# ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A ORIGEM DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Lorí Viali, Dr.
Prof. Titular da FAMAT (Faculdade de Matemática) da PUCRS
Prof. Adjunto do IM (Instituto de Matemática) da UFRGS

***Resumo:*** *A história da matemática já está bem documentada. O número de obras sobre o assunto é apreciável. Existe, no entanto, uma área que carece sobremaneira de uma visão única que é a probabilidade. As obras na área são escassas e as poucas que existem em sua grande maioria misturam-na com a estatística. Neste trabalho procuramos traçar um panorama do desenvolvimento da probabilidade e apenas dela.*

***Palavras-chave:*** *História da Probabilidade, Origens da Probabilidade, problema dos pontos.*

## 1. O NASCIMENTO

A história da matemática já está razoavelmente bem estudada. Já não se pode dizer o mesmo sobre a estatística e a probabilidade. Os trabalhos realizados não se comparam aos realizados na área da matemática. Um complicador é o fato de que as pesquisas históricas quase que invariavelmente unem a estatística e a probabilidade. Traçar um panorama do desenvolvimento da probabilidade é por este motivo uma tarefa bastante complicada, pois além do material ser escasso, quando existe ele invariavelmente mistura estatística com probabilidade.

Neste artigo é feita uma tentativa de traçar um panorama do que possa ter sido o desenvolvimento do ramo da matemática denominada de “Teoria da Probabilidade”, “Cálculo de Probabilidades” ou simplesmente “Probabilidade”, apenas deixando a estatística de lado.

A probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o “acaso” representa um papel preponderante.

Antes de tudo é necessário especificar ou conceituar o que se entende por “acaso”. O denominado “acaso” é um conjunto de forças, em geral, não deteminadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno. Assim ao lançarmos uma moeda, é senso comum que os possíveis resultados, exceto por alguma extravagância da natureza, são “cara” e “coroa”. No entanto, antes de realizada a experiência não é possível antecipar com certeza qual dos dois possíveis resultados irá ocorrer. Isto acontece porque os fatores que determinam um destes particulares resultados não podem ser identificados e caso isto ocorra não são passíveis de controle.

A idéia de acaso é quase tão antiga quanto as primeiras civilizações, só que a percepção de que isto é um fenômeno natural veio a ocorrer bem mais tarde. Inicialmente o acaso era percebido como fruto ou obra da divindade. A bem da verdade, ainda hoje, a idéia de fenômenos aleatórios (sem causa definida) ainda encontra dificuldades para serem naturalmente aceitos. Vide o espaço que a mídia ainda dedica a pessoas que supostamente podem prever o futuro. Maurice George Kendall [KEN97] colocou: "a humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos probabilísticos."

### 1.1. Os jogos

As primeiras manifestações se deram através dos jogos de dados, mais precisamente o Tali (jogo do osso) que era praticado com astrágalos. O astrágalo é o ancestral do dado moderno (hexaedro regular). Ele era formado por um osso de animal (possivelmente carneiro) e semelhante a um tetraedro irregular, isto é, as quatro faces não eram idênticas e nem tampouco mostravam a mesma freqüência de ocorrência. As faces maiores eram numeradas com 3 e 4 e as duas menores por 1 e 6. Alguns experimentos conduzidos chegaram a conclusão de que as freqüências de ocorrências das quatro faces do osso do jogo do Tali apresentavam os seguintes resultados:

| Faces | 1 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| Freqüências | 0,12 | 0,37 | 0,39 | 0,12 |

Além de apostas este jogo era freqüentemente utilizado para previsões sobre o futuro. Para tal eram jogados cinco ossos ao mesmo tempo. Outra utilização do jogo era na decisão de disputas e , ainda, na divisão de heranças.

