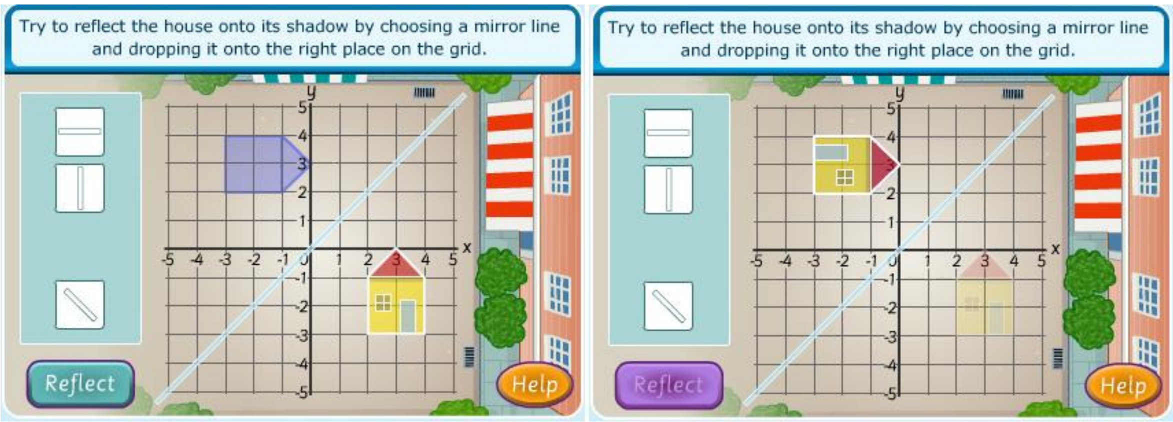
É preciso iniciar com simetria em torno dos eixos cartesianos.

SOBRE A SIMETRIA: A reflexão com relação à origem é uma simetria com relação à reta y=- - x? A ordem dos vértices do quadrado na reflexão é importante. Como explicar?

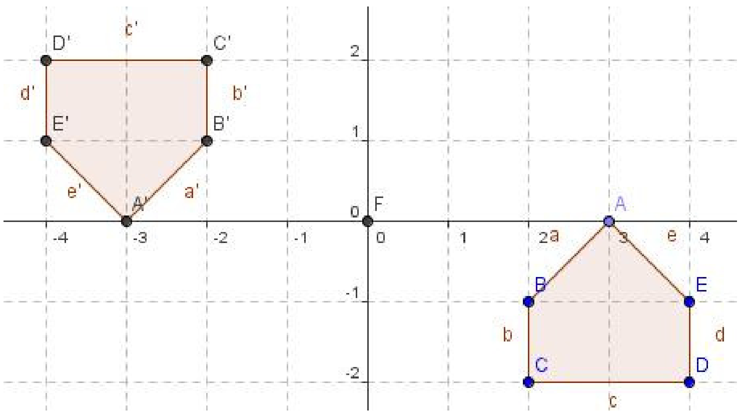


Para isto, foi necessária a leitura cuidadosa das definições de simetria e de reflexão.

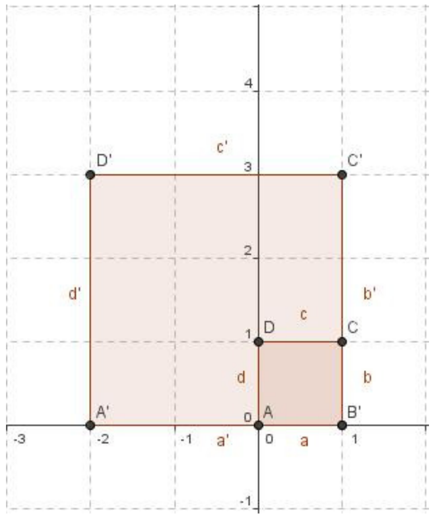
Os alunos, durante a execução da atividade, ficaram em dúvida com o que estava acontecendo na reflexão, imaginavam que fazer a simetria da figura em relação à origem era o mesmo que fazer a reflexão em relação à reta y = - x. Esta confusão talvez tenha surgido com a manipulação da atividade em flash, quando os alunos deveriam fazer a reflexão em relação à reta y = x (como mostra a figura abaixo).



Observe que, no caso de uma simetria em relação à origem, teríamos algo similar à imagem abaixo.



HOMOTETIA: Se a homotetia, por certo ponto B se dá para a esquerda, então pelo ponto O (figura) também deve ser para a esquerda.



Para isto, foi necessária a leitura cuidadosa das definições.

ROTAÇÃO: Para definir a função é preciso lembrar a matriz de rotação da Álgebra Linear: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta \quad \cos\theta \end{bmatrix}$. Não existe um jeito mais simples de representar?