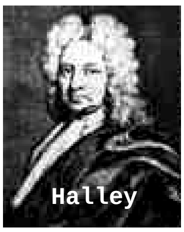
Um tratamento mais formal dos jogos de azar consistiu inicialmente na enumeração das possibilidades de que o jogo fornecesse um determinado resultado. O registro mais antigo deste tipo é a do bispo belga Wibold da cidade de Cambrai que em alguma época em torno de 960 inventou um jogo de dados moral, a despeito da proibição, a época, dos jogos pela igreja. Ele enumerou 56 virtudes e atribuiu cada uma delas aos possíveis resultados do lance de três dados [DAV98]. Em outras obras medievais encontram-se referências aos jogos de dados (*hazard games*) que envolvem o lançamento de dois dados. Uma desta obras é a Divina Comédia, de Dante Alighieri (1265-1321), que faz um breve comentário no sexto canto do *Purgatorio*.

## 1.2. Os seguros

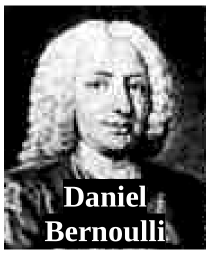
A prática dos seguros parece ter iniciado provavelmente com comerciantes mesopotâmicos e fenícios que o aplicavam a perda da carga de navios por naufrágio ou roubo. A prática teve seqüência com os romanos e os gregos e chegou ao mundo moderno com os comerciantes marítimos italianos. Sobre as técnicas utilizadas pelas antigas seguradoras praticamente nada se sabe. Mas pode-se especular, que elas se baseavam em estimativas empíricas das probabilidades de acidentes, para determinarem os prêmios.

O crescimento dos aglomerados urbanos, após a idade média, popularizou o seguro de vida. Em volta deste tipo de negócio é que surgem os primeiros estudos matemáticos. Os prêmios dos carregamentos entre as Américas e as Índias continuavam a ser calculado pelas técnicas milenares, apesar do grande aumento deste tipo de negócio.

Em 1663 foi publicado o trabalho *Degrees of Mortality of Mankind* que foi o primeiro sobre seguros de vida por Edmond Halley (1656-1742), que tem um cometa batizado em sua homenagem. Anteriormente **Cardano** em 1570 fez uma tentativa de estudar matematicamente os seguros de vida na obra *De proportionibus Libri V*, sem, no entanto alcançar repercussão. Halley mostrou como determinar o prêmio (a anuidade) de um seguro em termos da esperança de vida e da probabilidade de sobrevida.




Os seguros alcançaram o amadurecimento matemático com Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrinho de Jacob Bernoulli. Ele utilizou a abordagem de calcular o número esperado de sobreviventes após “n” anos dado um número de nascimentos. Ele fez progressos na área calculando a mortalidade por varíola em pessoas de determinada idade.




Neste meio tempo começam a se formar as primeiras grandes empresas de seguros que tinham condições de trabalhar com um embasamento científico. Hoje o mercado está sofisticado a ponto de absorver boa parte dos formados na área de matemática [POR02].

## 2. A INFÂNCIA

Apesar dos jogos e da navegação fazerem parte do desenvolvimento da humanidade uma abordagem matemática do acaso e do risco que só teve início efetivamente a mais ou menos 500 anos.

A Teoria das Probabilidades como disciplina matemática originou-se das tentativas de quantificação dos riscos associados a sinistros (naufrágios, acidentes, morte, etc.) e da quantificação das possibilidades de se ganhar em jogos de azar. Na realidade a palavra "azar" empregado aqui não está utilizado no sentido habitual de "má sorte" e sim como sinônimo de "acaso".

### 2.1. A Escola Italiana

Os italianos do século XV e XVI foram os pioneiros dos cálculos probabilísticos. Eles foram além da simples enumeração das possibilidades para resolver problemas de comparação de freqüências de ocorrências e ganhos em jogos de azar. Não formularam conceitos e teoremas limitaram-se apenas a resolver problemas concretos.

O frei Luca Pacioli ou Paciolo (1445-1517), que mudou o nome para Luca di Borgo ao entrar na ordem dos franciscanos, embora não tenha publicado nada de original é reconhecido por uma obra grandiosa para a época. O que o tornou conhecido para a história do desenvolvimento da probabilidade foi denominada de *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* ou simplesmente *Summa* e foi publicada em Veneza em 1494. Este trabalho forneceu um resumo da matemática conhecida na época e incorporava quase que inteiramente o trabalho *Líber Abaci* de Leonardo Fibonacci (1170?-1250?). Apresentava conteúdos de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria e é o primeiro autor conhecido que estudou os jogos de azar. Pacioli estudou o problema dos pontos (divisão da aposta), embora sua solução tenha sido incorreta. Apesar de não ser um trabalho original sua obra foi importante pela influência que seu livro exerceu sobre um longo período. O problema dos pontos que ele estudou foi semelhante ao que Pascal e Fermat viriam a solucionar e que é considerado como de fato o início da Teoria da Probabilidade. Pacioli trabalhou com Leonardo da Vinci (1452-1519) que ilustrou sua obra *Divina proportione*, que segundo consta negligenciou sua pintura dado o interesse que tinha pela Geometria.

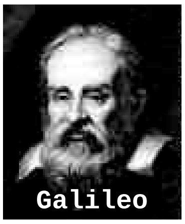


Niccolo Fontana (1499-1557) conhecido como Tartaglia publicou sua obra *General Trattato*, em 1556, que dedicava algumas páginas aos problemas de Pacioli. Entre eles o problema dos pontos (divisão da aposta).


Um exemplo do problema dos pontos é ilustrado pelo seguinte formulação dada por Pascal. Um jogo eqüitativo termina quando um dos jogadores vencer seis partidas. Suponha-se que por algum motivo o jogo tenha que ser interrompido quando o primeiro jogador tenha vencido cinco partidas e o segundo apenas três. Como as apostas devem ser repartidas? Tartaglia argumentou que a divisão deveria ser 5:3, que não é correta. A solução correta para este problema foi dada mais tarde por Fermat e Pascal.

Girolamo Cardano (1501-1576) teve seu livro *Liber de Ludo Aleae*, na realidade um manual de jogos de azar, matéria que ele entendia pois era viciado nos dados, publicado em 1663, embora tenha sido provavelmente completado em 1525. Sua obra mais famosa foi, entretanto, um trabalho de 1545 denominada de *Ars Magna* onde ele fornece métodos de solução das equações de terceiro e quarto grau. Ele foi o primeiro a estudar o lançamento de dados, baseado na hipótese de que existia um princípio científico fundamental governando as probabilidades de se obter um par de "seis", além de mera sorte. Não seria fora de propósito considerar Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade,

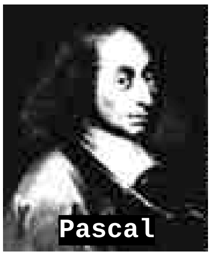
pois ele foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele, também, conhecia a idéia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles. Seus estudos, no entanto, ficaram limitados a casos concretos de jogos de azar principalmente o de dados.




Galileo Galilei (1564-1642) é autor de outro manual sobre jogos, o *Considerações sobre o Jogo de Dados.* Nesta obra, entre outras coisas, Galileo explica a um amigo porque, embora sejam seis as somas que fornecem nove pontos no lançamento de três dados e que sejam também seis as que fornecem dez pontos, a experiência mostra que a soma dez é mais comum de ocorrer do que a soma nove.

## 2.2. A abordagem francesa

O francês Blaise Pascal (1623-1662) teve conhecimento do problema dos pontos (divisão da aposta) através de Antoine Gombauld, que ganhava a vida jogando e se autodenominava cavaleiro de Méré. Encontrou uma solução e a comunicou por carta ao também francês Pierre de Fermat (1601-1665).




Até Pascal a listagem dos casos favoráveis de um evento aleatório era bastante simples e limitadas a casos específicos. Para resolver o problema dos pontos era preciso técnicas mais apuradas envolvendo um grande número de possibilidades que foi o que Pascal fez. Ele foi mais feliz que seus antecessores, pois pode contar com uma notação mais apurada do que eles. O cálculo literal (utilização de letras para representar quantidades conhecidas ou desconhecidas) foi introduzido, em 1600, pelo francês François Viète (1540-1603) na obra *In artem analyticam isagoge*. Pascal pode contar ainda com a álgebra desenvolvida por outro francês, René Descarte (1596-1650) em sua *La Géometrie* de 1637.