A resposta levou-os a pensar nos números complexos e no significado de multiplicação na forma trigonométrica.

COMENTÁRIOS GERAIS DOS ALUNOS

"Tivemos contato com as transformações geométricas na discussão de Geometria I (Geometria plana: pontos, retas, ângulos. Triângulos congruentes, construções com régua e compasso. Triângulos semelhantes. Funções trigonométricas de ângulos. Círculos. Lugares geométricos. Decomposição de regiões poligonais.), mas não de maneira formal, apenas com movimentos no plano usando o software Cabe Géomètre. Tivemos outro contato em Álgebra Linear, encontrando a forma matricial, sem relacionar com movimentos. Esta atividade foi muito importante por que: pela primeira vez tive contato com as definições geométricas das transformações; pela primeira vez fiz relações com Álgebra Linear, geometria e as funções do Cálculo".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo maior deste trabalho foi ampliar o significado usual dado para funções: relações entre conjuntos numéricos, toda função é real de variável real, toda função tem uma fórmula y=f(x) e um gráfico no plano cartesiano XOY.

A questão norteadora foi: introduzir os conceitos das transformações geométricas euclidianas no plano e identificar seus efeitos sobre figuras do plano, pode contribuir para ampliar este significado, levando o aluno a perceber função como uma relação qualquer ente conjuntos quaisquer, cuja única condição é ser unívoca?

Com o software conseguimos fazer as relações necessárias para responder à pergunta inicial: conseguimos expressar o conceito de funções e de transformações geométricas, simultaneamente, vinculando a álgebra e a geometria.

Este estudo seguiu os passos da Engenharia Didática.

Na análise epistemológica descobrimos que no século XX, um grupo de jovens matemáticos franceses fundou, em 1935, a Associação Bourbaki, a fim de organizar toda a matemática conhecida. Eles publicaram, em 1939, o primeiro livro da coleção Théorie des ensembles (fascicule de résultats), que contém a definição moderna definição de função, que diz que: sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x. Dando-se o nome de função a operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada.

No estudo epistemológico que fizemos, a definição de função mostra que desde o século XVII até a revolução desencadeada pelo grupo Bourbaki, emergiram diferentes concepções de função.

Na análise didática descobrimos que muito pouco tem sido feito na tentativa de reforçar a idéia de unir conceitos de funções e transformações geométricas. Encontramos uma série de materiais que contemplam o objeto matemático função e suas propriedades; porém, muito pouco se tem produzido unindo funções e transformações geométricas, ou seja, existe pouco material abordando funções de domínio não numérico, relacionamento conhecimentos de funções com a idéia das transformações geométricas no plano.

Pesquisas demonstram que os professores não exploram casos mais gerais de funções definidas em conjuntos que não o conjunto dos números reais ou em conjuntos não numéricos.

Na análise cognitiva percebemos que apesar do conceito moderno de função ser muito mais abrangente, tanto livros didáticos quanto professores acabam de voltando para o ensino clássico, ou seja, função real de domínio real. Por este motivo identificar quais seriam as dificuldades que os alunos encontrariam seria uma tarefa difícil

Planejamos um Caderno de Atividades com os seguintes objetivos de definir e analisar o efeito das transformações geométricas da Geometria Euclidiana sobre figuras geométricas planas; representar as transformações geométricas da Geometria Euclidiana como exemplos de funções cujo domínio não é numérico; estabelecer relação entre transformações geométricas e o conceito de função; analisar exemplos de funções cujo domínio é o plano mas que não são transformações geométricas da geometria Euclidiana, pois modificam a forma das figuras geométricas e concluir que toda transformação geométrica é também função, mas a recíproca não é verdadeira.

Trabalhamos com as hipóteses de que o trabalho tem potencial para fazer surgir, entre os alunos da Licenciatura, relações entre as disciplinas de Cálculo e Geometria; o trabalho valoriza as definições formais e favorece, nos alunos, a necessidade da leitura cuidadosa da teoria para obter compreensão e sucesso na prática e que o trabalho traz para os alunos da Licenciatura a formalização e exploração de um conteúdo novo, não tratado no Curso.

As atividades foram experimentadas com alunos do Curso Matemática-Licenciatura. Das observações e da produção dos alunos concluímos que os objetivos foram alcançados, com exceção do último: concluir que toda transformação geométrica é também função, mas a recíproca não é verdadeira. A última atividade do Caderno de Atividades não foi respondida por todos e não houve tempo para discuti-la.

Acreditamos que o Caderno pode ser útil para os cursos de formação de professores, para formalizar conceitos e relacionar áreas distintas.

Nós, alunos da Licenciatura em Matemática, aprendemos a evolução histórica do conceito de funções, além de aprendermos a relacionar o que sabemos de funções com as transformações geométricas no plano.