Consta que o problema dos pontos não foi o único proposto a Pascal por Gombauld. Um segundo problema questionava sobre o número mínimo de lançamentos necessários de um par de dados equilibrados para que se obtenha um par de seis com probabilidade superior a 50%. O jogador estava interessado em saber porque a solução que ele imaginara causando-lhe prejuízos.

A solução imaginada por Antoine partia do princípio de que se a probabilidade de se obter um seis ao jogarmos um dado é 1/6. Jogando três vezes a probabilidade será de 3.(1/6) = 50%. Assim se o dado for jogado pelo menos quatro vezes a probabilidade de se obter um seis favorecerá o jogador. Partindo deste princípio ele imaginou que quando se lançam dois dados existem 36 possibilidades, isto é, seis vezes mais do que quando um único dado é lançado. Para ganhar com um dado são necessários no mínimo quatro lançamentos, então para ganhar com dois seriam necessários seis vezes mais, isto é, 24 lançamentos do par de dados. Ele percebeu, através do bolso, que esta forma de encaminhar o problema não funcionava. A bem da verdade o raciocínio acima para a obtenção de um seis em 4 jogadas de um dado está, também, errado. Só que por sorte do jogador neste caso ele era favorecido.

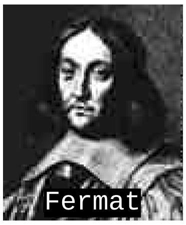
Na realidade a probabilidade obtermos ao menos um seis em quatro lançamentos de um dado é dado por:

$1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^4 = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$ = 51,77%, pois é o evento complementar de não obter nenhum seis em 4 lançamentos de um dado.

Da mesma forma a probabilidade de obtermos um duplo seis em 24 lançamentos de um par de dados é dado por:

$1-\left(1-\frac{1}{36}\right)^{24} = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ = 49,14%, que é ligeiramente inferior a 50%, mas suficiente para ao longo de vários jogos causar um estrago no bolso do cavaleiro de Méré.

Segundo boa parte das fontes consultadas foi um destes dois problemas (1) **problema dos pontos (divisão da aposta)** e (2) o **dos dados** que motivou a correspondência entre Pascal e Fermat e, portanto iniciou a teoria da probabilidade. Acredito que saber se foi o problema um ou o dois ou talvez ambos que tenha motivado a correspondência entre os dois ilustres matemáticos franceses não é o mais relevante. O importante é que o fato desencadeou um interesse crescente pelo assunto, levando ao nascimento de mais uma disciplina matemática. A correspondência entre Fermat e Pascal consistiu em cinco cartas e ocorreu no verão de 1654. Nestas cartas eram considerados os problemas "dos dados", que já tinha sido estudado por Cardano ou Cardan, e o "problema dos pontos" (ou da divisão da aposta), também, considerado por Cardano, Pacioli e Tartaglia (todos sem sucesso).




Pascal e Fermat foram os pioneiros na solução de problemas genéricos, como o colocado acima. Só que o enunciado em forma de teorema data de mais tarde. Fermat e Pascal foram apresentados um ao outro pelo francês Pierre de Carcavi (1600-1684) que era amigo íntimo de Pascal e também conhecia Fermat. Carcavi passou a história mais pela sua correspondência com os matemáticos da época do que propriamente pela sua matemática [DAV98]. A apresentação entre eles foi apenas na forma escrita, pois eles nunca se encontraram pessoalmente.

Em uma das cartas de Pascal para Fermat eles discutem o seguinte problema: dois jogadores disputam um jogo de três pontos, onde cada um fez uma aposta de 32 *pistoles*[1] Como a aposta deve ser dividida se eles precisam ou decidem interromper o jogo antes do final (ambos assumiam que os dois jogadores tinham habilidades equivalentes).

A solução proposta por Pascal, embora sem certeza, foi analisar todas as possibilidades futuras do desenvolvimento do jogo. Assim ele supôs o primeiro jogador tenha ganhado dois pontos e o segundo apenas um. Eles agora precisam disputar um ponto nesta situação. Se o primeiro jogador ganha ele leve toda a aposta (as 64 moedas) e se o segundo ganha cada um terá então dois pontos, estando então iguais. Caso eles parem de jogar cada um ficará com 32 moedas. Assim se o primeiro jogador ganhar 64 moedas serão dele e se ele perder 32 serão dele. Então se eles encerrarem o jogo nas condições acima o primeiro jogador poderá argumentar: "eu já tenho garantido 32 moedas mesmo que eu perca esta rodada, e das 32 restantes eu tenho chances iguais de ganhar ou perder, então vamos dividi-las igualmente. Assim meu prêmio será as 32 a que tenho direito mais a metade das restantes num total de 48 moedas. O teu prêmio será de 16 moedas".

Suponha agora que o primeiro jogador tenha ganhado dois pontos e o segundo nenhum e vão disputar um ponto. A situação é que se o primeiro jogador ganha ele leva todo o prêmio e se o segundo ganhar ele estará na condição que foi discutida acima, isto é, onde o primeiro leva 48 moedas e o segundo apenas 16. Assim se eles quiserem encerrar o jogo o primeiro jogador poderá argumentar que: se eu ganhar este ponto eu levo todas as moedas, mas se perder eu já tenho garantido 48 moedas. Eu fico com as 48 mais a metade das restantes, pois as chances de que cada um ganhe este ponto são iguais. Desta forma o primeiro jogador deve ficar com 56 moedas e o segundo com as 8 restantes.

A última situação seria aquela em que o primeiro jogador tenha ganhado um ponto e o segundo nenhum. Se eles seguissem e o primeiro jogador ganhasse eles estariam na condição examinada acima (56 para um 8 para o outro). Se o segundo vencer eles teriam um ponto cada um e fariam jus a 32 moedas cada. Assim se eles não jogarem o primeiro jogador poderá

---

[1] Moeda de ouro utilizada em vários países europeus até o século XIX.

argumentar: eu fico com as 32 e vamos dividir as 56 – 32 = 24 igualmente. Assim a minha parte será 32 + 12 = 44.

Acima está o essencial sobre o que Pascal escreveu para Fermat nesta carta, sobre este problema específico. Ele agora está pronto para generalizar, mas possivelmente um pouco inseguro. A solução que ele encontrou está contida no seguinte teorema:

**Teorema.** Suponha que o jogo é interrompido quando o primeiro jogador precisa de “r” jogos para vencer enquanto que o segundo necessita de “s” jogos, onde r + s ≥ 1. Então o primeiro jogador deve receber:

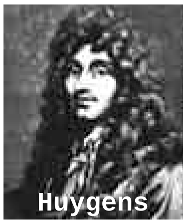
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} / 2^n$$ , onde n = r + s –1 (número máximo de jogadas restantes).

Por exemplo, suponha que r = 1 e s = 3, como no exemplo de Tartaglia. Então a divisão (proporção) da aposta que o primeiro jogador deve receber é:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} / 2^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} / 2^3 = \frac{7}{8}$$ e não 5:3 como foi sugerido por Tartaglia. Observe que este caso equivale ao segundo analisado anteriormente. Neste exemplo, um jogador tinha ganhado dois pontos, faltando um, portanto, para vencer (r = 1) e o outro não tinha ganhado nada, faltando três (s = 3) para vencer.

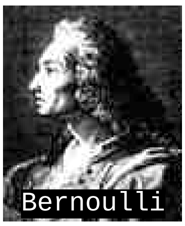
Para provar este resultado Pascal utilizou o triângulo (que hoje leva o seu nome, mas que não foi descoberto por ele) de uma maneira bastante inteligente. De fato, ele provou muitos outros resultados sobre o triângulo.

## 3. A ADOLESCÊNCIA

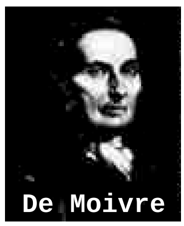



O holandês Christiaan Huygens (1629-1695) em uma viagem a Paris, em 1655, se informou sobre o assunto, que tinha motivado a troca de correspondência entre Fermat e Pascal. Na volta a terra natal escreveu um pequeno trabalho sobre o cálculo de probabilidades, que foi denominado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, apresentando então a que seria a primeira obra impressa sobre o assunto.