Sobre a Engenharia Didática, aprendemos que é no desenvolvimento de uma pesquisa no campo da Educação Matemática através desta metodologia que se une a construção do saber matemático a uma prática reflexiva investigativa diante de uma seqüência didática experimental. Ou seja, a Engenharia Didática pode ser explicada como um esquema sobre concepção, realização, observação e análise de uma seqüência de ensino, onde o professor faz da sua ação pedagógica um objeto de investigação, através do qual estabelecerá uma correlação entre teoria e prática na tentativa de construir o conhecimento. Por este motivo, a teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFONSO, Reginaldo Fabiano da Silva; DANDOLINI, Gertrudes Aparecida; SOUZA, João Artur de; GERALDO, André Pinto - **O Ensino de funções mediado por tecnologias.** In: IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006, Caxias Do Sul. IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006. p. 1-7.

Disponível em http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/cientificos/cc59.pdf. Acesso online em 21/03/2008.

BERLEZE, Caren Saccol – **Uma seqüência de ensino usando o programa winplot: em busca de uma aprendizagem autônoma do aluno**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano.

BRASIL, Secretaria da educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, MEC, 2006.

CARNEIRO, Vera Clotilde GARCIA. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike**,** Campinas - UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118. Disponível em http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/ENGENHARIA%20ZETEIKE2005.pdf

Acesso online em 21/04/2008.

CARNEIRO, Vera Clotilde GARCIA; SOARES, Débora da Silva; FRONZA, Juliana. **Funções complexas e transformações geométricas para cursos de licenciatura em matemática.** Volume 3. UFRGS - 2005

FERNANDES, Carlos Alberto Ferreira - **Softwares Educativos Matemáticos como Recurso Didático nas aulas.** 2006. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática – Informática na Educação) – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo.

Disponível em http://www.unimesp.edu.br/arquivos/mat/tcc06/Artigo_Carlos_Alberto_Ferreira_Fernandes.pdf. Acesso online em 21/03/2008.

HAETINGER, Claus; MARIANI, Mateus – **Uma abordagem diferenciada no estudo de funções.** In: IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006, Caxias do Sul. Anais do IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006. p. 1-3. Disponível em http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/relatos/re35.pdf.

Acesso online em 21/03/2008.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Joelene de Oliveira - **Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio suportado por Ambientes Computacionais.** 2006. Relatório Técnico (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). PUC – RS.

Disponível em http://www.inf.pucrs.br/~giraffa/jo/jo/RTI_Joelene.pdf

Acesso online em 21/03/2008.

LIMA, Rosana Catarina Rodrigues de; MAGINA, Sandra Maria Pinto – **Ler e interpretar gráficos usando as novas tecnologias: Um estudo com alunos da 4ª série do ensino fundamental**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa. Belo Horizonte: Dantas Projetos Digitais, 2007. v. 1. p. 1-16. Disponível em

http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html

Acesso online em 21/03/2008.

PAQUES, Otília T. W; SOARES, Maria Zoraide M. C.; MACHADO, Rosa Maria; QUEIROZ, Maria Lúcia B. – **Exploração e análise de softwares educacionais de domínio público no ensino de matemática**. In: Bienal da SBM, UFMG, 2002, Belo Horizonte.

Disponível em http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/softwares_publicos.pdf.

Acesso online em 21/03/2008.

REZENDE, Wanderley Moura – **Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico**. 2007. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo : SBEM, 2007. v. 1. p. 1-15. Disponível em http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html

Acesso online em 21/03/2008.

SANTANCHÈ, André - **O Computador como Ambiente para Exploração da Matemática e Física.** Minicurso. In: XII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação - SBIE 21 a 23 de Novembro de 2001.

Disponível em http://www.lis.ic.unicamp.br/~santanch/seminars/SBIE2001-Matematica-Fisica.pdf

Acesso online em 21/03/2008.

SANTOS, Fabio Vieira dos; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da – **O uso do computador no estudo de funções no ensino médio.**

In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX ENEM. Belo Horizonte: SBEM, 2007. v. 1. p. 1-12.

Disponível em http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html
Acesso online em 21/03/2008.

ZUFFI, Edna Maura; PACCA, Jesuína Lopes de Almeida - **O Conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências.** Ciência e Educação (UNESP), Bauru, SP, v. 8, n. 1, p. 1-12, 2002.

Disponível em www2.fc.unesp.br/cienciaeeducacao/include/getdoc.php?id=525&article=183&mode=pdf

Acesso online em 12/04/2008.

ZUFFI, Edna Maura; PACCA, Jesuína Lopes de Almeida - **Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio**. Zetetike (UNICAMP), Campinas, v. 8, n. 13/14, p. 7-28, 2000.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas.** Rio de janeiro: Gráfica Wagner, 1993. p. 110.