Na obra ele aborda o problema dos pontos e apresenta a solução do problema dos dados. Ele terminou seu livro com uma coleção de problemas de probabilidade envolvendo a retirada de bolas coloridas de uma urna.

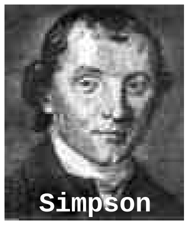


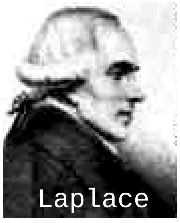

Trabalhando sobre a abordagem de Fermat que era combinatória, o suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) iniciou o processo de sistematização da probabilidade deixando de lado os seguros e os jogos de azar. Em torno de 1689 ele publicou um trabalho sobre séries dando a conhecer um dos primeiros e principais teoremas da teoria da probabilidade que ele denominou de "lei dos grandes números". Este resultado é uma prova de que a freqüência relativa de um evento tende para a probabilidade deste evento, quando n = “número de repetições do experimento”, tende ao infinito. Os principais resultados alcançados por Jacques (Jakob) Bernoulli foram publicados, em 1713, na obra denominada de *Ars Conjectandi*.




Logo após, em 1718, foi publicado pelo inglês Abraham de Moivre (1667-1754) a obra *The Doctrine of Chance* seguida um pouco mais tarde, 1730, pela *Miscellanea Analytica*. Na primeira obra de De Moivre, junto com muitos problemas com dados e outros jogos, aparece à definição de "independência". Nesta obra ele investigou ainda taxas de mortalidade e os fundamentos da teoria das anuidades. Na obra, de 1940, aparece a fórmula de Stirling[2] – erroneamente atribuída ao escocês James Stirling (1692-1770) - que ele utilizou, em 1733, para derivar a curva normal, como uma aproximação da distribuição binomial. Na segunda edição da obra, publicada em 1738, de Moivre menciona que Stirling melhorou a fórmula.

Em 1740 é publicada *The Nature and Laws of Chance* do inglês Thomas Simpson (1710-1761), baseada na obra de Moivre.


Simpson

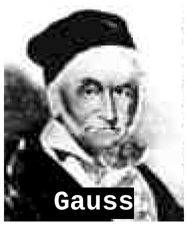

Laplace

Entretanto, a obra fundamental desta fase, que pode ser rotulada de clássica, foi publicada no inicio do século seguinte, 1812, pelo francês Pierre-Simon Laplace que ele denominou de *Théorie Analytique des Probabilités*. Como resultado de um breve período em 1795 como professor na Escola Normal, (a escola sobreviveu apenas quatro meses) que tinha por objetivo formar professores, Laplace reuniu suas notas de aula e publicou em 1814 a obra *Essai philosophique sur les probabilités*. A obra discutia os princípios da teoria e principalmente aplicações nos jogos de azar, filosofia natural, ciências morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade.

Sua obra principal, de 1812, foi publicada em dois volumes e uma segunda edição publicada dois anos após fez crescer o material em aproximadamente 30 por cento. No primeiro volume são estudadas as funções geratrizes e também são apresentadas várias aproximações de expressões utilizadas na teoria da probabilidade. A regra de Bayes[3] (que foi batizada por Poincaré – vide abaixo - alguns anos depois) e o conceito de esperança matemática. O livro apresenta ainda métodos de determinar probabilidades de eventos compostos, quando as probabilidades dos eventos simples são conhecidas, uma discussão do método dos mínimos quadrados, o problema da agulha de Buffon[4] e a probabilidade inversa. Aplicações a tempo de vida, duração de casamentos também são consideradas, como, também, aplicações da teoria a aspectos legais.

Edições posteriores da obra apresentam ainda suplementos que consideram aplicações de probabilidade em erros de observações, na determinação da massa de Júpiter, Saturno e Urano e a problemas de Geodésia. Muito do trabalho feito por Laplace, entre 1817 e 1819, aparece na edição de 1820. Um quarto suplemento que retorna o assunto das funções geradoras aparece na edição de 1825. O suplemento final, apresentado por ele e por seu filho, foi feito quando ele estava com 76 anos de idade. Até Laplace a probabilidade estava essencialmente voltada ao cálculo em jogos de azar. Laplace ampliou o campo de aplicações da teoria para outras áreas, como a teoria dos erros, a matemática atuarial e a mecânica estatística.

Foi a partir da obra de Laplace que os estudos na área cresceram e tiveram a atenção de grandes matemáticos como o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o suíço Leonhard Euler (1707-1783), o russo Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), e os franceses Siméon Denis Poisson (1781-1840), Jules Henri Poincaré (1854-1912), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), Henri Léon Lebesgue (1875-1941), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), entre outros.


Gauss

Por exemplo, até hoje a distribuição normal, um modelo básico da teoria estatística é denominado de curva de Gauss. No entanto, existem controvérsias sobre quem teria sido o real formulador do modelo. Consta que ele teria sido deduzido ainda por De Moivre e por Laplace. Tanto que é possível encontrar alguns livros didáticos [LOP02] em que a distribuição é denominada de modelo de Gauss-Moivre-Laplace.

---

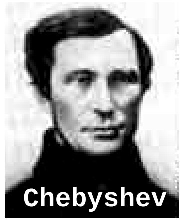
2 $n! = \sqrt{2n\pi}\,(n/e)^n$ para n grande

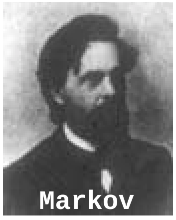
3 Thomas Bayes (1702 – 1761)

4 Georges Louis Leclerc Comte de Buffon (1707 – 1788)

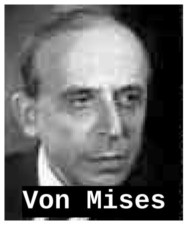
## 4. A IDADE ADULTA

A partir de Laplace muitos matemáticos fizeram contribuições para este ramo da matemática. Entre eles Chebyshev, Markov, von Mises, e o hoje considerado pai da probabilidade moderna, Kolmogorov.




O russo Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) aplicou o método das frações contínuas que foi inicialmente utilizado pelo seu professor Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) à teoria da probabilidade. Ele também estudou seqüências de variáveis mutuamente independentes esperando estabelecer as leis probabilísticas em formas mais gerais. Ele provou o teorema central do limite sobre hipóteses bastante gerais. Ele é particularmente lembrado pelas cadeias que levam seu nome que são seqüências de variáveis aleatórias na qual uma variável é determinada pelo valor da anterior, mas são independentes no sentido de que o estado presente depende apenas da sua anterior. Este trabalho lançou a teoria dos processos estocásticos.




O austríaco Richard von Mises (1883-1953) era associado a escola vienense do positivismo lógico. Ele chegou à conclusão de que a probabilidade não pode ser simplesmente o valor limite da freqüência relativa de um evento e adicionou a condição de que qualquer evento deve ser irregularmente ou aleatoriamente distribuído na série de ocasiões em que sua probabilidade é avaliada (medida). As idéias de von Mises sobre o assunto estão contidas em dois artigos publicados, em 1919, e que passaram quase desapercebidos a época, mas que tiveram influência sobre a estatística moderna.

Uma das principais dificuldades da teoria tinha sido uma definição precisa o suficiente para que ela pudesse ser utilizada na matemática e fosse compreensiva o bastante para poder ser aplicada a uma grande categoria de fenômenos, além dos jogos de azar. A procura por esta definição consumiu praticamente três séculos e foi marcada por inúmeras controvérsias. O assunto foi finalmente resolvido no século vinte pela teoria axiomática da probabilidade [APO69].

Antes de publicar sua monografia, Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), publicou seu primeiro artigo na área, em 1925, em conjunto com Aleksandr Yakovlevich Khinchin (1894-1959). O artigo apresentava o teorema das "três séries" e resultados sobre desigualdades de somas parciais de variáveis aleatórias. Este artigo tornou-se a base das desigualdades martingales e do cálculo estocástico

Em 1933, Kolmogorov publicou uma nova monografia denominada de *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, que em Inglês foi batizada de *Foundations of Probability Theory* (Fundamentos da Teoria da Probabilidade) iniciando a etapa moderna da teoria. A partir de então ela foi sendo refinada (matematizada) e hoje é parte de uma disciplina mais geral denominada de teoria da medida.


Kolmogorov axiomatizou a teoria da probabilidade da mesma forma que a Geometria foi axiomatizada por Euclides[5] nos Elementos. Um dos sucessos de sua abordagem foi dar uma definição rigorosa de expectância condicional. Kendall [KEN90] coloca: "o ano de 1931 pode ser considerado como o início do segundo estágio criativo na vida de Kolmogorov. Conceitos amplos e genéricos em vários ramos da matemática caracterizaram este estágio." Em 1938 ele publicou mais um artigo na área da teoria probabilística que se tornou a base dos processos aleatórios de Markov.

[5] Euclides de Alexandria (325 ac – 265 ac)

## 5. CONCLUSÃO

Assim como muitos outros ramos da matemática, a probabilidade tirou proveito da variedade de suas aplicações. Por outro lado, cada avanço na teoria aumentou seu campo de influência. A estatística matemática é um ramo importante da probabilidade aplicada assim como processos estocásticos [APO69]. Novas áreas de aplicação estão surgindo além das já tradicionais. Hoje a probabilidade pode ser utilizada com sucesso na mecânica estatística, na teoria das filas, no controle de qualidade através do CEP (Controle Estatístico do Processo), na Engenharia, na teoria dos estoques e na simulação de sistemas, entre outras.

Entretanto, a aplicação de maior sucesso da teoria da probabilidade foi na estatística, que só se tornou a disciplina respeitada e amplamente utilizada de hoje, após ter feito um casamento, não apenas de conveniência, com a probabilidade. A criação da inferência estatística (estimação e testes de hipóteses), bem como a grande maioria, das técnicas do século vinte só foram possíveis graças a este casamento. Hoje as duas disciplinas estão de tal forma interligadas que já não é fácil distingüi-las e principalmente traçar um panorama dos seus desenvolvimentos de forma isolada.

## 6. REFERÊNCIAS

[ALL03] ALLEN, G. Donald. **Homepage**. < http://www.math.tamu.edu/~don.allen/>. Acesso em 08/01/2003.

[APO69] APOSTOL, Tom M. **Calculus (Volume II).** New York: John Wiley & Sons, 1969 (2nd edition).

[DAV98] DAVID, Florence N. **Games, Gods and Gambling**. Mineola (NY): Dover Publications, 1998, 275 p.

[HAC75] HACKING, I. **The Emergence of Probability**. Cambridge U. Press, London, 1975.

[KEN03] KENDALL, M. G. **Le Origini Del Calcolo Delle Probabilitá**. *Lettera matematica*. Springer Itália. On-line <http://matematica.uni-bocconi.it/probabilita/origini.htm> Acesso 09/01/2003.

[KEN90] KENDALL, D et al. **Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)**. *Bulletin of the London Mathematical Society*. v. 22, n. 1, p. 31-100, 1990.

[KEN97] KENDALL, M. G. **Statistics Theory and Practice: Selected Papers.** Maurice Kendall, Diana Kendall, Alan Stuart (Editors). Oxford (UK): Oxford University Press, 1997.

[KOL50] KOLMOGOROV, Andrey Nikolaevich. **Foundations of Probability Theory**. New York: Chelsea, 1950.

[MAR83] MARINONI, A. **La matematica di Leonardo da Vinci: uma nuova immagine dellártista scienziata**. Milan: Arcadia, 1983.

[LOP02]

[ORE53] ORE, Oystein. **Cardano: The Gambling Scholar**. Princeton (MA): Princeton University Press, 1953.

[POR02] PORTO Francisco. Início da matematização das probabilidades. On-line <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html> Acesso 11/09/2002.

[SHE74] SHEYIN, O. B. **On the prehistory of the theory of probabilities**. *Archive for History of Exact Sciences*. Berlin: Springer-Verlag**.** v. 12, n. 2, p. 97-141, 1974.